Vecteurs de l'espace et produit scalaire : solutions

1. a) Le point inconnu D a pour coordonnées $(24, y_D, z_D)$. Pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient parallèles, il faut que $\overrightarrow{CD} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, où k est un nombre réel.

   Il faut donc que $\begin{pmatrix} 21 \\ y_D - 5 \\ z_D \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, et donc que $k = 7$.

   Il suit $y_D - 5 = 7.0 \rightarrow y_D = 5$ et $z_D = 7.(-1) \rightarrow z_D = -7$. <u>Conclusion</u> : $D(24,5,-7)$.

   b) Calculons d'abord le cosinus de l'angle :

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{86}} = \frac{12}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{86}} \approx 0{,}4092 . \text{ Ensuite, } \theta \approx 68{,}85° .$$

2. a) Il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont parallèles.

   C'est bien le cas, car $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

   b) Il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont perpendiculaires.

   C'est bien le cas, car $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 8 \\ -20 \end{pmatrix} = 15 \times 8 + 6 \times (-20) = 0$.

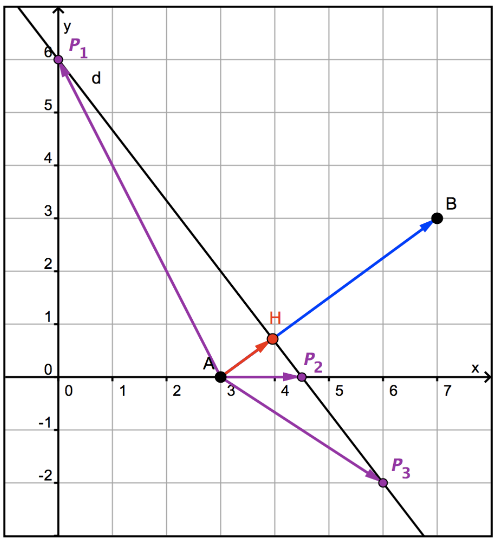
   c) L'aire du triangle est égale à :

$$\frac{1}{2} \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{CH}\right\| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{225 + 36} \cdot \sqrt{64 + 400} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{261} \cdot \sqrt{464} = 174(ua) .$$

3. Représentons la droite $d \equiv 4x + 3y - 18 = 0$, en calculant deux points : si $x = 0$, alors $y = 6$ (P_1) ; si $y = 0$, alors $x = 9/2$ (P_2).

   Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AP}$ pour différents points P de d :

   - pour $P_1(0,6)$: $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 6$;
   - pour $P_2\left(\frac{9}{2},0\right)$: $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} = 6$;
   - pour $P_3(6,-2)$: $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 6$ …



   Explications : $d \perp [AB]$ car $m_{AB} = \frac{3}{4}$ et $m_d = -\frac{4}{3}$.

   Dès lors, tout point P de d aura la même projection orthogonale H sur $[AB]$, et $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AP}$ sera toujours égal à $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AH}$. Comme nous avons calculé ce produit scalaire dans des cas particuliers, nous savons que sa valeur constante est égale à 6.

4. Il faut que $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \bullet \vec{v}\begin{pmatrix} m-1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} = 0$,

c'est-à-dire $m(m-1)+3\cdot 0+6m=0 \Leftrightarrow m^2+5m=0 \Leftrightarrow (m=0)\vee(m=-5)$.

5. Utilisons la première définition du produit scalaire : $\vec{u}\bullet\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta$.

Nous obtenons : $33=\sqrt{100+5+16}\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos 60° \Leftrightarrow 33=11\cdot\|\vec{v}\|\cdot\frac{1}{2}$ et donc $\|\vec{v}\|=6$.

Trigonométrie : solutions

1. D'abord : $\sin a=\sqrt{1-\cos^2 a}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$ ($\sin a>0$ car $\frac{\pi}{2}<a<\pi$).

a) $\sin(2a)=2\cdot\sin a\cdot\cos a=2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{-1}{4}=-\frac{\sqrt{15}}{8}$;

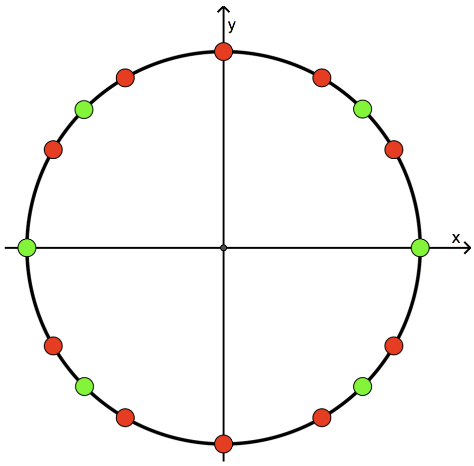
b) $\tan(2a)=\frac{\sin(2a)}{\cos(2a)}=\frac{\sin(2a)}{2\cos^2 a-1}=\frac{-\sqrt{15}/8}{-7/8}=\frac{\sqrt{15}}{7}$.

2. Nous pouvons utiliser la formule de Simpson relative à la somme de deux tangentes :

$$\tan(3x)+\tan(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\sin(4x)}{\cos(3x)\cdot\cos(x)}=0 \Leftrightarrow (\sin(4x)=0)\wedge(\cos(3x)\cdot\cos(x)\neq 0) .$$

L'équation $\sin(4x)=0$ donne les solutions $4x=k\pi \Leftrightarrow x=k\cdot\frac{\pi}{4}$ ($k\in\mathbf{Z}$).
Mais attention : la condition $\cos(x)\neq 0$ élimine les solutions $x=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$ et la condition $\cos(3x)\neq 0$ élimine les solutions $x=\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{\pi}{3}$ (points rouges).

Finalement, il reste les solutions figurées par les points en vert ci-contre.



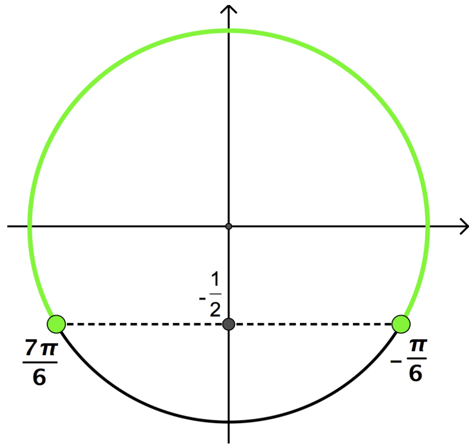
<u>Autre méthode</u> : $\tan(3x)+\tan(x)=0 \Leftrightarrow \tan(3x)=-\tan(x) \Leftrightarrow \tan(3x)=\tan(-x)$ (en effet, revoyez les angles associés : $-\tan(x)=\tan(-x)$).
Et lorsque les tangentes de deux réels sont égales, ceux-si sont « égaux à $k\,.\,\pi$ près ».

Donc : $3x=-x+k\pi \Leftrightarrow 4x=k\pi$ et $x=k\cdot\frac{\pi}{4}$, sous les mêmes conditions que ci-dessus.

3. L'inéquation est équivalente à $\sin x \geq -\frac{1}{2}$.

L'arc de cercle représenté en vert correspond aux réels dont le sinus est supérieur ou égal à -½ .
Un premier intervalle de solutions de l'inéquation est donc $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$. En ajoutant 2π, un autre intervalle de solutions est $\left[\frac{11\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}\right]$.

Et ainsi de suite …



L'ensemble des solutions de l'inéquation est la réunion d'une infinité d'intervalles de ce type : $S = \ldots \cup \left[-\frac{13\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{23\pi}{6}, \frac{31\pi}{6}\right] \cup \ldots$.

Sous une forme plus « compacte » : $S = \bigcup_{k \in Z} \left[-\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right]$.

4. Nous savons que $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$, donc $\sin(a) = 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{2}\right)$.

Nous savons aussi que $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$, donc $\cos(a) = 2\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - 1$.

En tenant compte de ces deux résultats : $\frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{1 + 2\cos^2\frac{a}{2} - 1} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \tan\frac{a}{2}$.

5. $\sin 3x + \sin 4x - 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{-x}{2} - 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0$ (« Simpson »)

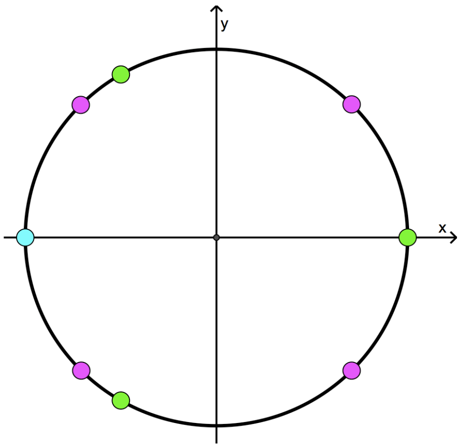
$\Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{7x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) = 0$ (mise en évidence)

$\Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{3x}{2}\cos 2x\right) = 0$ (encore « Simpson »)

$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = 0$ ou $\sin\frac{3x}{2} = 0$ ou $\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $\frac{3x}{2} = k\pi$ ou $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$ ou $x = \frac{k2\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$



Les solutions sont représentées ci-contre, avec une couleur par « famille de solutions » (respectivement, bleu, rose et vert).