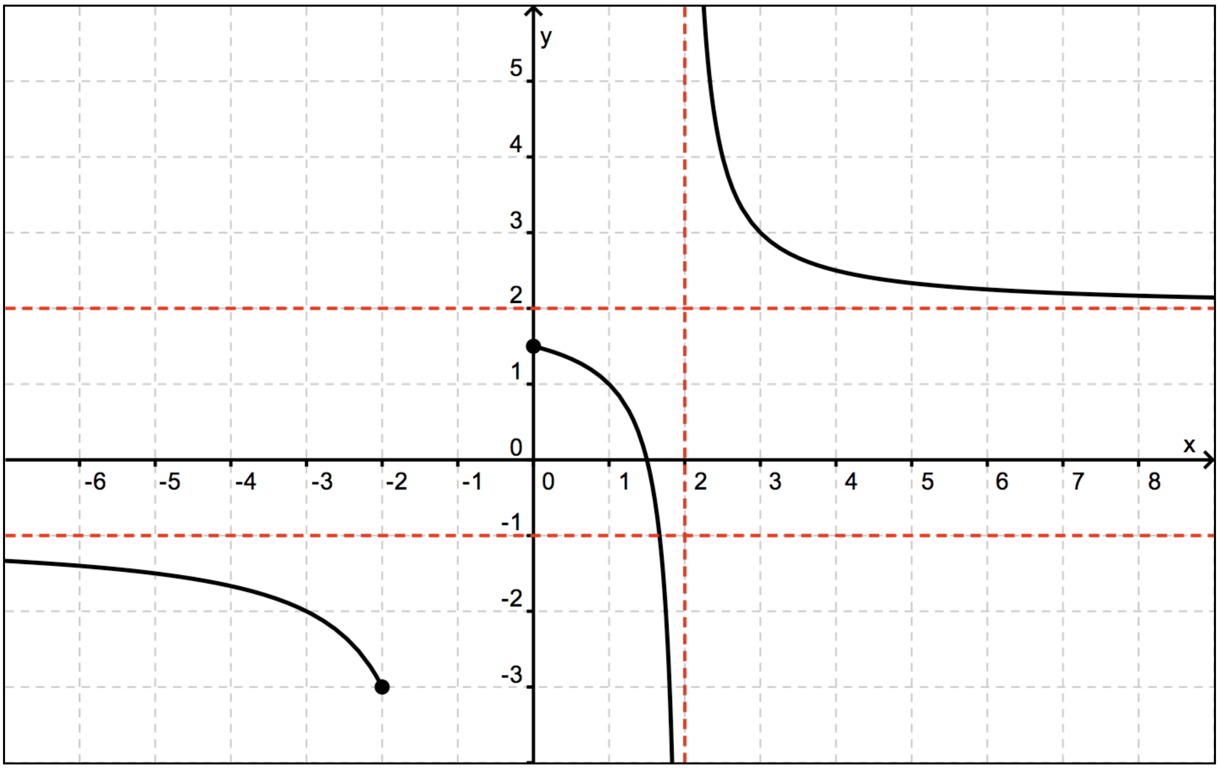
5 B - C - D	MATHÉMATIQUE (6h)	Juin 2014

Préparation au contrôle de synthèse n°2

LIMITES DE FONCTIONS ET ASYMPTOTES, DÉRIVÉES, COMPLÉMENTS DE TRIGONOMÉTRIE, CALCUL MATRICIEL, DÉTERMINANTS, SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

LIMITES DE FONCTIONS ET ASYMPTOTES

1. Voici le graphique d'une fonction f . À l'aide de ce graphique, déterminez les limites demandées et précisez les équations des asymptotes éventuelles.



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	c) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x)$	e) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$	g) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x)$
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	d) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x)$	f) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$	h) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x)$

2. Calculez les limites suivantes et interprétez graphiquement les résultats.
Détaillez vos calculs et justifiez vos interprétations.

a) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x+10}-3}{x^2-x-2}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-8x^2}{2x^2+5x+1}$

f) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x^2-8x+7}{(x-7)^2}$

3. Déterminez les équations des asymptotes au graphique de la fonction $f(x)=\dfrac{x^3}{2x^2-x}$.

4. Le graphique de la fonction $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ possède deux asymptotes obliques.
Déterminez-en les équations.

DÉRIVÉES

1. En partant de la définition, c'est-à-dire en calculant une limite, calculez le nombre dérivé de :

a) $f(x)=x^2+6x-4$ en $a=-1$;

b) $f(x)=\sqrt{x+4}$ en $a=5$;

c) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ en $a=1$.

2. Calculez la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x)=\dfrac{7x-1}{1-4x}$

b) $f(x)=\sqrt{8x^2+3x}$

c) $f(x)=(2x+1)^3\cdot(5-2x)$

d) $f(x)=(6x+1)^4$

e) $f(x)=15\cdot\sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$

f) $f(x)=-2\cdot\cos^2\left(\dfrac{3x}{4}\right)$

3. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez l'équation cartésienne de la tangente au point d'abscisse a donnée.

a) $f(x)=\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{4}$ avec $a=2$;

b) $f(x)=2\sqrt{x+3}$ avec $a=1$;

c) $f(x)=\dfrac{2}{4x-1}$ avec $a=¾$.

4. Soit la fonction $f(x)=\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{x^3}{6}-x^2+x+1$.

Étudiez ses variations ainsi que les concavités de son graphique.
Déterminez les coordonnées exactes des extrema et points d'inflexion éventuels.

5. Soit la fonction $f(x)=2\sin x+\cos 2x$.

Est-il vrai que cette fonction est strictement croissante dans l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$?

Et dans l'intervalle $\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$?

COMPLÉMENTS DE TRIGONOMÉTRIE

1. Soit un réel $a \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ tel que $\sin a = \frac{3}{5}$, et un réel $b \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ tel que $\cos b = \frac{4}{5}$.

   Calculez :

   a) $\sin 2a$

   b) $\tan 2a$

   c) $\cos 3a$

   d) $\cos 2b$

   e) $\sin(a-b)$

   f) $\tan(2b-a)$

---

2. Démontrez les égalités suivantes.

   a) $(\cos a + \sin a)^2 = 1 + \sin 2a$

   b) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\sqrt{2} \cdot \sin x$

   c) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

   d) $\cos 2a + \sin 2a = \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2a\right)$

---

3. Résolvez les équations suivantes et représentez les solutions sur le cercle trigonométrique.

   a) $\sqrt{2} \cdot \sin x - 1 = 0$

   b) $2 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$

   c) $3 \cdot \tan 2x - 4 = 0$

   d) $3 \cdot \cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x = \sqrt{3}$ (équation du type $a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c$)

   e) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

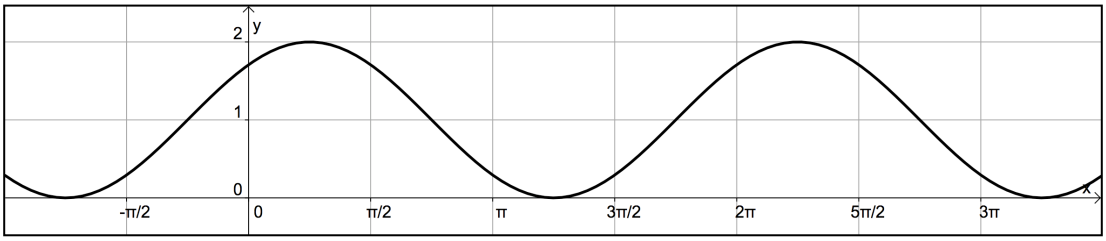
---

4. Soit la fonction $f(x) = 4 \cdot \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] - 3$.

   a) Représentez un cycle de f après avoir déterminé ses valeurs moyenne, maximale et minimale, son amplitude et sa période.
   Précisez dans quelle fenêtre vous allez représenter ce cycle.

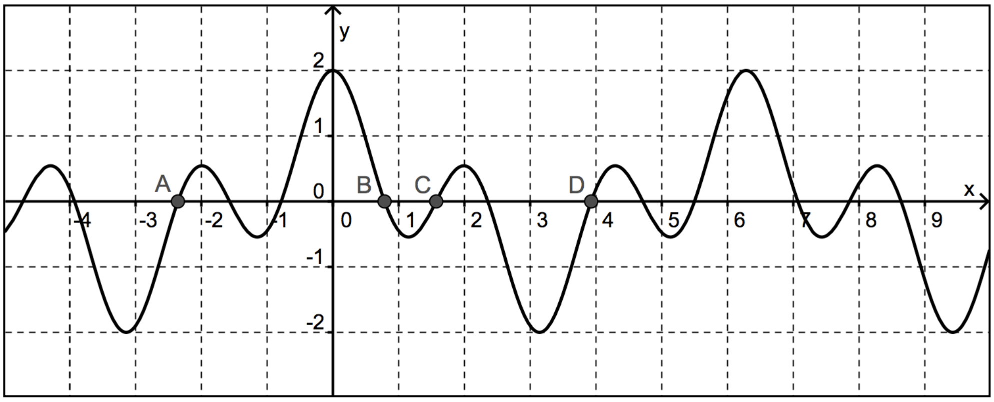
   b) Pour le cycle représenté, calculez l'abscisse du maximum et celle du minimum.

5. Déterminez l'expression analytique de la fonction représentée ci-dessous, sachant qu'elle est de la forme $f(x) = a \cdot \sin\left[b \cdot (x + c)\right] + d$.



---

6. Voici le graphique de la fonction $f(x) = \cos 3x + \cos x$.



   a) Calculez les racines de cette fonction.

   b) À partir des solutions trouvées en (a) , déterminez les abscisses exactes des points A , B , C et D marqués sur l'axe x . Expliquez.

CALCUL MATRICIEL, DÉTERMINANTS, SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

1. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \end{pmatrix}$.

   Calculez : a) $A^2 + B \cdot C$; b) $C \cdot B$; c) A^{-1}

---

2. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Après avoir calculé le déterminant de M à l'aide de la méthode des cofacteurs, déterminez la matrice inverse de M .

---

3. Résolvez le système suivant, d'inconnues x , y et z , par la méthode de GAUSS (l'écriture matricielle simplifiée suffit).

$$\begin{cases} x + 3y - z = 20 \\ 2x - y + z = 42 \\ x + y + 2z = 27 \end{cases}.$$