Chers élèves,

Je me réjouis de vous retrouver après de longs mois même si j’avoue que je n’avais jamais imaginé un tel retour…. J’espère que vous traversez cette période inédite de la manière la plus sereine possible et que vous n’avez pas été personnellement impactés par ce virus… Sachez que je pense bien à vous.

Afin de vous aider à aborder au mieux la rentrée de septembre, je me suis mise au travail pour vous et ai décidé de vous enseigner de nouvelles matières à distance. Cela reste très compliqué, j’en conviens mais j’ai vraiment essayé d’être la plus claire possible dans tous mes développements. J’ai travaillé sur le nouveau thème de la manière suivante : direct à l’essentiel, introduction du chapitre, exemples concrets et ensuite exercices pour vous entraîner.

Je fonctionnerai comme suit : la matière que vous recevez aujourd’hui englobe une petite semaine de cours, je vous ferai donc parvenir les solutions fin de semaine ou début de semaine prochaine. D’ici là, si vous avez la moindre question, n’hésitez pas à me joindre soit sur mon adresse mail abienfait1501@hotmail.com soit via Messenger Anne Bienfait. Surtout, n’hésitez pas, je suis là pour vous aider !

J’espère vous retrouver bientôt et en pleine forme !

En attendant, prenez bien soin de vous <3

Mme Bienfait

UAA 3 : Intégrale

L'objectif des intégrales est de déterminer une fonction à partir de sa dérivée. L'intégrale effectue donc la tâche "inverse" de celle de la fonction dérivée. Le calcul des intégrales est très utile en physique, en statistique et en modélisation de donnée, les intégrales permettent par exemple de déterminer la superficie de surface aux formes complexes.

Ce chapitre comporte différentes parties. Au fil des pages qui suivent, je vais vous expliquer les différentes méthodes d'intégration (il en existe 3) et ne travailler, dans un 1er temps que sur des intégrales indéfinies. Vous trouverez les formules (à connaître), des exemples et surtout des exercices pour vous entraîner. Je vous ferai parvenir les solutions d'ici quelques jours. Cela nous permettra d'atteindre l'objectif majeur de ce thème : le calcul d'aire.

A. Introduction

En 5ème année, nous avons abordé la notion de dérivée et découvert différentes techniques de dérivation. Cette année, nous découvrons l'opération réciproque : l'**intégration** aussi appelée **primitivation**.

On appelle **primitive d'une fonction** f toute fonction F telle que $F' = f$.

<u>Exemples :</u>

$F(x) = x^2 - 3x + 4$ est UNE primitive de $f(x) = 2x - 3$ car $(x^2 - 3x + 4)' = 2x - 3$

On dit qu'il s'agit d'UNE primitive et non de LA primitive car si le terme indépendant de $F(x)$ est différent, on retombe quand même sur $f(x)$.

Si $F(x) = x^2 - 3x + 17$, alors $f(x) = (x^2 - 3x + 17)' = 2x - 3$. On retombe bien sur la même fonction dérivée.

$F(x) = x^4 + x^2 - 5$ est une primitive de $f(x) = 4x^3 + 2x$

$F(x) = \sin x$ est une primitive de $f(x) = \cos x$

Si $F: x \to F(x)$ est une primitive particulière de $f: x \to f(x)$,
Alors toutes les fonctions d'expression $F(x) + k$ (k $réel$) sont aussi des primitives de f.

L'ensemble des primitives de la fonction f est appelé **intégrale indéfinie de f** et est noté $\int f(x)dx$.
Intégrer une fonction, c'est rechercher l'ensemble des primitives de cette fonction.

B. Formules

$$\int a\,dx = a.x + k$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + k$$

$$\int a.x\,dx = a.\frac{x^2}{2} + k$$

$$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$$

$$\int a.x^n\ dx = a.\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$$

$$\int \frac{1}{x}\ dx = ln|x| + k$$

$$\int \frac{a}{x}\ dx = a.\int \frac{1}{x}\ dx = a.\,ln|x| + k$$

$$\int e^x\ dx = e^x + k$$

$$\int a.e^x\ dx = a.e^x + k$$

$$\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + k$$

$$\int a.\sin x\,dx = -\,\mathrm{a}.\cos x + k$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + k$$

$$\int a.\cos x\,dx = a.\sin x + k$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\ dx = tg\ x + k$$

$$\int \frac{a}{cos^2 x}\ dx = a.\int \frac{1}{cos^2 x}\ dx = a.tg\ x + k$$

Quelques rappels sur les propriétés des puissances :

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

<u>Exemples :</u>

$$\int (7x+3)dx = \int 7xdx + \int 3dx = 7\frac{x^2}{2} + 3x + k$$

$$\int \frac{5}{\sqrt{x}}\, dx = 5.\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 5.\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = 5.\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + k = 5.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + k = 5.2.x^{\frac{1}{2}} + k = 10\sqrt{x} + k$$

$$\int (4\sin x - \frac{3}{x})dx = \int 4.sinx\; dx - \int \frac{3}{x}dx = 4\int \sin x\; dx - 3\int \frac{1}{x}dx\; = -4\cos x - 3\ln|x| + k$$

$$\int (x+2)(7-x)dx$$

$$= \int (7x - x^2 + 14 - 2x)dx$$

$$= \int (-x^2 + 5x + 14)dx$$

$$= \int -x^2dx + 5\int xdx + \int 14dx = -\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + 14x + k$$

$$\int \frac{5x^3 - 2x + 1}{x}dx = \int \frac{5x^3}{x}dx - \int \frac{2x}{x}dx + \int 1dx = \int 5x^2dx - \int 2dx + \int \frac{1}{x}dx = 5\frac{x^3}{3} - 2x + ln|x| + k$$

$$\int (4x-3)^2dx = \int (16x^2 - 2.4x.3 + 9)dx$$

$$= \int 16x^2dx - \int 24xdx + \int 9dx = 16\frac{x^3}{3} - 24\frac{x^2}{2} + 9x + k$$

$$= 16\frac{x^3}{3} - 12x^2 + 9x + k$$

À toi de jouer…

A. Intégration immédiate

Calcule les intégrales suivantes :

a) $\int 3x\,dx =$
b) $\int(-2x^2 + 11x - 14)dx =$
c) $\int \left(2\sin x + \frac{4}{x}\right) dx =$
d) $\int(\sin x + \cos x)dx =$
e) $\int \left(x^3 - 2x + \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx =$
f) $\int \frac{x^4 - 5}{x^2}\,dx =$
g) $\int x.\sqrt[3]{x^4}\,dx =$
h) $\int(1 - x).(2x + 3)\,dx =$
i) $\int(7x - 3)^2\,dx =$
j) $\int \left(3x^2 + 7x - \frac{5}{x}\right) dx =$
k) $\int \frac{4x^3 + 5\sqrt{x}}{2x^2} dx =$
l) $\int(7^x + x^7)dx =$
m) $\int \frac{cos^2 x + 3}{cos^2 x} dx =$
n) $\int(5x - 2)^2 dx =$
o) $\int(2x + 1)\left(\frac{1}{x} - 3x\right) dx =$
p) $\int(5x + 4)^2 dx =$
q) $\int(x^3 - 5x^2 + 3x - 1)dx =$
r) $\int \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^4}\right) dx =$
s) $\int \frac{4x^3 + 5\sqrt{x}}{x^2} dx =$
t) $\int(5 - 2x)^2 dx =$

B. Intégration semi-immédiate

$$\int \left[f\left(g(x)\right).g^{'}(x)\right]\,dx = F\left(g(x)\right) + k$$

<u>Comment utiliser cette formule ?</u>

- ✓ repérer dans l'énoncé la fonction g (dans une parenthèse, au dénominateur, sous un radical, argument d'une fonction trigonométrique, exposant d'une fonction exponentielle,…) dont on trouve la dérivée
- ✓ poser $t = g(x)$
- ✓ calculer $dt = g^{'}(x)dx$
- ✓ faire la substitution
- ✓ calculer la primitive
- ✓ remplacer t par g(x) pour obtenir le résultat en fonction de x

<u>Exemples :</u>

$$\int (8x-3)^5 dx =$$

Je pose la fonction t : $t = 8x - 3$

Je dérive cette fonction :$dt = 8\,dx <=> dx = \frac{dt}{8}$

Je remplace dans l'expression initiale : $\int \boldsymbol{t}^5\,\frac{\boldsymbol{dt}}{\boldsymbol{8}}$. On remarque que tous les « x » ont disparu, il est donc possible d'utiliser cette méthode. Je suis donc en mesure d'utiliser les formules d'intégration :

$$\int t^5\frac{dt}{8} = \int \frac{1}{8}t^5 dt = \frac{1}{8}.\frac{t^6}{6} + k = \frac{t^6}{48} + k = \frac{(8x-3)^6}{48} + k$$

Quand on a terminé le calcul de l'intégrale, on remplace t par sa valeur initiale.

$$\int \frac{2}{\sqrt{x+3}}dx =$$

$t = x + 3$

$dt = 1\,dx <=> dx = dt$

$$\int \frac{2}{\sqrt{\boldsymbol{t}}}\,dt = \int \frac{2}{t^{\frac{1}{2}}}dt = \int 2.t^{\frac{-1}{2}}dt = 2.\frac{t^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} + k = 2.\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + k = 2.2.\sqrt{t} + k = 4\sqrt{x+3} + k$$

$$\int 2x.\cos(3x^2-4)\,dx =$$

$$t = 3x^2 - 4$$

$$dt = 6x\,dx \quad <=> dx = \frac{dt}{6x}$$

$$\int 2x.\cos \boldsymbol{t}\ \frac{dt}{6x} = \int \frac{2x}{6x}\cos \boldsymbol{t}\ dt = \int \frac{1}{3}\cos t\ dt = \frac{1}{3}\sin t + k = \frac{1}{3}\sin(3x^2-4) + k$$

$$\int \frac{5}{2x+3}dx =$$

$$t = 2x + 3$$

$$dt = 2dx \ <=> dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int \frac{5}{\boldsymbol{t}}.\frac{dt}{2} = \int \frac{5}{2}.\frac{1}{t}dt = \frac{5}{2}.ln|t| + k = \frac{5}{2}.ln|2x+3| + k$$

$$\int (3x+3).e^{x^2+2x-5}dx =$$

$$t = x^2 + 2x - 5$$

$$dt = (2x+2)dx \quad <=> dx = \frac{dt}{2x+2} = \frac{dt}{2.(x+1)}$$

$$\int (3x+3).e^{\boldsymbol{t}}.\frac{dt}{2.(x+1)} = \int 3.(x+1).e^t.\frac{dt}{2.(x+1)} = \int \frac{3.(x+1)}{2.(x+1)}.e^t dt$$
$$= \int \frac{3}{2}.e^t dt = \frac{3}{2}.e^t + k = \frac{3}{2}.e^{x^2+2x-5} + k$$

À toi de jouer…

a. $\int \frac{4}{(5x+3)^2}\ dx =$

b. $\int \cos 3x\ dx =$

c. $\int 3x^2 e^{x^3} dx =$

d. $\int (3x^2 - 5x + 1)^3 . (6x - 5) dx =$

e. $\int x \sin(5x^2 - 2)\ dx =$

f. $\int tg\ x\ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx =$

g. $\int \frac{5x}{\sqrt{4-x^2}}\ dx =$

h. $\int (2x + 1). (3x^2 + 3x + 5)^5\ dx =$

i. $\int \frac{8x-6}{2x^2-3x+5}\ dx =$

j. $\int (x + 1) \sqrt[3]{x^2 + 2x - 7}\ dx =$

k. $\int 5x \cos(x^2 + 1) dx =$

l. $\int \frac{e^{3x+1}+e^x-2}{e^x}\ dx =$

m. $\int \frac{4x+3}{4x+1} dx =$

n. $\int (5e^x + 2)^3 e^x dx =$

o. $\int (2x - 5)^2 dx =$

p. $\int \frac{6x-15}{\sqrt[3]{x^2-5x+4}}\ dx =$

q. $\int cotg\ x\ dx =$

r. $\int \frac{3x^4-5x+2}{6x^2}\ dx =$

s. $\int \frac{12}{7-3x}\ dx =$

t. $\int (x + 4). e^{4x^2+2x-5}\ dx =$

Un peu d'entraînement cette semaine…

Série 1 : intégrales immédiates

1) $\int 9x^2 dx$
2) $\int 4x^3 \sqrt{x}\, dx$
3) $\int \frac{2x^4+3x^2-5}{4x}\, dx$
4) $\int \left(4^x - 7\sqrt[3]{x^4} + \cos x\right) dx$
5) $\int (3x-2)^2 dx$
6) $\int \left(\frac{-7}{2x^2} + e^x\right) dx$
7) $\int \frac{5x^3+4x-8}{2\sqrt{x}}\, dx$
8) $\int (\sin x - 2e^x + \frac{4}{7x^3} dx$
9) $\int \frac{3\sqrt[5]{x^3}}{2\sqrt{x}} dx$
10) $\int \left(\frac{(4-5x)^2}{3x} + 4\right) dx$

Série 2 : intégrales par substitution

11) $\int (3x+1)^4 dx$
12) $\int (2x+3)(x^2+3x-6)^2 dx$
13) $\int \frac{1}{3}\cos(7x) dx$
14) $\int \frac{2}{7-6x} dx$
15) $\int 2e^{3x+1} dx$
16) $\int \sqrt{7x+3}\, dx$
17) $\int \frac{10x+15}{(x^2+3x-4)^3}\, dx$
18) $\int \frac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x+1}} dx$
19) $\int \sin x \,.\cos^2 x\, dx$
20) $\int (2.(4-x)^3 + \frac{2}{3x+1} - \sin(4-x))dx$

Série 3 : intégrales variées (méth. 1 et 2)

21) $\int \left(\frac{1}{3x} + \frac{2x^2-41}{2x}\right) dx$
22) $\int \frac{2}{\sqrt[3]{3x-5}}\, dx$
23) $\int 2.e^{-x} + 4.\left(3+\frac{x}{2}\right)^2 dx$
24) $\int (7-3x).(2x+9) dx$
25) $\int (12x^2 - \sin(3x+4))\, dx$
26) $\int \int \frac{(2-5x)^2}{3x}\, dx$
27) $\int (4x^2\sqrt{x} - \frac{5}{2x} + 3) dx$
28) $\int (3^{4x+1} - 2\sqrt{5-x}\,) dx$
29) $\int \frac{-6x+9}{(x^2-3x+4)^5}\, dx$
30) $\int (\frac{2}{3x+1} + \frac{4x}{x^2-4} - \frac{7}{3x})\, dx$