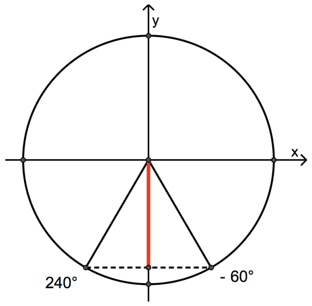
Mathématique 4e - Réponses des exercices pour préparer le CS n°2

Trigonométrie

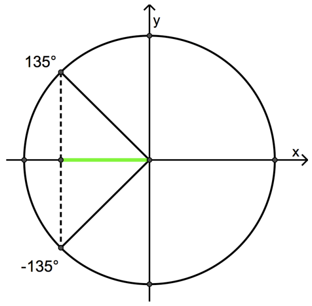
1. a) $x = -60° + k \cdot 360°$
ou $x = 240° + k \cdot 360°$

$x = -\dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$
ou $x = \dfrac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi$



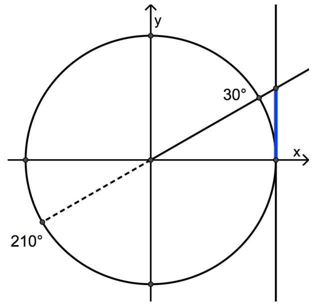
b) $x = 135° + k \cdot 360°$
ou $x = -135° + k \cdot 360°$

$x = \dfrac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$
ou $x = -\dfrac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$



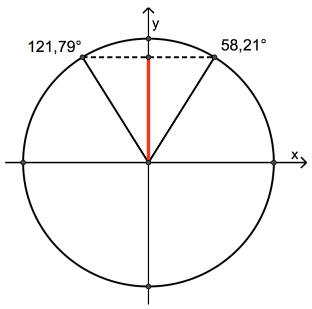
c) $x = 30° + k \cdot 180°$

$x = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot \pi$



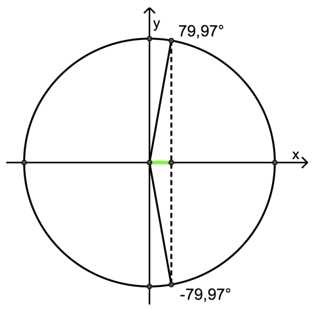
d) $x \approx 58{,}21° + k \cdot 360°$
ou $x \approx 121{,}79° + k \cdot 360°$

$x \approx 1{,}02 + k \cdot 2\pi$
ou $x \approx 2{,}13 + k \cdot 2\pi$



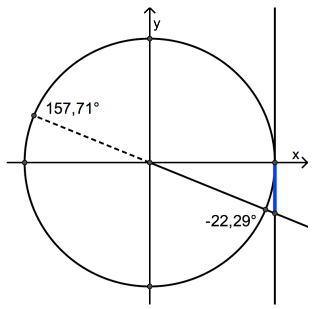
e) $x \approx 79{,}97° + k \cdot 360°$
ou $x \approx -79{,}97° + k \cdot 360°$

$x \approx 1{,}40 + k \cdot 2\pi$
ou $x \approx -1{,}40 + k \cdot 2\pi$

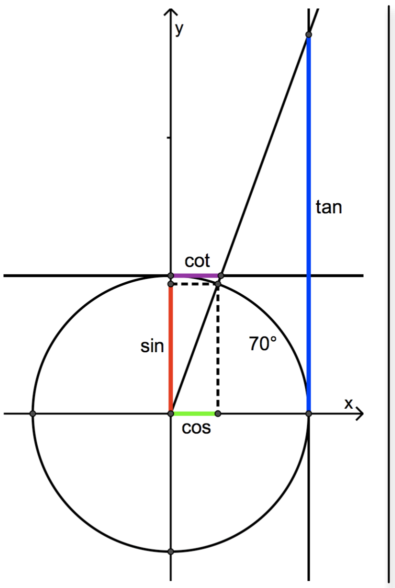


f) $x \approx -22{,}29° + k \cdot 180°$

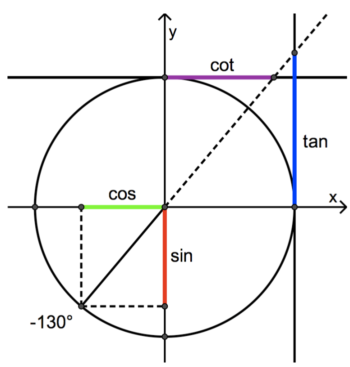
$x \approx -0{,}39 + k \cdot 2\pi$



2. $\sin 70° \approx 0{,}94$
$\cos 70° \approx 0{,}34$
$\tan 70° \approx 2{,}75$
$\cot 70° \approx 0{,}36$



3. $\sin(-130°) \approx -0{,}77$
$\cos(-130°) \approx -0{,}64$
$\tan(-130°) \approx 1{,}19$
$\cot(-130°) \approx 0{,}84$



4. Longueur de l'arc $AB \approx 8{,}0285$ (cm).

5. Longueur de l'arc $AB \approx 39{,}3572$ (cm).

6. a) $\dfrac{\pi}{12}$ b) $\dfrac{3\pi}{5}$ c) $\dfrac{2\pi}{45}$ d) $-\dfrac{5\pi}{9}$

7. Intensité de la force résultante $\approx$ 6,8059 (N).

8. a) $|AB| \approx 32{,}34(m)$
   b) $P\hat{R}Q \approx 35{,}28°$
   c) $|XZ| \approx 12{,}87(m)$
   d) $K\hat{I}L \approx 83{,}66°$ (penser aux triangles rectangles KLM et LKN).

Calcul vectoriel

1. a) $(8,-8)$
   b) $\|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{89}$
   c) Par exemple : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (-4,4)$
   d) $P(-3,12)$

2. D'une part : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ (1) . D'autre part : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ (2) .
   Additionnant ces deux égalités membre à membre, nous trouvons :
   $$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \underline{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + \underline{\underline{\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN}}} \ .$$
   Les sommes soulignées sont toutes deux égales au vecteur nul (pourquoi ?).
   Il reste à diviser les deux membres par 2 et on obtient la thèse.

3. Commençons par exemple par $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GM} + \underline{\overrightarrow{MB}} + \overrightarrow{GM} + \underline{\overrightarrow{MC}} = 2 \cdot \overrightarrow{GM}$ (car la somme des vecteurs soulignés est $\vec{0}$).
   Or, nous savons que les médianes d'un triangle se coupent au tiers de leur longueur. Nous avons donc $\overrightarrow{GM} = \dfrac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AM}$ ce qui implique aussi $\overrightarrow{GM} = \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AG}$.
   Comme nous avions trouvé au début que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2 \cdot \overrightarrow{GM}$, nous obtenons $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AG}$, et ensuite la thèse.

Géométrie dans l'espace

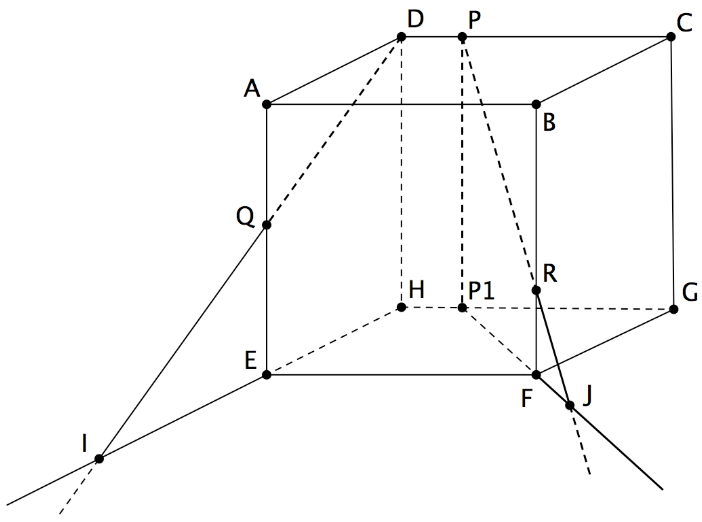
1. a) CG, BF, EF, sont des exemples de droites gauches avec PA .

   b) $CF \mathbin{//} DE$ (car $CFED$ est un rectangle) ; comme DE est incluse dans DBE , il en résulte que $CF \mathbin{//} DBE$.

   c) Nous savons déjà que $CF \mathbin{//} DBE$. Nous avons aussi $HF \mathbin{//} DBE$ (en effet, $HF \mathbin{//} DB$ et DB est incluse dans DBE).
   Nous avons donc trouvé deux droites CF et HF sécantes en F , parallèles à DBE , et contenues dans CHF . Nous en déduisons que $CHF \mathbin{//} DBE$.

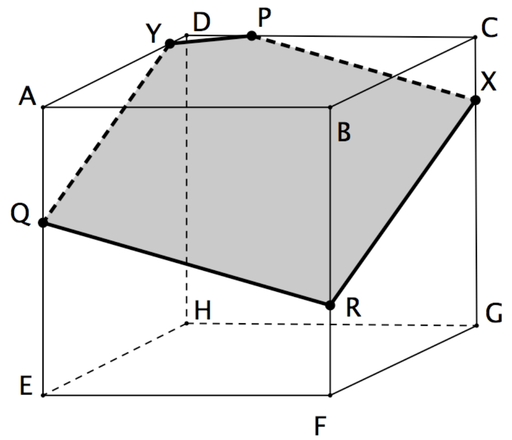
   d) Il s'agit du point I , intersection des droites DQ et HE (voir figure p.3 et justifier).

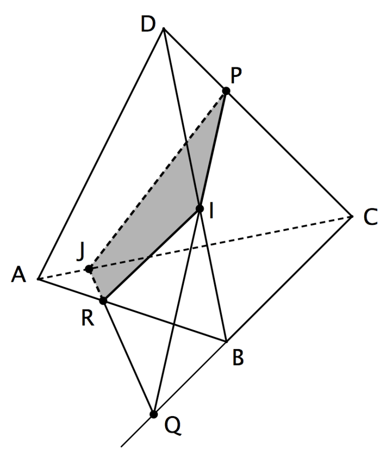
   e) Soit P_1 la projection orthogonale de P sur HG . Considérons le plan auxiliaire $PBFP_1$. Ce plan contient bien la droite PR , et coupe le plan $EFGH$ suivant la droite P_1F . Le point de percée de PR dans $EFGH$ est donc le point d'intersection des droites PR et P_1F (le point J sur la figure de la page 3).



f) Voici une démarche possible pour construire la section du cube par le plan PQR (voir figure de gauche ci-dessous).

- Q et R sont dans le plan $ABFE$ (on obtient la trace $[QR]$) ;
- la parallèle à QR comprenant P coupe CG en X (on obtient la trace $[PX]$) ;
- X et R sont dans le plan $BCGF$ (on obtient la trace $[XR]$) ;
- la parallèle à XR comprenant Q coupe AD en Y (on obtient la trace $[QY]$) ;
- Y et P sont dans le plan $ABCD$ (on obtient la trace $[YP]$) ;
- la section est le pentagone $PXRQY$.





2. Voici une démarche possible pour construire la section du tétraèdre par le plan PQR (voir figure de droite ci-dessus).

- P et Q sont dans le plan BCD et la droite PQ coupe l'arête $[BD]$ en I (on obtient la trace $[PI]$) ;
- I et R sont dans le plan ABD (on obtient la trace $[IR]$) ;
- Q et R sont dans le plan ABC et la droite QR coupe l'arête $[AC]$ en J (on obtient la trace $[RJ]$) ;
- J et P sont dans le plan ACD (on obtient la trace $[JP]$) ;
- la section est le quadrilatère $PIRJ$.

3. Dans le triangle ABF, le segment $[MP]$ joint les milieux de deux côtés. Nous en déduisons, par le « théorème des milieux » (ou « petit théorème de THALÈS »), que MP est parallèle à AF. Comme AF est incluse dans le plan ACF, la droite MP est aussi parallèle à ACF. Par un raisonnement analogue dans le triangle BCF, nous trouvons que NP est parallèle à CF. Comme CF est incluse dans le plan ACF, la droite NP est aussi parallèle à ACF. Nous avons donc trouvé deux droites sécantes MP et NP, contenues dans MNP et parallèles à ACF. Le plan MNP est donc aussi parallèle au plan ACF.

Algèbre

1. Condition d'existence : $x \neq -3$. Solution : $S = \left\{\frac{1}{2}, 5\right\}$.

---

2. a) $S = [-7,3[\cup [7,+\infty[$, c'est-à-dire : $-7 \leq x < 3$ ou $x \geq 7$.

   b) $S =]-8,1[\setminus \{-1\}$, c'est-à-dire : $-8 < x < 1$ et $x \neq -1$.

   c) $S =]-\infty,3[$, c'est-à-dire : $x < 3$.

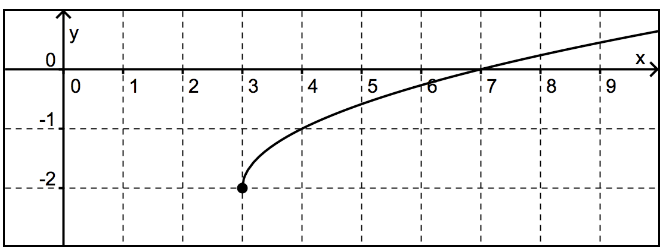
   d) $S = \left[\frac{1}{4},+\infty\right[\setminus \{5\}$, c'est-à-dire : $x \geq \frac{1}{4}$ et $x \neq 5$.

---

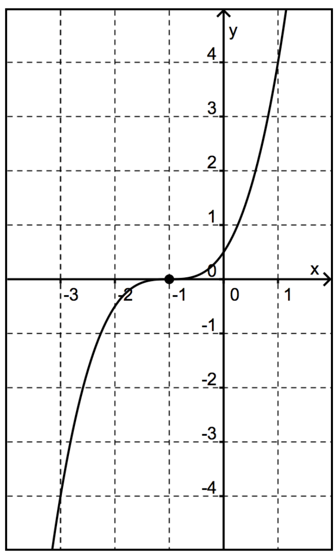
3. L'aire de la croix doit donc être égale à la moitié de l'aire totale du drapeau, c'est-à-dire 6 mètres carrés. On obtient l'équation : $4x + (3-x) \cdot x = 6$. Cette équation est équivalente à $-x^2 + 7x - 6 = 0$ et a pour solutions $x = 1$ et $x = 6$. Seule la première solution est acceptable.

Fonctions de référence

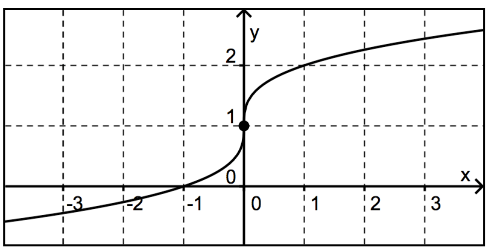
1. a)



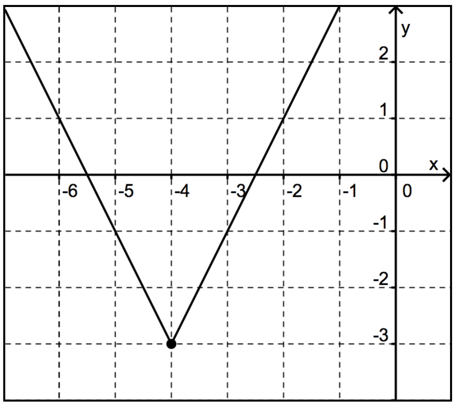
b)



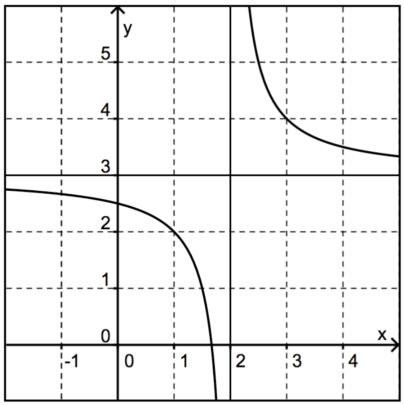
c)



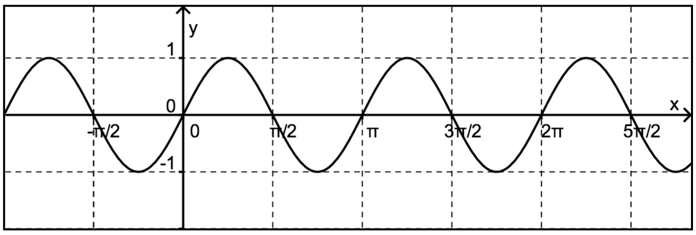
d)



e)



f)

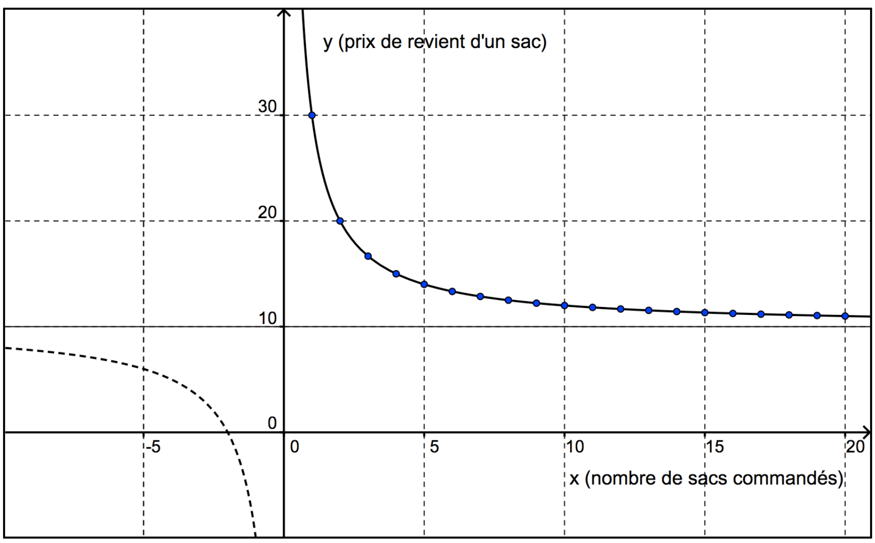


---

2. Soit x le nombre de sacs commandés. Il en coûtera au client $10x + 20$ euros.
   Le prix de revient d'un sac s'obtient en divisant ce coût total par le nombre de sacs :

$$P(x) = \frac{10x + 20}{x} = 10 + \frac{20}{x} \ .$$

   Le graphique de P peut s'obtenir par transformations de celui de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$.



<u>Commentaires</u> : cette fonction n'a de sens que pour les valeurs positives et entières de x (puisqu'il s'agit d'un nombre de sacs). Nous pourrions donc nous contenter de placer des points comme ci-dessus, sans tracer l'hyperbole. Notons que la fonction est décroissante : c'est normal car plus on achète de sacs, plus le prix de revient par sac diminue. Par exemple, si nous achetons 5 sacs, cela nous coûte 70 euros, soit un prix de revient de 14 euros par sac. Si nous en achetons 10 , la facture se monte à 120 euros, soit 12 euros par sac.

Tâches d'intégration

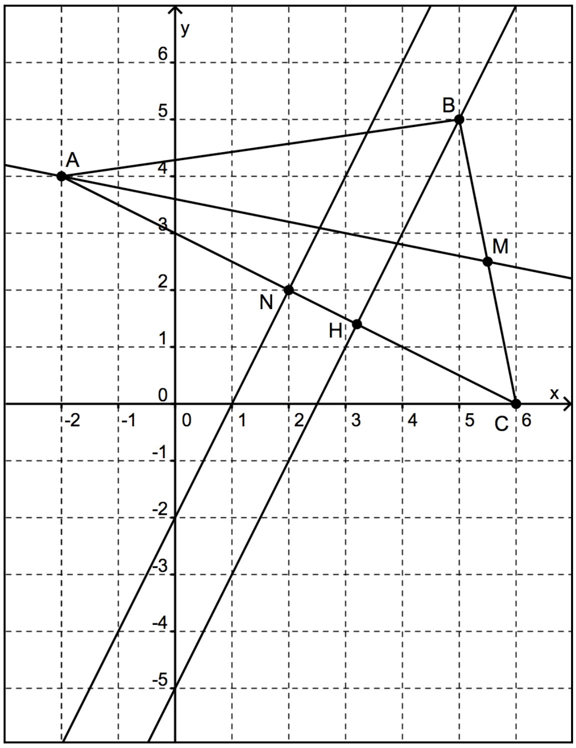
1. Vérifie les réponses ci-dessous sur le graphique ci-contre.

   a) La médiane AM, avec $M\left(\frac{11}{2},\frac{5}{2}\right)$, a pour équation $\boxed{y=-\frac{1}{5}x+\frac{18}{5}}$.

   b) La médiatrice est la droite m perpendiculaire à AC et comprenant le milieu $N(2,2)$ de $[AC]$.
   Après avoir calculé la pente de AC (qui vaut $-\frac{1}{2}$), nous trouvons :

   $$\boxed{m\equiv y=2x-2}.$$

   c) La hauteur BH, étant perpendiculaire à AC, a donc la même pente que m. En utilisant le fait que la hauteur comprend le point B, nous trouvons $\boxed{BH\equiv y=2x-5}$.



   d) Cela revient à calculer la distance $|BH|$. Pour trouver H, nous résolvons le système formé par les équations de BH et de AC (celle-ci est $y=-\frac{1}{2}x+3$), et nous trouvons $H\left(\frac{16}{5},\frac{7}{5}\right)$. Finalement : $d(B,AC)=|BH|=\sqrt{\frac{81}{5}}=\frac{9}{\sqrt{5}}\approx 4{,}0249$.

---

2. En supposant que le minimum de la parabole se trouve au point $(3,1)$, nous pouvons déjà écrire que

   $$y=a\cdot(x-3)^2+1.$$

   En utilisant le point $(0,3)$ par exemple, nous pouvons calculer la valeur de a. Nous obtenons alors :

   $$\boxed{y=\frac{2}{9}\cdot(x-3)^2+1}.$$

   En traçant le graphique de cette fonction, nous constatons qu'elle s'ajuste assez bien au nuage des points expérimentaux.