Préparation du contrôle de synthèse n°1
Objectifs et exercices variés

Classes de 5e – Mathématique 6h – A. Vandenbruaene

Trigonométrie

Objectifs

- Démontrer les grandes formules de la trigonométrie (addition, sauf cos(a−b), duplication et Simpson).
- Calculer une amplitude d'angle, une longueur d'arc de cercle et une aire d'un secteur circulaire.
- Apparier des graphiques de transformées de fonctions trigonométriques et des expressions analytiques.
- Trouver l'expression analytique d'une transformée d'une fonction trigonométrique à partir de son graphique.
- Tracer le graphique d'une transformée d'une fonction trigonométrique (après avoir déterminé ses principales caractéristiques : période, amplitude, extrema, etc.)
- Résoudre une équation ou une inéquation trigonométrique (revoir les différents types vus au cours).
- Utiliser les formules pour transformer, simplifier une expression, ou pour vérifier une identité.
- Résoudre un problème dans lequel intervient une fonction trigonométrique.

Exercices

1. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de $4(\text{cm})$ de rayon. Soient A, B, P et Q quatre points de $\mathscr{C}$.

   a) Si l'amplitude de l'angle $A\hat{O}B$ est de 1,5 radians, calculez :

      i. la longueur de l'arc AB ;
      ii. l'aire du secteur circulaire AOB.

   b) Si l'arc de cercle PQ mesure $2(\text{cm})$, calculez l'amplitude de l'angle $P\hat{O}Q$ (en radians et en degrés).

---

2. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de $10(\text{cm})$ de rayon. Sachant que R et S sont deux points de $\mathscr{C}$, et que l'aire du secteur circulaire ROS vaut $200\ (\text{cm}^2)$, calculez :

   a) l'amplitude de l'angle $R\hat{O}S$;

   b) la longueur de l'arc RS.

---

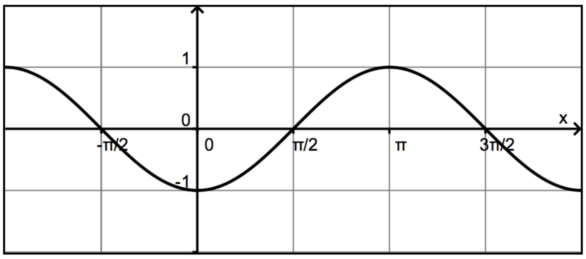
3. Soit la fonction $f(x) = 3\cdot\sin(4x + \frac{\pi}{6}) + 2$.

   a) Représentez un cycle de f après avoir déterminé ses valeurs moyenne, maximale et minimale, son amplitude et sa période.
   Précisez dans quelle fenêtre vous allez représenter ce cycle.

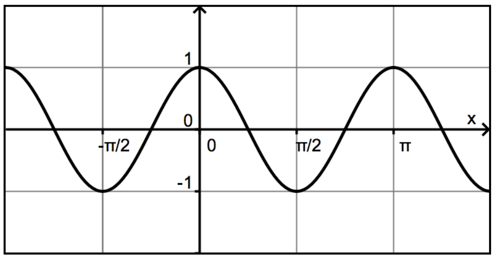
   b) Pour le cycle représenté, calculez l'abscisse du maximum et celle du minimum.

4. Appariez chacun des graphiques suivants à une des expressions analytiques proposées ci-dessous. Justifiez votre choix.

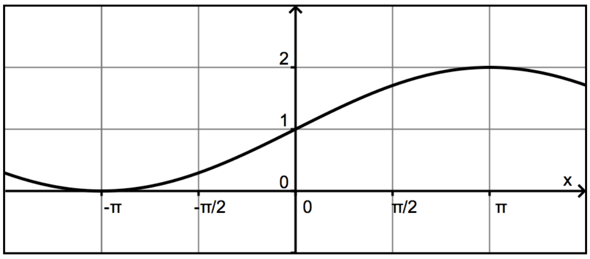
①



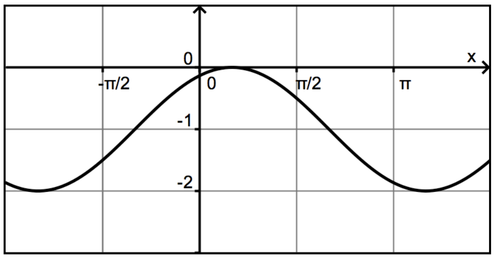
②



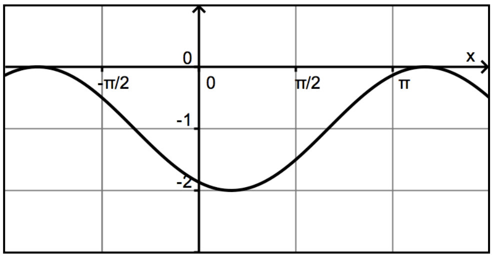
③



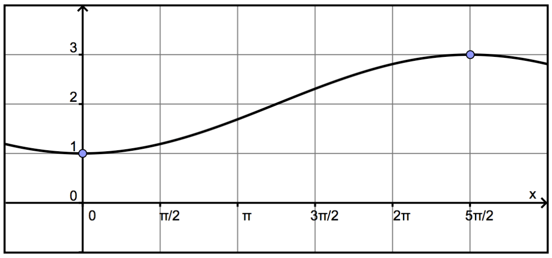
④



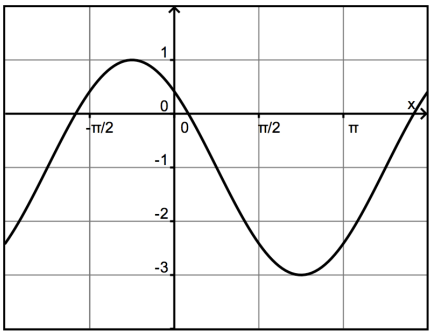
⑤



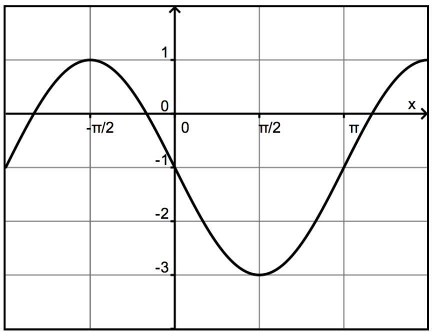
⑥



⑦



⑧



<u>Expressions analytiques proposées</u>

A. $f(x) = 2 - \cos\dfrac{2x}{5}$

B. $f(x) = -2 \cdot \sin x - 1$

C. $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - 1$

D. $f(x) = \sin\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) - 1$

E. $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$

F. $f(x) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

G. $f(x) = 2 \cdot \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1$

H. $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) - 1$

I. $f(x) = 1 + \sin\dfrac{x}{2}$

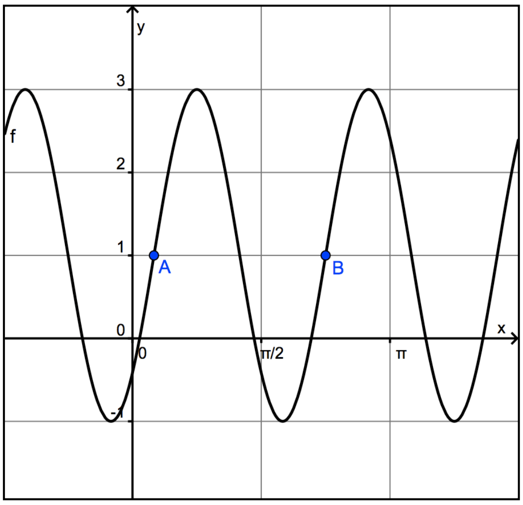
J. $f(x) = 1 - \sin\dfrac{x}{2}$

5. Voici le graphique d'une fonction de type

$$f(x) = a \cdot \sin\left[b \cdot (x + c)\right] + d \; .$$

Déterminez son expression analytique sachant que la fonction effectue un cycle complet entre les points

$$A\left(\frac{\pi}{12}, 1\right) \text{ et } B\left(\frac{3\pi}{4}, 1\right) .$$



---

6. Sachant que $\cos a = -\dfrac{1}{4}$ et que $a \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, calculez $\sin(2a)$ et $\tan(2a)$.

---

7. Sachant que $\cos a = -\dfrac{4}{5}$ et $\cos b = \dfrac{1}{4}$, avec $a \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ et $b \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, calculez :

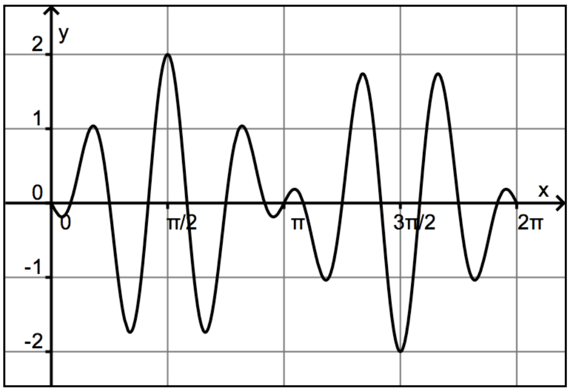
a) $\cos 2a$ b) $\cos(a+b)$ c) $\sin(a-b)$ d) $\tan(a-b)$

---

8. a) Déterminez les racines de la fonction

$$f(x) = \sin 5x - \sin 7x \; .$$

b) Voici la fonction f représentée dans l'intervalle $[\,0\,,2\pi\,]$.
Donnez les abscisses des quinze points d'intersection de G_f et de l'axe des abscisses dans $[\,0\,,2\pi\,]$.



---

9. Résolvez les équations trigonométriques suivantes et représentez les solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $2 \cdot \cos^2 x + \cos x = 0$

b) $4 \cdot \sin^2 x + 3 \cdot \sin x - 1 = 0$

c) $\sqrt{3} \cdot \tan x + 1 = 0$

d) $\cos x - \sqrt{3} \cdot \sin x = \sqrt{3}$ (équation du type $a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c$)

10. Résolvez l'équation $\tan(3x)+\tan x=0$ et représentez les solutions sur le cercle trigonométrique. (UCL)

---

11. Résolvez l'inéquation $2\sin x+1\geq 0$.

---

12. Démontrez que $\dfrac{\sin a}{1+\cos a}=\tan\left(\dfrac{a}{2}\right)$.

---

13. Démontrez que $\dfrac{\sin 6x-\sin 2x}{2\cdot\cos 4x\cdot\left(2\cos^2 x-1\right)}=\tan 2x$.

---

14. Résolvez l'équation $\sin(3x)+\sin(4x)-2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)=0$. (UMons)

Vecteurs de l'espace et produit scalaire

Objectifs

- Associer un point de l'espace à ses coordonnées dans un repère.
- Calculer les composantes et la longueur (norme) de vecteurs de l'espace.
- Savoir construire une combinaison linéaire de vecteurs de l'espace (dans un cube par exemple).
- Savoir calculer un produit scalaire de trois façons.
- Vérifier l'orthogonalité de deux vecteurs.
- Calculer l'angle entre deux vecteurs (avec application au calcul d'un angle dans un polyèdre).
- Démontrer une propriété géométrique à l'aide du calcul vectoriel ou du produit scalaire (alignement, parallélisme, orthogonalité).
- Démontrer le théorème d'Al-Kashi à l'aide du produit scalaire.

Exercices

Nous travaillons toujours dans un repère orthonormé du plan ou de l'espace

1. Soient les points $A(2,7,9)$, $B(5,7,8)$ et $C(3,5,0)$.

   a) Calculez la longueur du vecteur $5\cdot\overrightarrow{AB}-3\cdot\overrightarrow{AC}$.

   b) Déterminez les coordonnées d'un point D d'abscisse 24 pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soit parallèles.

   c) Calculez l'angle aigu entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

---

2. On donne les points $A(0,2)$, $B(15,8)$ et $C(-3,24)$.

   a) Montrez que le point $H(5,4)$ appartient à la droite AB .

   b) Montrez que CH est une hauteur du triangle ABC .

   c) Calculer l'aire du triangle ABC .

3. On donne les points $A(3,0)$ et $B(7,3)$. Soit la droite $d \equiv 4x+3y-18=0$.

   a) Représentez A, B et d.

   b) Montrez que pour tout point P de la droite d, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AP}$ est constant. Pourquoi ? Quelle est sa valeur ?

---

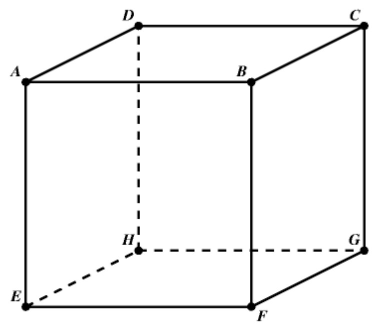
4. Calculez les valeurs du paramètre m pour que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} m-1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

---

5. Dans le cube $ABCDEFGH$, contruisez :

   a) le point R tel que $\overrightarrow{ER} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}$;

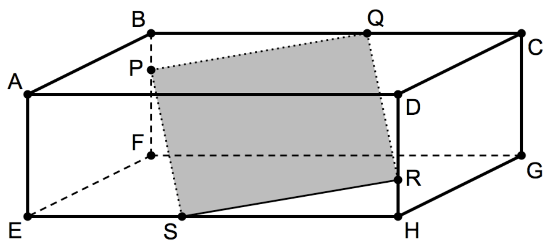
   b) le point S tel que $\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}$.



---

6. Soient un parallélépipède $ABCDEFGH$, et les points $P \in [BF]$, $Q \in [BC]$, $R \in [DH]$ et $S \in [EH]$.

   Sachant que $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{RH}$ et que $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{SH}$, démontrez que $PQRS$ est un parallélogramme.

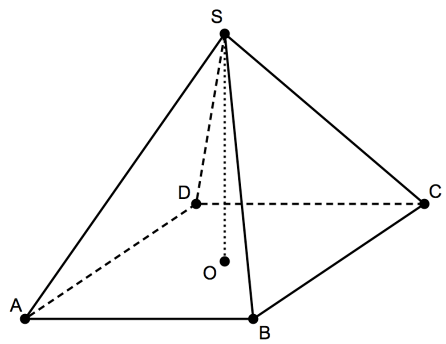


---

7. Voici une pyramide $SABCD$. Le centre de sa base carrée est le point O, origine des axes. Les points B et S ont pour coordonnées respectives $(1,1,0)$ et $(0,0,2)$.

   a) Déterminez l'amplitude de l'angle $A\hat{S}B$, en calculant l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SB}$.

   b) Que vaut le produit scalaire $\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{BS}$?



---

8. On donne le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ -\sqrt{5} \\ 4 \end{pmatrix}$.

   On considère un autre vecteur $\vec{v}$, formant avec $\vec{u}$ un angle de $60°$, et tel que le produit scalaire $\vec{u} \bullet \vec{v}$ égale 33. Déterminez la longueur du vecteur $\vec{v}$.

Géométrie synthétique de l'espace

Objectifs

- Connaître les critères de parallélisme d'une droite et d'un plan, de deux plans.
- Connaître les critères d'orthogonalité d'une droite et d'un plan, de deux plans.
- Dans un polyèdre, démontrer le parallélisme ou l'orthogonalité de droites, de plans, …
- Démontrer une propriété géométrique par une méthode synthétique.
- Démontrer le « théorème du toit ».

Exercices

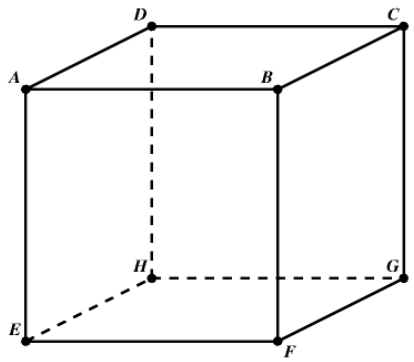
1. Dans le cube $ABCDEFGH$, démontrez que :

   a) la droite DG est parallèle au plan ACF ;

   b) le plan DEG est parallèle au plan ACF ;

   c) la droite BH est perpendiculaire au plan ACF ;

   d) les plans BDH et ACF sont perpendiculaires.

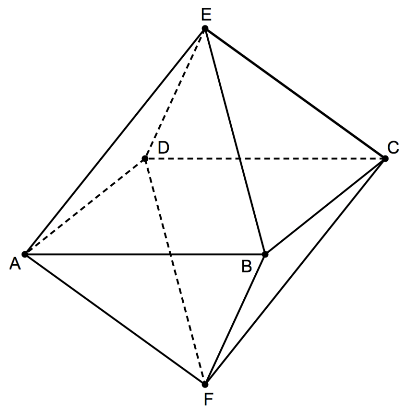


2. Une pyramide $SABCD$ a pour base un quadrilatère plan $ABCD$.
Si les points M, N, P et Q sont les milieux respectifs des segments $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$ et $[SD]$, démontrez que le plan $MNPQ$ est parallèle au plan $ABCD$.

3. Dans un octaèdre régulier $ABCDEF$, démontrez que :

   a) la droite AC est perpendiculaire au plan $DEBF$;

   b) le plan $AECF$ est perpendiculaire au plan $DEBF$.



4. Voici un tétraèdre régulier $ABCD$. Ses quatre faces sont des triangles équilatéraux.
Soit G le centre de gravité de la face ABC.

   Démontrez que la droite DG est perpendiculaire au plan ABC.