Solutions des exercices de préparation au contrôle de synthèse n°1

Classes de 5^e – Mathématique 6h – A. Vandenbruaene

Trigonométrie

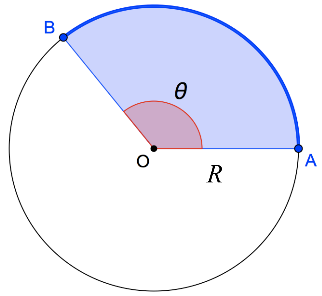
1. Circonférence de $\mathscr{C}$: $2\pi R = 8\pi$ (cm) . Aire du disque de $\mathscr{C}$: $\pi R^2 = 16\pi$ (cm^2) .

   a) i. Un angle de 2π radians intercepte toute la circonférence, soit 8π (cm).
   Un angle de 1 radian intercepte un arc de $\dfrac{8\pi}{2\pi} = 4$ (cm).
   Un angle de $1{,}5$ radians intercepte un arc de $1{,}5 \times 4$ (cm) = 6 (cm).

   ii. À un angle de 2π radians correspond l'aire du disque entier, soit 16π (cm^2).
   À un angle de 1 radian correspond un secteur dont l'aire vaut $\dfrac{16\pi}{2\pi} = 8$ (cm^2).
   À un angle de 1,5 radians correspond un secteur d'aire 1,5 × 8 (cm^2) = 12 (cm^2).

En généralisant ces démarches, on trouve deux formules utiles.
Si, dans un cercle de centre O et de rayon R, on considère un angle $A\hat{O}B$ d'amplitude θ radians , alors :

- la longueur de l'arc de cercle AB est : $\theta \cdot R$;
- l'aire du secteur de disque AOB est : $\theta \cdot \dfrac{R^2}{2}$.



   b) Soit α l'amplitude, en radians, de l'angle $P\hat{O}Q$.
   Nous avons : $\alpha \cdot 4 = 2 \rightarrow \alpha = 0{,}5$ (rad). Et donc : $\alpha = 0{,}5 \cdot \dfrac{180°}{\pi} \approx 28{,}6479°$.

---

2. Soit φ l'amplitude en radians de l'angle $R\hat{O}S$.

   a) $\varphi \cdot \dfrac{10^2}{2} = 200 \rightarrow \varphi = 4$ radians soit environ $229{,}1831°$;

   b) $10\varphi \approx 40$ (cm) .

---

3. Transformons d'abord l'expression de f: $f(x) = 3 \cdot \sin\left[4\left(x + \dfrac{\pi}{24}\right)\right] + 2$.

   a) Valeurs moyenne, maximale et minimale : respectivement 2 , 5 et -1 .
   Amplitude : 3 . Période : $T = 2\pi/|b| = 2\pi/4 = \pi/2$. Comme $c = -\pi/24$, on peut représenter un cycle dans l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{24}, \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{24}\right]$.
   Un cycle de la fonction peut donc être représenté dans la fenêtre $\left[-\dfrac{\pi}{24}, \dfrac{11\pi}{24}\right] \times [-1{,}5]$.

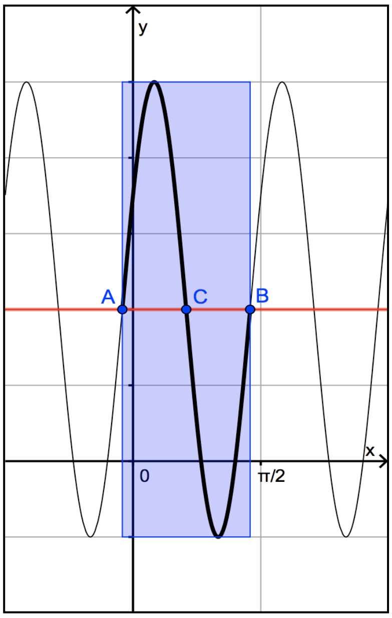
b) Nous avons les points $A\left(-\dfrac{\pi}{24},2\right)$, $B\left(\dfrac{11\pi}{24},2\right)$ et $C\left(\dfrac{5\pi}{24},2\right)$.

L'abscisse du maximum est la moyenne arithmétique de celles de A et de C.

Donc : $Max\left(\dfrac{\pi}{12},5\right)$.

L'abscisse du minimum est la moyenne arithmétique de celles de C et de B.

Donc : $Min\left(\dfrac{\pi}{3},-1\right)$.



---

4. Voici les « couples graphique - formule » avec des indices ayant permis de les retrouver.

① - F (période : 2π, translation de $y = \sin x$ de $\pi/2$ vers la droite ; on peut aussi « voir » $f(x) = -\cos x$ et retrouver la formule proposée par les angles complémentaires).

② - E (période : π, fonction de référence $y = \cos x$; il s'agit donc de $f(x) = \cos(2x)$ et les angles complémentaires permettent de retrouver $f(x) = \sin(\pi/2 - 2x)$).

③ - I (demi-période : 2π ; période : 4π, donc, b = ½ ; valeur moyenne : 1).

④ - C (période : 2π ; valeur moyenne : - 1 ; translation de $\pi/3$ vers la gauche).

⑤ - D (période : 2π ; valeur moyenne : - 1 ; translation de $2\pi/3$ vers la droite).

⑥ - A (demi-période : $5\pi/2$; période : 5π, donc, $b = 2/5$; valeur moyenne : 2).

⑦ - G (période : 2π ; amplitude : 2 ; valeur moyenne : - 1 ; translation de $y = \cos x$ de $\pi/4$ vers la gauche).

⑧ - B (période : 2π ; amplitude : 2 ; valeur moyenne : - 1 ; fonction de référence : $y = -\sin x$).

<u>Remarque</u> : en pratique, vous pouvez retrouver beaucoup de formules en testant des points particuliers des graphiques. Par exemple, pour vérifier que la formule G correspond au graphique n°7, on peut calculer $f(0) = 2\cdot\cos\dfrac{\pi}{4} - 1 = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}41$, ce qui semble bien correct.

5. Amplitude : 2 . Valeur moyenne : 1 . Période : $3\pi/4 - \pi/12 = 2\pi/3$, ce qui nous permet de prendre $b = 3$.

La fonction de référence $y = \sin x$ a été translatée de $\pi/12$ vers la droite.

<u>Conclusion</u> : $f(x) = 2\cdot\sin\left[3\left(x - \dfrac{\pi}{12}\right)\right] + 1 = 2\cdot\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$.

6. a) $\sin(2a) = 2\cdot\sin a\cdot\cos a = 2\cdot\sqrt{1-\cos^2 a}\cdot\cos a = 2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{16}}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{8}$

Nous n'avons pas envisagé $\sin a = -\sqrt{1-\cos^2 a}$, car $a \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ et donc $\sin a \geq 0$.

b) $\tan(2a) = \frac{\sin(2a)}{\cos(2a)} = \frac{\sin(2a)}{2\cdot\cos^2 a - 1} = \frac{-\frac{\sqrt{15}}{8}}{-\frac{7}{8}} = \frac{\sqrt{15}}{7}$

---

7. a) $\cos(2a) = 2\cdot\cos^2 a - 1 = 2\cdot\frac{16}{25} - 1 = \frac{7}{25}$.

b) $\cos(a+b) = \cos a\cdot\cos b - \sin a\cdot\sin b = -\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} - \left(-\sqrt{1-\frac{16}{25}}\right)\cdot\left(-\sqrt{1-\frac{1}{16}}\right) = -\frac{1}{5} - \frac{3\sqrt{15}}{20}$.

c) $\sin(a-b) = \sin a\cdot\cos b - \sin b\cdot\cos a = -\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4} - \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\cdot\frac{-4}{5} = -\frac{3}{20} - \frac{\sqrt{15}}{5}$.

d) $\tan(2a) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} = \frac{\frac{-3-4\sqrt{15}}{20}}{\frac{-4+3\sqrt{15}}{20}} = \frac{3+4\sqrt{15}}{4-3\sqrt{15}}$.

---

8. a) $\sin 5x - \sin 7x = 0 \overset{\text{Simpson}}{\Leftrightarrow} 2\cdot\sin(-x)\cdot\cos(6x) = 0 \Leftrightarrow (-x = k\pi)\vee\left(6x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

$\Leftrightarrow (x = k\pi)\vee\left(x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6}\right)$

b) $x = 0$, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{12}$, π , $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{17\pi}{12}$, $\frac{19\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{23\pi}{12}$, 2π .

---

9. a) $2\cdot\cos^2 x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x\cdot(2\cdot\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\cos x = 0)\vee\left(\cos x = -\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right)\vee\left(x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi\right)\vee\left(x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi\right)$.

b) En posant $y = \sin x$, l'équation s'écrit $4y^2 + 3y - 1 = 0$.
Cette équation du second degré admet les solutions $y = ¼$ et $y = -1$, donc :

$\left(\sin x = \frac{1}{4}\right)\vee(\sin x = -1) \Leftrightarrow (x \approx 0{,}2527 + k2\pi)\vee(x \approx 2{,}8889 + k2\pi)\vee\left(x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$

c) $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$

d) On pose $\tan\varphi = \frac{b}{a} = -\sqrt{3}$. Prenons $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. L'équation initiale est équivalente à :

$\cos(x-\varphi) = \frac{c}{a}\cdot\cos\varphi \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi$.

Finalement : $\left(x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi\right)\vee\left(x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$.

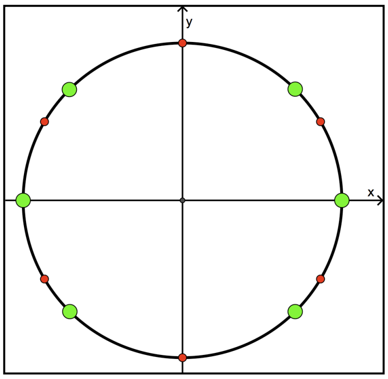
10. Sous les conditions d'existence $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$, nous avons :

$$\tan(3x) + \tan x = 0 \overset{\textit{Simpson}}{\Leftrightarrow} \frac{\sin(4x)}{\cos(3x)\cdot\cos(x)} = 0 \Leftrightarrow \sin(4x) = 0 \Leftrightarrow 4x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{4} \ .$$

Les solutions de cette équation sont tous les multiples entiers de $\pi/4$ <u>qui ne sont pas multiples entiers impairs</u> de $\pi/2$:

… , $-3\pi/4$, $-\pi/4$, 0 , $\pi/4$, $3\pi/4$, π , $5\pi/4$, $7\pi/4$, …

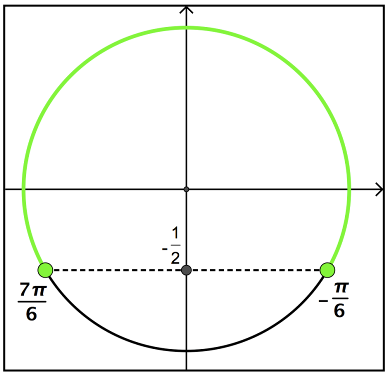
Ci-contre, les gros points (en vert) correspondent aux solutions. Les petits points (en rouge) correspondent aux réels qu'il faut rejeter conformément aux conditions d'existence.



---

11. $2\cdot\sin x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq -\frac{1}{2}$

$$S = \bigcup_{k\in Z}\left[-\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{7\pi}{6} + k2\pi\right]$$



---

12. $$\frac{\sin a}{1+\cos a} \overset{\textit{duplication}}{=} \frac{2\cdot\sin\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}}{1+\left(2\cdot\cos^2\frac{a}{2}-1\right)} = \frac{2\cdot\sin\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}}{2\cdot\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \tan\frac{a}{2} \ .$$

---

13. $$\frac{\sin 6x - \sin 2x}{2\cdot\cos 4x\cdot\left(2\cos^2 x - 1\right)} \overset{\textit{Simpson-Carnot}}{=} \frac{2\cdot\sin 2x\cdot\cos 4x}{2\cdot\cos 4x\cdot\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x \ .$$

---

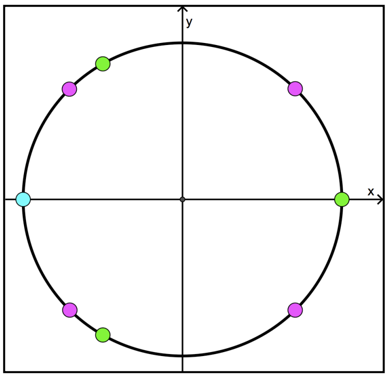
14. $$\sin(3x) + \sin(4x) - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \overset{\textit{Simpson}}{\Leftrightarrow} 2\cdot\sin\left(\frac{7x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{-x}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\overset{\textit{mise en évidence}}{\Leftrightarrow} 2\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left[\sin\left(\frac{7x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right] = 0 \overset{\textit{Simpson}}{\Leftrightarrow} 4\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\cdot\cos(2x) = 0 \ .$$

<u>Solutions</u> :

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{3x}{2} = k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \pi + k2\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$



Vecteurs de l'espace et produit scalaire

Nous travaillons toujours dans un repère orthonormé du plan ou de l'espace

1. Soient les points $A(2,7,9)$, $B(5,7,8)$ et $C(3,5,0)$.

a) $\vec{v} = 5\cdot\overrightarrow{AB} - 3\cdot\overrightarrow{AC} = 5\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\6\\22\end{pmatrix} \rightarrow \left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{144+36+484} = \sqrt{664} \approx 25{,}77$.

b) Soit $D(24,y,z)$. Il faut que $\overrightarrow{CD} = k\cdot\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}21\\y-5\\z\end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ et donc $k = 7$.

On en déduit $y = 5$ et $z = -7$.

c) Soit θ l'angle cherché. On a : $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \dfrac{12}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{86}} \rightarrow \theta \approx 65{,}8456°$.

---

2. a) Il est suffisant de montrer que $\overrightarrow{AH} = k\cdot\overrightarrow{AB}$.

C'est le cas : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}15\\6\end{pmatrix}$ et le point H est donc aligné avec A et B .

b) On a : $\overrightarrow{CH}\bullet\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}8\\-20\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}15\\6\end{pmatrix} = 120 + (-120) = 0 \rightarrow \overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$.

c) $\text{Aire}(ABC) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{CH}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}{2} = \dfrac{\sqrt{464}\cdot\sqrt{261}}{2} = \dfrac{4\sqrt{29}\cdot 3\sqrt{29}}{2} = 174(ua)$.

---

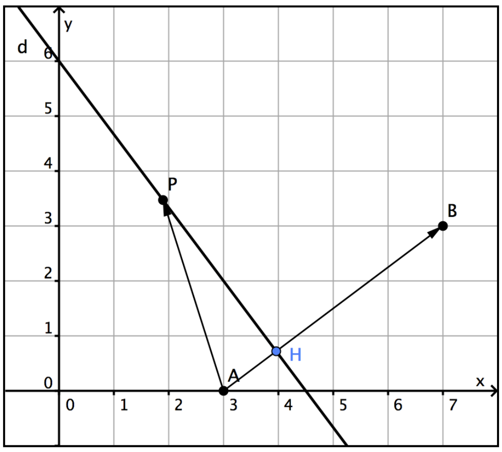
3. Calculons d'abord la pente de AB :

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3}{4} .$$

La pente de d s'obtient en mettant son équation sous forme explicite par rapport à y :

$$d \equiv y = -\frac{4}{3}x + \frac{9}{2} \rightarrow m_d = -\frac{4}{3} .$$

Les droites AB et d sont donc perpendiculaires et tout vecteur $\overrightarrow{AP}$ aura pour projection orthogonale sur AB le vecteur $\overrightarrow{AH}$.



Donc, quel que soit $P \in d$, on a : $\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH}\bullet\overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AH}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

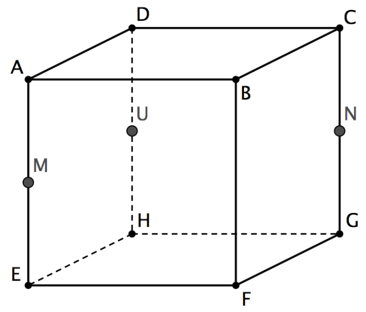
Le produit de ces deux longueurs est une constante car les points A , B et H sont fixes).
Pour trouver cette constante, prenons un point P particulier, par exemple $(0,6)$:

$\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = 6$. Essayez aussi avec $P(3,2)$, ou d'autres points de AB …

4. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} m-1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow m^2 + 5m = 0 \Leftrightarrow m \cdot (m+5) = 0 \Leftrightarrow (m=0) \vee (m=-5)$.

---

5. a) Soient M et N les milieux respectifs de $[AE]$ et $[CG]$. On a :



$$\overrightarrow{ER} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EN} \to R = N \ .$$

b) Soient U le milieu de $[DH]$. On a :

$$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DU} = \overrightarrow{CU} = \overrightarrow{BM} \to S = M \ .$$

---

6. Il est suffisant de démontrer que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ (on peut aussi prouver que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$).

$\overrightarrow{PQ}$	$=$	$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}$	(relation de CHASLES)
	$=$	$\overrightarrow{HR} + \overrightarrow{SH}$	(par hypothèse)
	$=$	$\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HR}$	(commutativité de l'addition vectorielle)
	$=$	$\overrightarrow{SR}$	(relation de CHASLES)

---

7. Le point A est le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses, donc : $A(1,-1,0)$.

a) Nous avons, $\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Donc : $\cos A\hat{S}B = \dfrac{4}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \dfrac{2}{3} \to A\hat{S}B \approx 48{,}1897°$.

b) On vérifie aisément que OS est perpendiculaire au plan $ABCD$ et donc à OB .
Le produit scalaire s'obtient donc par projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{BS}$ sur le vecteur $\overrightarrow{OB}$: $\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{BO} = -\left\|\overrightarrow{OB}\right\|^2 = -\left(\sqrt{2}\right)^2 = -2$.

Évidemment, on peut toujours utiliser les composantes : $\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2$.

---

8. Utilisons notre première définition du produit scalaire : $\vec{u} \bullet \vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cdot \cos\theta$.

D'abord, $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{100+5+16} = \sqrt{121} = 11$. Ensuite, $\cos\theta = \cos(60°) = \dfrac{1}{2}$.

Remplaçant dans la formule, nous obtenons : $33 = 11 \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cdot \dfrac{1}{2} \to \left\|\vec{v}\right\| = \dfrac{2}{3}$.