Chers élèves,

Je me réjouis de vous retrouver après de longs mois même si j'avoue que je n'avais jamais imaginé un tel retour…. J'espère que vous traversez cette période inédite de la manière la plus sereine possible et que vous n'avez pas été personnellement impactés par ce virus… Sachez que je pense bien à vous.

Afin de vous aider à aborder au mieux la rentrée de septembre, je me suis mise au travail pour vous et ai décidé de vous enseigner de nouvelles matières à distance. Cela reste très compliqué, j'en conviens mais j'ai vraiment essayé d'être la plus claire possible dans tous mes développements. J'ai travaillé sur le nouveau thème de la manière suivante : direct à l'essentiel, introduction du chapitre, exemples concrets et ensuite exercices pour vous entraîner.

Je fonctionnerai comme suit : la matière que vous recevez aujourd'hui englobe une petite semaine de cours, je vous ferai donc parvenir les solutions fin de semaine ou début de semaine prochaine. D'ici là, si vous avez la moindre question, n'hésitez pas à me joindre soit sur mon adresse mail abienfait1501@hotmail.com soit via Messenger Anne Bienfait. Surtout, n'hésitez pas, je suis là pour vous aider !

J'espère vous retrouver bientôt et en pleine forme !

En attendant, prenez bien soin de vous <3

Mme Bienfait

UAA 4 : Dérivées et applications

La notion de dérivée découverte et travaillée dans ce thème permet d'étudier les caractéristiques de nombreuses fonctions : croissance, extrema, représentation graphique,… Nous allons aller directement à l'essentiel.

La dérivée d'une fonction f est une fonction qui, à tout nombre pour lequel f admet un nombre dérivé, associe ce nombre dérivé.

La **fonction dérivée** de f ou, plus simplement, la **dérivée de f** est la fonction qui, à chaque réel a en lequel f est dérivable, fait correspondre le nombre dérivé de f en a. Elle se note f'.

A. Dérivées de fonctions usuelles

$a' = 0 \quad (a\ est\ une\ constante, i.e. un\ nombre)$

$x' = 1$

$ax' = a$

$(x^n)' = n.x^{n-1}$

$(a.x^n)' = a.n.x^{n-1}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(a.\sin x)' = a\cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(a.\cos x)' = -a\sin x$

$(tg\ x)' = \dfrac{1}{cos^2x}$

$(a.tg\ x)' = \dfrac{a}{cos^2x}$

B. Dérivées de somme, produit et quotient de fonctions

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f.g)' = f'.g + f.g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$$

$$(a.f)' = a.f'$$

<u>Exemples :</u>

$(7)' = 0$

$(9x)' = 9$

$(12x^3)' = 12.3.x^{3-1} = 36x^2$

$(5\sin x)' = 5\cos x$

$(-3\cos x)' = -(-3)\sin x = 3\sin x$

$(4\,tg\,x)' = \dfrac{4}{cos^2 x}$

$(3x^2 - 2x + 5)' = (3x^2)' - (2x)' + (5)' = 3.2x - 2 + 0 = 6x - 2$

$$\begin{aligned}\big((2x^3+5x-1).(x-3)\big)' &= (2x^3+5x-1)'.(x-3) + (2x^3+5x-1).(x-3)' \\ &= (2.3x^2+5-0).(x-3) + (2x^3+5x-1).(1-0) \\ &= (6x^2+5).(x-3) + (2x^3+5x-1).1 \\ &= 6x^3 - 18x^2 + 5x - 15 + 2x^3 + 5x - 1 = 8x^3 - 18x^2 + 10x - 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{4x^2-5x+1}{2x+3}\right)' &= \frac{(4x^2-5x+1)'.(2x+3) - (4x^2-5x+1).(2x+3)'}{(2x+3)^2} \\ &= \frac{(8x-5).(2x+3) - (4x^2-5x+1).2}{(2x+3)^2} \\ &= \frac{(16x^2+24x-10x-15) - (8x^2-10x+2)}{(2x+3)^2} \\ &= \frac{16x^2+14x-15-8x^2+10x-2}{(2x+3)^2} = \frac{8x^2+24x-17}{(2x+3)^2}\end{aligned}$$

À toi de jouer…

Calcule la dérivée des fonctions suivantes :

a) $4x$
b) $2x^2-5x+7$
c) $-\frac{x}{3}$
d) $\sqrt{x}+4x-1$
e) $\frac{1-2x}{3x-1}$
f) $x + \cos x$
g) $3\sin x - 2\cos x$
h) $(2+x)(1-5x)$
i) $(x^4-1)(2x+3)$
j) $(x - x^2)(3x)$
k) $x^2 cosx$
l) $\sin x . \cos x$
m) $\frac{2x^3}{x^2-1}$
n) $\frac{4x^2+3x-1}{2x+1}$
o) $(x^3-5x)(2x^2-4)$
p) $x+\frac{x^2-1}{x^2+1}$

C. Dérivée d'une fonction composée

$$(f^m)' = m.f^{m-1}.f'$$

$$(\sin f(x))' = f'(x).\cos f(x)$$

$$(\cos f(x))' = -f'(x).\sin f(x)$$

$$\left(tg\ f(x)\right)' = \frac{f'(x)}{cos^2 f(x)}$$

Rappels : $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ et $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

Exemples :

$((5x-4)^3)' = 3.(5x-4)^2.(5x-4)' = 3.(5x-4)^2.5 = 15.(5x-4)^2$

$$\left(\sqrt[4]{3x^2+5x-1}\right)' = \left((3x^2+5x-1)^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}.(3x^2+5x-1)^{\frac{1}{4}-1}.(3x^2+5x-1)'$$
$$= \frac{1}{4}.(3x^2+5x-1)^{\frac{-3}{4}}.(6x+5) = \frac{1.(6x+5)}{4.(3x^2+5x-1)^{\frac{3}{4}}}$$
$$= \frac{6x+5}{4.\sqrt[4]{(3x^2+5x-1)^3}}$$

$$\left(\frac{4}{(3x^2+7x-1)^3}\right)' = (4.(3x^2+7x-1)^{-3})'$$
$$= 4.(-3).(3x^2+7x-1)^{-3-1}.(3x^2+7x-1)'$$
$$= -12.(3x^2+7x-1)^{-4}.(6x+7) = -12.\frac{1}{(3x^2+7x-1)^4}.(6x+7)$$
$$= \frac{-12.(6x+7)}{(3x^2+7x-1)^4}$$

$(\cos(-3x+4))' = -(-3x+4)'.\sin(-3x+4) = -(-3).\sin(-3x+4) = 3.\sin(-3x+4)$

$$\left(sin^6(2x^2-3)\right)' = ((\sin(2x^2-3))^6)' = 6.(\sin(2x^2-3))^5.(\sin(2x^2-3))'$$
$$= 6.(\sin(2x^2-3))^5.(2x^2-3)'.\cos(2x^2-3)$$
$$= 6.(\sin(2x^2-3))^5.4x.\cos(2x^2-3)$$
$$= 24x.sin^5(2x^2-3).\cos(2x^2-3)$$

À toi de jouer… Calcule la dérivée des fonctions composées suivantes :

a) $(3x + 4)^2$

b) $(x - x^2)^3$

c) $(2 - 4x)^3$

d) $\frac{3}{(2x+1)^2}$

e) $cos^3 2x$

f) $\cos(2x - 4)$

g) $(\frac{1+x}{1-x})^2$

h) $(1 + \frac{1}{x})^3$

i) $sin^2(3x + 2)$

j) $\sqrt{3x}$

k) $tg\ 4x$

l) $\sqrt{x^2 - 4x}$

m) $f(x) = (3x^2 - 1)^3$

n) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^4 - 2x}}$

o) $f(x) = sin^6(3x - 5)$

Juste de l'entraînement cette semaine… Tous les types de dérivées sont mélangés…

Calcule la dérivée des fonctions suivantes :

a) $-6x^5 - 3x^4 + 2x - 1$

b) $(-5x^2 - 3x + 1)^3$

c) $\frac{3x^2-4x}{2-3x}$

d) $\cos(2x - 4)$

e) $x^2. sin3x$

f) $5x^2.(2x + 1)$

g) $x.\sqrt{x}$

h) $\frac{x^3+1}{x^3-1}$

i) $\sqrt{2 - 3x}$

j) $cosx.(sin^2x + 2)$

k) $tg^2 3x$

l) $\frac{x^2+x+1}{1-x}$

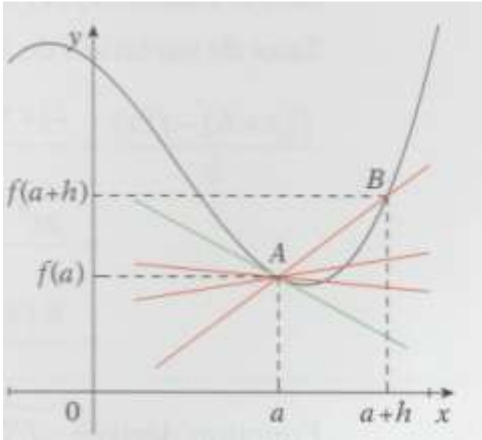
m) $(4x^2 - 5x + 1).(2x - 3)^3$

n) $\frac{2x-1}{(3x+2)^2}$

o) $\frac{(3x^2+2x)^2}{2x-3}$

D. Interprétation graphique de la dérivée

Graphiquement, le nombre dérivé de f en a est la **pente de la tangente** (non verticale) au graphique de f en son point d'abscisse a.



Lorsque B s'approche de A, le sécante BA pivote autour du point A jusqu'à devenir la tangente en (a ; f(a)).

Cette tangente au graphique de f au point (a ; f(a)) est une droite dont on connaît un point et la pente m=f'(a). Son équation est **:**

$$\boldsymbol{T \equiv y - f(a) = f'(a).(x - a)}$$

<u>Procédure :</u>

1) Remplacer a par sa valeur dans la formule
2) Calculer la valeur de $f(a)$ en remplaçant chaque x par sa valeur a
3) Dériver la fonction, on obtient alors l'expression de $f'(x)$
4) Remplacer x par sa valeur a dans l'expression de la dérivée, on obtient alors $f'(a)$
5) Replacer les 2 valeurs calculées dans la formule et simplifier l'expression

<u>Exemple :</u> écris l'équation de la tangente au graphique de la fonction $f(x) = 2x^2 + 4x - 5$ au point d'abscisse $a = -2$

1) $T \equiv y - f(-2) = f'(-2).(x - (-2))$
2) $f(-2) = 2.(-2)^2 + 4.(-2) - 5 = 8 - 8 - 5 = -5$
3) $f'(x) = (2x^2 + 4x - 5)' = 2.2x + 4 = 4x + 4$
4) $f'(-2) = 4.(-2) + 4 = -8 + 4 = -4$
5) $T \equiv y - (-5) = -4.(x - (-2))$

   $T \equiv y + 5 = -4.(x + 2)$

   $T \equiv y + 5 = -4x - 8$

   $T \equiv y = -4x - 13$

À toi de jouer…

Ecris l'équation de la tangente au graphique de la fonction f au point d'abscisse a.

a) $f(x) = x^2 + 5x - 2$ $\qquad a = 1$

b) $f(x) = x^2(x + 2)$ $\qquad a = -1$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2$ $\qquad a = 2$

d) $f(x) = \frac{4x+1}{x-3}$ $\qquad a = 0$

e) $f(x) = \sqrt{5x + 3}$ $\qquad a = 3$

f) $f(x) = 9x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ $\qquad a = -3$

E. Quel est le lien entre le sens de variation d'une fonction et le signe de sa dérivée ?

L'étude du signe de la dérivée d'une fonction permet de connaître le sens de variation de cette fonction :

a) si $f^{'}(x) > 0$ sur un intervalle, alors f est croissante sur cet intervalle.

b) si $f^{'}(x) < 0$ sur un intervalle, alors f est décroissante sur cet intervalle.

c) si $f^{'}(x)$ s'annule en a et change de signe en a, la fonction présente un maximum ou un minimum en a.

<u>Rappel : règles de signes :</u>

- fonction du 1er degré ($y = mx + p$) : signe de m à droite de la racine
- fonction du second degré ($y = ax^2 + bx + c$) : signe de a partout SAUF entre les éventuelles racines

<u>Ce qu'il faut retenir :</u>

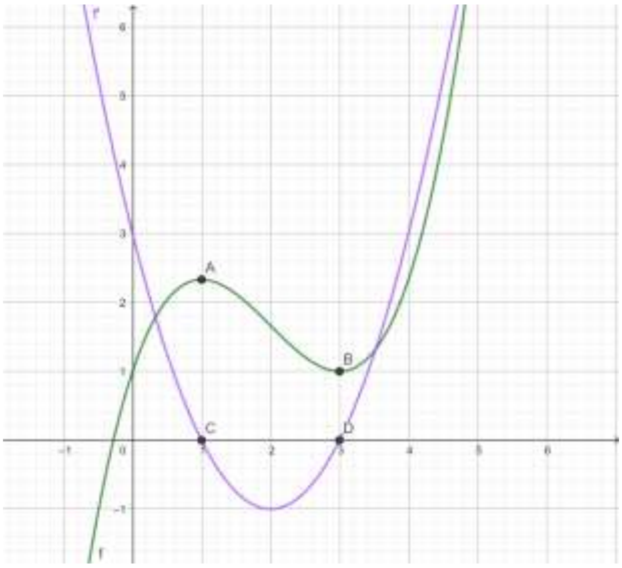
x		$racine$	
$f^{'}(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	MINIMUM	↗

x		$racine$	
$f^{'}(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	MAXIMUM	↘

Exemple : Détermine le sens de variation de la fonction suivante.

De manière générale, on effectue le calcul sur base de l'expression analytique de la fonction. Dans le cas qui nous occupe, je vous ai représenté la fonction et sa dérivée pour vous permettre de visualiser les extrema recherchés.

On donne, dans un même repère, les graphiques de la fonction $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ et de sa dérivée $f'(x) = x^2 - 4x + 3$



Lorsque l'on observe bien le dessin, on constate que les racines de la fonction dérivée (points C et D) correspondent aux extrema locaux de la fonction initiale (A et B).

1) Calculer la dérivée 1ère

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1\right)' = \frac{1}{3}.3x^2 - 2.2x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

2) Déterminer les racines de cette fonction dérivée :
Pour cela, il suffit de résoudre : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\Delta = 16 - 12 = 4 \qquad x_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{4-2}{2} = 1$$

3) Réaliser le tableau de signes de la fonction dérivée

x		1		3	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	MAXIMUM	↘	MINIMUM	↗

4) Déterminer les coordonnées des extrema locaux (s'il y en a):

- Maximum : $x = 1$
  On remplace alors x par sa valeur dans l'expression initiale :
  $$f(1) = \frac{1^3}{3} - 2.1^2 + 3.1 + 1 = \frac{7}{3}$$
  ⇨ Max en $\left(1; \frac{7}{3}\right)$ Il s'agit du point A sur le dessin.

- Minimum : $x = 3$
  $$f(3) = \frac{3^3}{3} - 2.3^2 + 3.3 + 1 = 1$$
  ⇨ Min en $(3; 1)$ Il s'agit du point B sur le dessin.

<u>À toi de jouer…</u>

Détermine le sens de variation des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$f_2(x) = -3x^2 + 4x + 5$$

$$f_3(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$$

$$f_4(x) = (x + 1).(x - 1)^3$$

$$f_5(x) = \frac{x^2 - 5x + 10}{x - 2}$$

$$f_6(x) = 4x^4 - 6x^2$$