5 A - B - D	Octobre 2012

MATHÉMATIQUE (6h)

Corrigé du test n°2 : généralités sur les fonctions

1. Sommet de la parabole : $S(4,2)$. On a donc : $f(x) = a \cdot (x-4)^2 + 2$. Comme le point $P(-2,-1)$ appartient au graphique, on a : $-1 = a \cdot (-2-4)^2 + 2 \rightarrow -1 = 36a + 2 \rightarrow a = -\frac{1}{12}$.
   Finalement : $f(x) = -\frac{1}{12} \cdot (x-4)^2 + 2$.

---

2. ① $f(x) = -\frac{1}{x+2} - 1$ (fonction de référence : $y = \frac{1}{x}$; multiplication des ordonnées par (-1) ; translations de 2 vers la gauche et de 1 vers le bas).

   ② $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x-1} - 4$ (fonction de référence : $y = \sqrt{x}$; multiplication des ordonnées par 3 ; translations de 1 vers la droite et de 4 vers le bas).

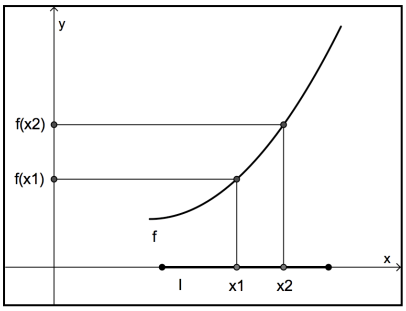
   ③ $f(x) = -4 \cdot |x-3| + 2$ (fonction de référence : $y = |x|$; multiplication des ordonn. par (-4) ; translations de 3 vers la droite et de 2 vers le haut).

---

3. Définitions.

   a) Une fonction f est strictement croissante dans un intervalle I si et seulement si quels que soient les réels x_1 et x_2 dans I, si $x_2 > x_1$, alors $f(x_2) > f(x_1)$.

   Voir schéma ci-contre.



   b) Une fonction f est paire $\Leftrightarrow \forall\, x \in \text{dom} f : f(-x) = f(x)$. Dans un repère orthogonal, le graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

   c) Une racine d'une fonction réelle f est un réel dont l'image par f vaut 0 . D'un point de vue graphique, une racine de f est l'abscisse d'un point d'intersection du graphique de f avec l'axe des abscisses.

---

4. Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 - 18x$.

   a) $f(-x) = 2(-x)^3 - 18(-x) = -2x^3 + 18x = -f(x)$; la fonction est donc impaire.

   b) $f(x) = 2x^3 - 18x = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \vee (x = -3) \vee (x = 3)$; les racines de f sont -3 , 0 et 3 .

   c) $f(-2) = 2(-2)^3 - 18 \cdot (-2) = -16 + 36 = 20$; le point $(-2,20)$ appartient au graphique de f.

---

5. $\text{dom} f = [-1,1] \cup]2,+\infty[$. Les abscisses x des points du graphique sont telles que $-1 \le x \le 1$ ou $x > 2$.

6. Déterminez le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes.

   a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{x-2}$; CE : $4-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 4$ et $x\neq 2$; dom$f=$ $\left]-\infty,4\right]\setminus\{2\}$.

   b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{x-7}}$; CE : $\dfrac{x-3}{x-7}\geq 0$ (voir tableau) ; dom$f=$ $\left]-\infty,3\right]\cup\left]7,+\infty\right[$.

x		*3*		*7*	
x - 3	-	*0*	+	+	+
x - 7	-	-	-	*0*	+
(x - 3) / (x - 7)	+	*0*	-	*X*	+

   c) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-7x+10}$; CE : $x^2-7x+10\neq 0 \Leftrightarrow (x\neq 2)\wedge(x\neq 5)$; $R\setminus\{2,5\}$

---

7. On donne la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3x+b}{ax-2}$.

   a) Si l'ordonnée à l'origine vaut 5 , on a : $f(0)=\dfrac{b}{-2}=5 \rightarrow b=-10$.

   b) Si f n'est pas définie en $x=4$, c'est que son dénominateur s'annule pour en 4 :

   $a\cdot 4-2=0 \rightarrow 4a=2 \rightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

   La fonction était : $f(x)=\dfrac{3x-10}{\frac{1}{2}x-2}$

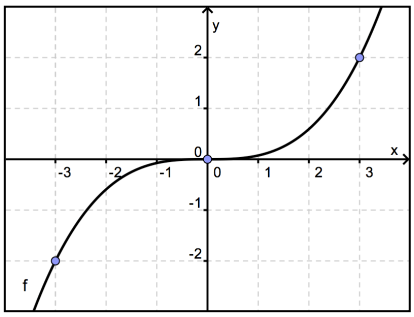
---

8. Pour que le domaine soit $\left[5,+\infty\right[\setminus\{10\}$, il faut comme conditions d'existence $x\geq 5$ (penser à $\sqrt{x-5}$) et $x\neq 10$ (penser à un dénominateur qui s'annule seulement pour $x=10$).

   Voici une fonction qui répond à ces conditions : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-5}}{x-10}$.

---

9. Il faut dessiner une fonction symétrique par rapport à l'origine des axes, et comprenant les points $(3,2)$ et $(-3,-2)$.



---

10. On a : $f(x)=\dfrac{2x+5}{x-1}=\dfrac{2\cdot(x-1)+7}{x-1}=2+\dfrac{7}{x-1}$.

    Pour obtenir le graphique de f, il faut multiplier par 7 les ordonnées de la fonction $y=1/x$, puis translater de 1 unité vers la droite et de 2 unités vers le haut.

---

11. Si $f(x)=7x+1$ et $g(x)=2x^2$, alors $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f(2x^2)=7\cdot(2x^2)+1=14x^2+1$.
