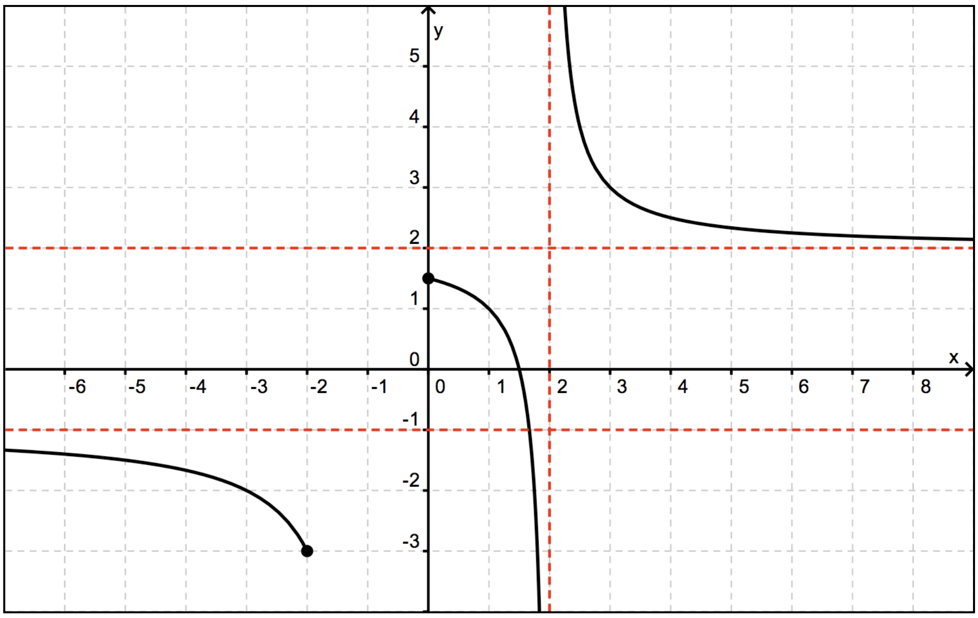
Préparation du contrôle de synthèse n°2 : exercices variés

Limites de fonctions et asymptotes

1. Voici le graphique d'une fonction f. À l'aide de ce graphique, déterminez les limites demandées et précisez les équations des asymptotes éventuelles.



a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ <}} f(x)$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ >}} f(x)$

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$

f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$

g) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)$

h) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)$

---

2. Calculez les limites suivantes et interprétez graphiquement les résultats.
Détaillez vos calculs et justifiez vos interprétations.

a) $\lim\limits_{x\to-4} \dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x}$

b) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{\sqrt{x+10}-3}{x^2-x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-8x^2}{2x^2+5x+1}$

f) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x^2-8x+7}{(x-7)^2}$

---

3. Déterminez les équations des asymptotes au graphique de la fonction $f(x)=\dfrac{x^3}{2x^2-x}$.

---

4. Le graphique de la fonction $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ possède deux asymptotes obliques.
Déterminez-en les équations.

Dérivées

1. En partant de la définition, c'est-à-dire en calculant une limite, calculez le nombre dérivé de :

   a) $f(x) = x^2 + 6x - 4$ en $a = -1$;

   b) $f(x) = \sqrt{x+4}$ en $a = 5$;

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ en $a = 1$.

---

2. Calculez la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

   a) $f(x) = \dfrac{7x-1}{1-4x}$

   b) $f(x) = \sqrt{8x^2 + 3x}$

   c) $f(x) = (2x+1)^3 \cdot (5-2x)$

   d) $f(x) = (6x+1)^4$

   e) $f(x) = 15 \cdot \sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$

   f) $f(x) = -2 \cdot \cos^2\left(\dfrac{3x}{4}\right)$

---

3. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez l'équation cartésienne de la tangente au point d'abscisse a donnée.

   a) $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{4}$ avec $a = 2$;

   b) $f(x) = 2\sqrt{x+3}$ avec $a = 1$;

   c) $f(x) = \dfrac{2}{4x-1}$ avec $a = ¾$.

---

4. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^3}{6} - x^2 + x + 1$.

   Étudiez ses variations ainsi que les concavités de son graphique.
   Déterminez les coordonnées exactes des extrema et points d'inflexion éventuels.

---

5. Soit la fonction $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$.
   Est-il vrai que cette fonction est strictement croissante dans l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$?

   Et dans l'intervalle $\left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$?

Géométrie analytique de l'espace

1. Soient les points $A(5,-1,0)$, $B(0,1,1)$ et $C(3,-1,5)$.

   a) Par la méhode du déterminant, donnez une équation cartésienne du plan ABC.

   b) Donnez des équations vectorielle, paramétriques et cartésiennes (sous deux formes) de la droite AB.

---

2. La droite $d \equiv x-1=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ est contenue dans le plan $\pi \equiv 2x+y-z-3=0$.
   Vrai ou faux ? Justifiez.

---

3. Démontrez que le plan comprenant les points $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ et $C(0,0,c)$ a pour équation cartésienne $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

---

4. Déterminez deux plans contenant la droite $d \equiv \dfrac{x}{5}=y-3=2z+1$. Expliquez.

---

5. Voici les équations paramétriques d'un plan : $\pi \equiv \begin{cases} x=\lambda+2\mu+2 & (1) \\ y=5\lambda+\mu & (2) \\ z=\lambda+1 & (3) \end{cases}$.

   a) Déterminez deux vecteurs directeurs de ce plan.

   b) Déterminez le point d'intersection de π avec l'axe des abscisses.

   c) Déterminez un vecteur normal à π.

   d) Déterminez des équations cartésiennes de la droite d comprenant le point $P(2,0,16)$ et perpendiculaire à π.

---

6. Déterminez la distance du point $Q(2,-7,0)$ au plan $\alpha \equiv x-2y+z-6=0$.

---

7. Les droites $a \equiv 2x-3=\dfrac{y}{2}=\dfrac{3z+1}{6}$ et $b \equiv \dfrac{x}{4}=y+5=-\dfrac{z}{2}$ sont orthogonales.
   Vrai ou faux ? Justifiez.

---

8. Soit la sphère $S \equiv x^2-8x+y^2+2y+z^2+8=0$.

   a) Déterminez les coordonnées de son centre ainsi que son rayon.

   b) Caractérisez l'intersection de S avec le plan xOy, déterminé par les axes Ox et Oy.

   c) Qu'en est-il de l'intersection de S avec le plan yOz ? Expliquez.

Calcul matriciel, déterminants, systèmes d'équations linéaires du premier degré

1. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \end{pmatrix}$.

   Calculez : a) $A^2 + B \cdot C$

   b) $C \cdot B$

   c) A^{-1}

---

2. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Après avoir calculé le déterminant de M à l'aide de la méthode des cofacteurs, déterminez la matrice inverse de M.

---

3. Résolvez le système suivant, d'inconnues x, y et z, par la méthode de GAUSS (l'écriture matricielle simplifiée suffit).

$$\begin{cases} x + 3y - z = 20 \\ 2x - y + z = 42 \\ x + y + 2z = 27 \end{cases}.$$

---

4. Résolvez le système suivant, d'inconnues x, y et z. Interprétez géométriquement le résultat en considérant chacune des équations comme une équation cartésienne de plan.

$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x + y + 3z = -3 \end{cases}.$$
