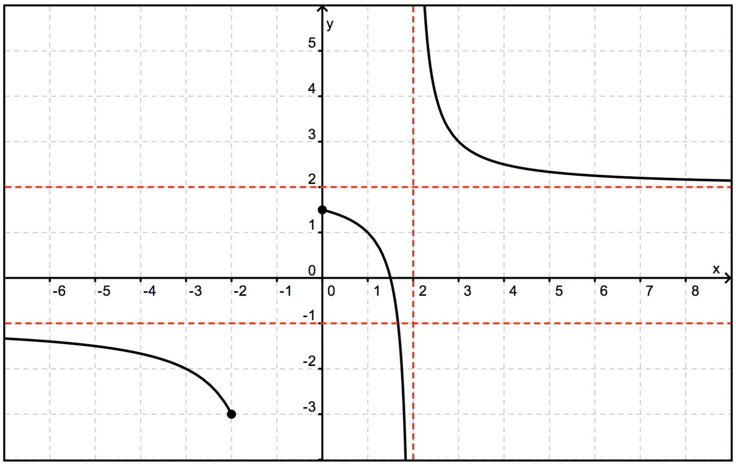
Préparation du contrôle de synthèse n°2 : exercices variés

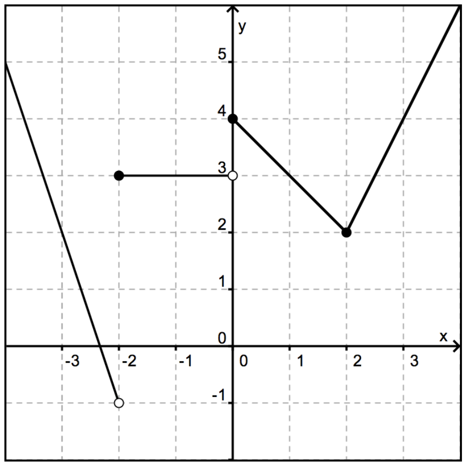
Limites de fonctions et asymptotes

1. Pour chacune des deux fonctions représentées ci-dessous f, déterminez les limites demandées et précisez les équations des asymptotes éventuelles.

①



②

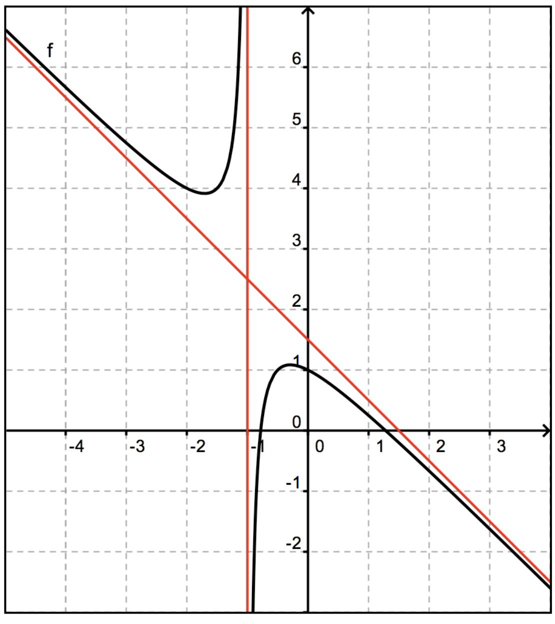


a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	c) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x)$	e) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$	g) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x)$
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	d) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x)$	f) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$	h) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x)$

---

2. La fonction f représentée ci-contre possède une asymptote verticale et une asymptote oblique.

   Pour chacune d'elles, donnez une équation cartésienne et traduisez son statut d'asymptote en termes de limites.



3. Soit la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{(x-4)^2\cdot(3-x)}$.

   a) Déterminez $\operatorname{dom} f$ (le domaine de définition de f).

   b) Expliquez pourquoi le réel 4 est adhérent à $\operatorname{dom} f$, et pourquoi le réel 3,01 ne l'est pas.

   c) Quelle est l'adhérence du domaine de f ?

   d) Les limites suivantes ont-elles un sens ? Si oui, donnez leur valeur. Si non, expliquez pourquoi.

   1°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 2°/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 3°/ $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ 4°/ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

---

4. Calculez les limites suivantes après avoir déterminé le domaine de définition de la fonction. Interprétez graphiquement le résultat. Détaillez vos calculs et justifiez vos interprétations.

a) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x}$

b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+10}-3}{x^2-x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x-1}$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\ >}}\dfrac{1+x}{x^2-9}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-8x^2}{2x^2+5x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-8x+7}{(x-7)^2}$

h) $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}}\dfrac{2x-11}{\sqrt{5-x}}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}}\dfrac{2x-11}{\sqrt{5-x}}$

---

5. Déterminez les équations des asymptotes au graphique de la fonction $f(x)=\dfrac{x^3}{2x^2-x}$.

---

6. Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{15x+1}{\sqrt{100x^2-16}}$.

   Cette fonction possède deux asymptotes verticales et deux asymptotes horizontales. Déterminez leurs équations.

---

7. Soit la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$.

   a) Cette fonction possède deux asymptotes obliques. Déterminez leurs équations.

   b) Déduisez-en une manière d'obtenir rapidement de bonnes approximations de $f(100)$ et de $f(-500)$.

---

8. Soit la fonction f définie par $f(x)=x+1-\sqrt{x^2+1}$. Montrez que cette fonction possède une asymptote <u>horizontale</u> pour $x\to+\infty$.

Dérivées

1. En partant de la définition, c'est-à-dire en calculant une limite, calculez le nombre dérivé de :

   a) $f(x) = x^2 + 6x - 4$ en $a = -1$;

   b) $f(x) = \sqrt{x+4}$ en $a = 5$;

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ en $a = 1$.

---

2. Calculez la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

   a) $f(x) = \dfrac{7x-1}{1-4x}$

   b) $f(x) = \sqrt{8x^2 + 3x}$

   c) $f(x) = (2x+1)^3 \cdot (5-2x)$

   d) $f(x) = (6x+1)^4$

   e) $f(x) = 15 \cdot \sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$

   f) $f(x) = -2 \cdot \cos^2\left(\dfrac{3x}{4}\right)$

---

3. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez l'équation cartésienne de la tangente au point d'abscisse a donnée.

   a) $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{4}$ avec $a = 2$;

   b) $f(x) = 2\sqrt{x+3}$ avec $a = 1$;

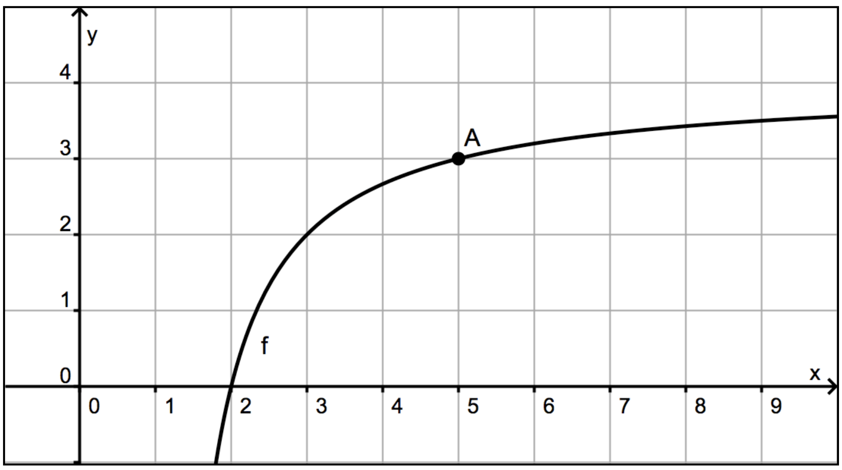
   c) $f(x) = \dfrac{2}{4x-1}$ avec $a = ¾$.

---

4. Soit la fonction f définie par

   $$f(x) = \frac{4}{1-x} + 4 \, .$$

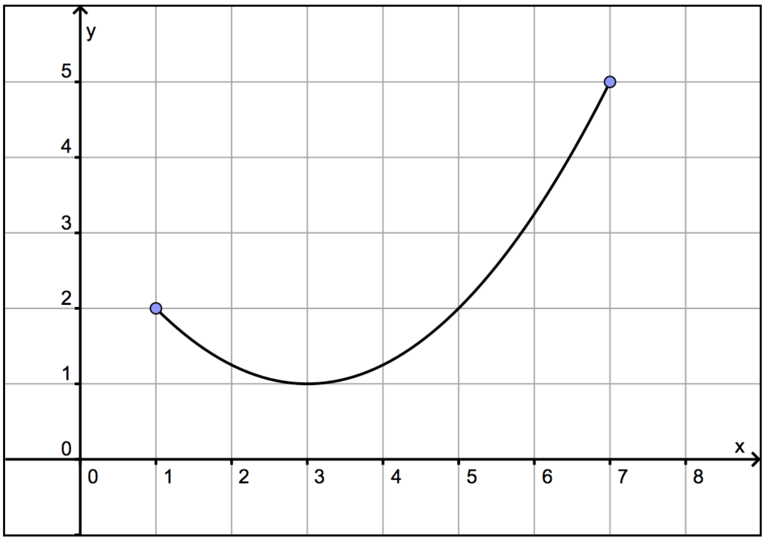
   Déterminez l'équation de la tangente au graphique de f en son point A d'abscisse 5 .
   Vérifiez votre résultat en traçant cette tangente sur le graphique ci-dessous.



5. Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{4}+1$ dans l'intervalle $[1,7]$.

a) Déterminez une abscisse c telle que $f'(c)$ égale le taux de variation moyen de f dans l'intervalle $[1,7]$ (c'est-à-dire vérifiez le théorème de LAGRANGE).

b) Vérifiez en représentant les deux droites utiles sur le graphique ci-contre.

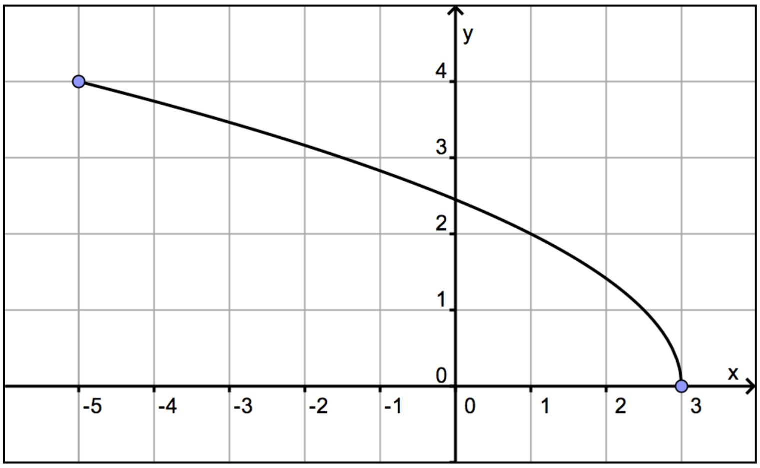


---

6. Soit la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{6-2x}$ dans l'intervalle $[-5,3]$.

a) Déterminez une abscisse c telle que $f'(c)$ égale le taux de variation moyen de f dans l'intervalle $[-5,3]$ (c'est-à-dire vérifiez le théorème de LAGRANGE).

b) Vérifiez en représentant les deux droites utiles sur le graphique ci-contre.



---

7. Soit la fonction $f(x)=\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{x^3}{6}-x^2+x+1$.

Étudiez ses variations ainsi que les concavités de son graphique.
Déterminez les coordonnées exactes des extrema et points d'inflexion éventuels.

---

8. Soit la fonction $f(x)=2\sin x+\cos 2x$.

Est-il vrai que cette fonction est strictement croissante dans l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$?

Et dans l'intervalle $\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$?

Géométrie analytique de l'espace

1. Soient les points $A(5,\text{-}1,0)$, $B(0,1,1)$ et $C(3,\text{-}1,5)$.

   a) Par la méthode du déterminant, donnez une équation cartésienne du plan ABC .

   b) Donnez des équations vectorielle, paramétriques et cartésiennes (sous deux formes) de la droite AB .

---

2. La droite $d \equiv x-1=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ est contenue dans le plan $\pi \equiv 2x+y-z-3=0$.

   Vrai ou faux ? Justifiez.

---

3. a) Démontrez que le plan comprenant les points $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ et $C(0,0,c)$ a pour équation cartésienne $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

   b) Déduisez-en une équation cartésienne du plan comprenant les points $A(5,0,0)$, $B(0,\text{-}3,0)$ et $C(0,0,2)$.

---

4. Déterminez deux plans contenant la droite $d \equiv \dfrac{x}{5}=y-3=2z+1$. Expliquez.

---

5. Voici les équations paramétriques d'un plan : $\pi \equiv \begin{cases} x=\lambda+2\mu+2 & (1) \\ y=5\lambda+\mu & (2) \\ z=\lambda+1 & (3) \end{cases}$.

   a) Déterminez deux vecteurs directeurs de ce plan.

   b) Déterminez le point d'intersection de π avec l'axe des abscisses.

   c) Déterminez un vecteur normal à π .

   d) Déterminez des équations cartésiennes de la droite d comprenant le point $P(2,0,16)$ et perpendiculaire à π .

---

6. Déterminez la distance du point $Q(2,\text{-}7,0)$ au plan $\alpha \equiv x-2y+z-6=0$.

---

7. Soient les plans $\pi_1 \equiv 4x-8y+2z=0$ et $\pi_2 \equiv 2x-4y+z-5=0$.

   a) Expliquez pourquoi ces deux plans sont parallèles et disjoints.

   b) Calculez la distance entre ces deux plans

8. Les droites $a \equiv 2x - 3 = \frac{y}{2} = \frac{3z+1}{6}$ et $b \equiv \frac{x}{4} = y + 5 = -\frac{z}{2}$ sont orthogonales.

Vrai ou faux ? Justifiez.

---

9. Soit la droite $c \equiv x = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{11}$.

Déterminez une équation cartésienne de la droite p , comprenant le point $P(-8,2,-12)$ et parallèle à c .

---

10. Calculez les coordonnées du point de percée de la droite $d \equiv \begin{cases} x - 6y + 6 = 0 \\ x + 6z - 12 = 0 \end{cases}$ dans le plan $\pi \equiv x + y - z - 15 = 0$.

---

11. Soient les points $A(8,0,2)$ et $B(2,2,-2)$.
Déterminez une équation cartésienne du plan médiateur du segment $[AB]$.

---

12. Calculez l'angle aigu entre les plans sécants $\delta \equiv 3x + y = 0$ et $\varepsilon \equiv x - 4y + 7z - 2 = 0$.

---

13. Soit la sphère $S \equiv x^2 - 8x + y^2 + 2y + z^2 + 8 = 0$.

a) Déterminez les coordonnées de son centre ainsi que son rayon.

b) Caractérisez l'intersection de S avec le plan xOy , déterminé par les axes Ox et Oy.

c) Qu'en est-il de l'intersection de S avec le plan yOz ? Expliquez.

---

14. Résolvez les système suivants, d'inconnues x , y et z . Interprétez géométriquement le résultat en considérant chacune des équations comme une équation cartésienne de plan.

a) $\begin{cases} x + 3y - z = 20 \\ 2x - y + z = 42 \\ x + y + 2z = 27 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x + y + 3z = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 2y - 6z = 0 \\ x + y + z = 4 \\ -2x - y + 3z = 1 \end{cases}$

Bon travail de préparation.
A. VANDENBRUAENE