Préparation du contrôle de synthèse n°2
Solutions des exercices

Limites de fonctions et asymptotes

1. ① a) 2 ; AH ≡ $y = 2$
   b) - 1 ; AH ≡ $y = -1$
   c) - 3
   d) n'existe pas car dom $f = \left]-\infty,-2\right] \cup \left[0,+\infty\right[\setminus \{2\}$
   e) n'existe pas car dom $f = \left]-\infty,-2\right] \cup \left[0,+\infty\right[\setminus \{2\}$
   f) 1,5
   g) - ∞ ; AV ≡ $x = 2$
   h) + ∞ ; AV ≡ $x = 2$

   ② a) + ∞
   b) + ∞
   c) - 1
   d) 3
   e) 3
   f) 4
   g) 2
   h) 2

---

2. AV ≡ $x = -1$ car $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x) = -\infty$.

   AO ≡ y = - x + 3/2 car $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - \left(-x + \dfrac{3}{2}\right)\right] = 0$.

---

3. a) dom f =] - ∞ , 3] ∪ {4}
   b) Le réel 4 est adhérent à dom f car tout intervalle ouvert comprenant 4 comprend au moins un réel de dom f (en fait, dans ce cas-ci, un seul réel de dom f : 4 lui-même !).
   Le réel 3,01 n'est pas adhérent à dom f car il est possible de trouver un intervalle ouvert comprenant 3,01 mais ne comprenant aucun réel de dom f.
   Par exemple,] 3,009 ; 3,011 [.
   c) Adh(dom f) = [- ∞ , 3] ∪ {4}
   d) 1°/ n'existe pas car + ∞ n'adhère pas à dom f 2°/ + ∞ 3°/ 0 4°/ $4\sqrt{3}$

---

4. a) $\dfrac{3}{2}$; « point rouge » de coordonnées $\left(-4,\dfrac{3}{2}\right)$
   b) $-\dfrac{1}{18}$; « point rouge » de coordonnées $\left(-1,-\dfrac{1}{18}\right)$
   c) - 2 ; AH ≡ $y = -2$
   d) + ∞ ; AV ≡ $x = -3$
   e) 0 ; « point rouge » de coordonnées $(0,0)$
   f) - 4 ; AH ≡ $y = -4$
   g) - ∞ à gauche et + ∞ à droite ; AV ≡ $x = 7$
   h) comme dom f =] - ∞ , 5 [, seule la limite à gauche existe et elle vaut - ∞ ; AV ≡ $x = 5$

---

5. dom f = **R** \ {0, ½ }

   a) « Point rouge » en (0,0) car $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$;
   b) AV ≡ x = ½ car $\lim\limits_{\substack{x\to1/2\\<}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1/2\\>}} f(x) = +\infty$;
   c) AO ≡ y = ½ x + ¼ .

6. $AV_1 \equiv x = -2/5$ car $\lim\limits_{\substack{x\to -2/5 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $AV_2 \equiv x = 2/5$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 2/5 \\ >}} f(x) = +\infty$;

$AH_1 \equiv y = -3/2$ car $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\dfrac{3}{2}$ et $AH_2 \equiv y = 3/2$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$.

---

7. a) $AO_1 \equiv y = -x + 1$ pour x tendant vers $-\infty$, et $AO_2 \equiv y = x - 1$ pour x tendant vers $+\infty$

b) $f(100) \approx \left[x-1\right]_{x=100} = 99$ et $f(-500) \approx \left[-x+1\right]_{x=-500} = 501$

---

8. $AH \equiv y = 1$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$ (cas « ∞ - ∞ » ; technique du binôme conjugué).

Dérivées

1. a) $f'(-1) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+6x+5}{x+1} = 4$;

b) $f'(5) = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5} = \dfrac{1}{6}$;

c) $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x-3}+\frac{1}{2}}{x-1} = -\dfrac{1}{4}$.

---

2. Fonctions dérivées :

a) $f'(x) = \dfrac{3}{(1-4x)^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{16x+3}{2\sqrt{8x^2+3x}}$

c) $f'(x) = -4\cdot(2x+1)^2\cdot(4x-7)$

d) $f'(x) = 24\cdot(6x+1)^3$

e) $f'(x) = 5\cdot\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$

f) $f'(x) = 3\cdot\cos\left(\dfrac{3x}{4}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{3x}{4}\right) = \dfrac{3}{2}\cdot\sin\left(\dfrac{3x}{2}\right)$

---

3. a) $t \equiv y = x - \dfrac{5}{3}$ b) $t \equiv y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$ c) $t \equiv y = -2x + \dfrac{5}{2}$

---

4. $t \equiv y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{7}{4}$; pour tracer t : $(0\,,7/4)$, $(1,2)$ et bien sûr $(5,3)$ appartiennent à t .

---

5. Le taux de variation moyen de f dans [1,7] est $\dfrac{f(7)-f(1)}{7-1} = \dfrac{1}{2}$. D'autre part, $f'(x) = \dfrac{x-3}{2}$.

Le théorème de LAGRANGE assure l'existence dans [1,7] d'un réel c tel que $f'(c) = \dfrac{c-3}{2} = \dfrac{1}{2}$.

On trouve $c = 4$. Ensuite, tracer la tangente à G_f en son point d'abscisse 4 ($t \equiv y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$) et vérifier qu'elle est bien parallèle à la droite reliant les points $(1,2)$ et $(7,5)$.

6. Le taux de variation moyen de f dans [-5,3] est $\dfrac{f(-5)-f(3)}{-5-3}=-\dfrac{1}{2}$.

D'autre part, $f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{6-2x}}$. Le théorème de LAGRANGE assure l'existence dans [-5,3] d'un réel c tel que $f'(c)=\dfrac{-1}{\sqrt{6-2c}}=-\dfrac{1}{2}$. On trouve $c=1$.

Ensuite, tracer la tangente à G_f en son point d'abscisse 1 ($t\equiv y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$) et vérifier qu'elle est bien parallèle à la droite reliant les points (-5,4) et (3,0) .

---

7. Variations : $f'(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x+1$.

Racines approximatives de $f'(x)$ (déterminées via GEOGEBRA) : -2.08 , 0.46 et 3.12 .

x		-2.08		0.46		3.12	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	Min_1	↗	Max	↘	Min_2	↗

Min_1 (-2.08 , -2.35) ; Max (0.46 , 1.24) et Min_2 (3.12 , -2.78) .

Concavités : $f''(x)=x^2-x-2$; les racines de $f''(x)$ sont - 1 et 2 .

x		-1		2	
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	∪	PI_1	∩	PI_2	∪

PI_1 (-1 , - ¾) et PI_2 (2 , -1) .

---

8. Dérivée première :

$$f'(x)=2\cdot\cos x-2\cdot\sin 2x \overset{duplication}{=} \underline{2\cdot\cos x}-\underline{2}\cdot 2\cdot\sin x\cdot\underline{\cos x}=\underline{2\cdot\cos x}\cdot(1-2\cdot\sin x)\ .$$

Racines de $f'(x)$: $\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ ou $\sin x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left(x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\right)\vee\left(x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\right)$.

x	0		$\pi/6$		$\pi/2$		$5\pi/6$		$3\pi/2$		2π
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	↗	↗	Max_1	↘	Min_1	↗	Max_2	↘	Min_2	↗	↗

La fonction n'est pas strictement croissante dans $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, car elle décroît dans $\left[\dfrac{5\pi}{6},\pi\right]$.

Par contre, elle est bien croissante dans l'intervalle $\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$.

Géométrie analytique de l'espace

1. a) $ABC \equiv \begin{vmatrix} x-5 & -5 & -2 \\ y+1 & 2 & 0 \\ z & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ABC \equiv 10x + 23y + 4z - 27 = 0$.

   b) Par exemple :

   $AB \equiv \overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB}$; $AB \equiv \begin{cases} x = -5k+5 \\ y = 2k-1 \\ z = k \end{cases}$; $AB \equiv \dfrac{x-5}{-5} = \dfrac{y+1}{2} = z$ ou $AB \equiv \begin{cases} x + 5z = 5 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$.

---

2. Cherchons deux points de d . S'ils appartiennent aussi à π , c'est que $d \subset \pi$.
   Si $x = 1$, on trouve $P(1,0,-1) \in d$. On vérifie que $P \in \pi$.
   Si $x = 0$, on trouve $Q(0,-2,-4) \in d$, mais on vérifie que $Q \notin \pi$. Donc $d \not\subset \pi$.

---

3. a) <u>Première façon</u> : $ABC \equiv \begin{vmatrix} x-a & -a & -a \\ y & b & 0 \\ z & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ABC \equiv bcx + abz + acy - abc = 0$

   et il reste à diviser les deux membres par abc pour obtenir la formule.

   <u>Deuxième façon</u> : vérifier que les coordonnées de chaque point sont solutions de l'équation proposée. Comme trois points non alignés déterminent un plan, cette équation est bien celle du plan ABC .

   b) $ABC \equiv \dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{2} = 1 \Leftrightarrow ABC \equiv 6x - 10y + 15z - 30 = 0$.

---

4. À partir des équations $d \equiv \dfrac{x}{5} = y - 3 = 2z + 1$, on obtient par exemple $d \equiv \begin{cases} x - 5y + 15 = 0 \\ x - 10z - 5 = 0 \end{cases}$.

   Les deux équations de ce système étant celles de deux plans qui se coupent en d , ces plans contiennent forcément d .

---

5. a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   b) Comme $Ox \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, les équations (3) et (2) donnent $\lambda = -1$ et $\mu = 5$.

   En remplaçant dans (1) , on obtient $x = 11$, et donc : $\pi \cap Ox = \{(11,0,0)\}$.

c) Il faut un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ simultanément orthogonal aux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exprimons que les deux produits scalaires sont nuls et donnons ensuite une valeur à une des inconnues :

$\begin{cases} n_1 + 5n_2 + n_3 = 0 \\ 2n_1 + n_2 = 0 \end{cases}$ et par exemple $n_1 = 1$.

Cela donne $n_2 = -2$ et $n_3 = 9$. Un vecteur normal de π est donc : $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$.

d) Comme $d \perp \pi$, le vecteur $\vec{n}$ est aussi un vecteur directeur de d : $d \equiv x - 2 = -\dfrac{y}{2} = \dfrac{z-16}{9}$.

---

6. Il s'agit de la distance entre Q et sa projection orthogonale I sur le plan α (faites un p'tit dessin !). Cherchons le point I, intersection entre le plan α et la droite d passant par Q et perpendiculaire à α.

Le vecteur normal $\vec{n}_\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est aussi vecteur directeur de d, donc : $d \equiv \begin{cases} x = k + 2 \\ y = -2k - 7 \\ z = k \end{cases}$.

En résolvant le système formé par les équations paramétriques de d et l'équation cartésienne de α, on trouve $k = -\dfrac{5}{3}$, ce qui nous donne $I\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{11}{3}, -\dfrac{5}{3}\right)$.

Finalement : $d(Q,\alpha) = d(Q,I) = \dfrac{5\sqrt{6}}{3} \approx 4{,}0825$.

---

7. L'équation de π_1 peut s'écrire $\pi_1 \equiv 2x - 4y + z = 0$ (notez que ce plan comprend l'origine des axes) ce qui facilite la comparaison avec $\pi_2 \equiv 2x - 4y + z - 5 = 0$.

a) Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ étant normal aux deux plans, ils sont parallèles.

Comme les équations des plans ne sont pas équivalentes, ils sont disjoints.

b) Considérons une droite d passant par l'origine et perpendiculaire aux deux plans. Nous pouvons donc prendre $\vec{n}$ comme vecteur directeur de d et écrire ses équations paramétriques : $d \equiv \begin{cases} x = 2k \\ y = -4k \\ z = k \end{cases}$.

Cela nous permet de calculer les points de percée de d dans π_1 et π_2 : respectivement $I(0,0,0)$ (évidemment) et $J\left(\frac{10}{21},-\frac{20}{21},\frac{5}{21}\right)$.

Dès lors, $d(\pi_1,\pi_2) = d(I,J) = \sqrt{\left(\frac{10}{21}\right)^2 + \left(\frac{20}{21}\right)^2 + \left(\frac{5}{21}\right)^2} = \frac{5\sqrt{21}}{21} \approx 1{,}0911$.

---

8. Vérifions l'orthogonalité de deux vecteurs directeurs respectifs :

$$\vec{v}_a\begin{pmatrix}1/2\\2\\2\end{pmatrix}\bullet\vec{v}_b\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} = 2+2-4=0$$

Les droites a et b sont orthogonales.

---

9. Le vecteur $\vec{v_c}\begin{pmatrix}1\\4\\11\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de c , et donc aussi de $p \,//\, c$.

Comme $P(-8,2,-12) \in p$, on a : $p \equiv x+8 = \frac{y-2}{4} = \frac{z+12}{11}$.

---

10. Cherchons d'abord deux points de $d \equiv \begin{cases} x-6y+6=0 \\ x+6z-12=0 \end{cases}$.

En choisissant $x = 0$, on obtient $P(0,1,2)$, et avec $y = 0$, on obtient $Q(-6,0,3)$.

Utilisant $\overrightarrow{QP}\begin{pmatrix}6\\1\\-1\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur de d et le point P , nous trouvons des équations paramétriques de cette droite : $d \equiv \begin{cases} x=6k \\ y=k+1 \\ z=-k+2 \end{cases}$.

En remplaçant x , y et z dans l'équation de π , nous trouvons $k = 2$. Remplaçant cette valeur dans les équations paramétriques de d , nous trouvons : $d \cap \pi = \{(12,3,0)\}$.

---

11. Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\2\\-4\end{pmatrix} = -2\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan médiateur μ .

Celui-ci comprenant le milieu $M(5,1,0)$ du segment $[AB]$, on trouve $\mu \equiv 3x - y + 2z - 14 = 0$.

12. Il s'agit de l'angle aigu entre leurs vecteurs normaux des deux plans : $\overrightarrow{n_\delta}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_\varepsilon}\begin{pmatrix}1\\-4\\7\end{pmatrix}$.

Utilisons la formule connue : $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{n_\delta}\bullet\overrightarrow{n_\varepsilon}}{\left\|\overrightarrow{n_\delta}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{n_\varepsilon}\right\|} = \dfrac{-1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{66}} \approx -0{,}0389 \to \theta \approx 92{,}23°$.

L'angle aigu mesure donc $180° - \theta \approx 87{,}77°$.

---

13. a) $S \equiv x^2 - 8x + \underline{\underline{16}} + y^2 + 2y + \underline{\underline{1}} + z^2 + 8 = \underline{\underline{17}} \Leftrightarrow S \equiv (x-4)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$.
Centre : $C(4,-1,0)$. Rayon : $r = 3$.

b) On a $xOy \equiv z = 0$. Remplaçant dans l'équation de S, nous trouvons $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$.
La sphère coupe donc le plan xOy suivant un cercle de centre $D(4,\text{-}1,0)$ et de rayon 3 .

c) On a $yOz \equiv x = 0$. Remplaçant dans l'équation de S, nous trouvons $(y+1)^2 + z^2 = -7$.
Cette équation n'a pas de solution car le premier membre est positif et le second <u>strictement</u> négatif. La sphère ne coupe donc pas le plan yOz .

---

14. a) $\begin{cases} x = 20 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ ou $S = \{(20,1,3)\}$.

b) Si l'on élimine deux fois l'inconnue x, on obtient deux équations d'inconnues y et z :

$$\begin{cases} y - 3z = 9 \\ 2y - 6z = 18 \end{cases}.$$

Ces deux équations étant équivalentes, le système est indéterminé et il est équivalent à

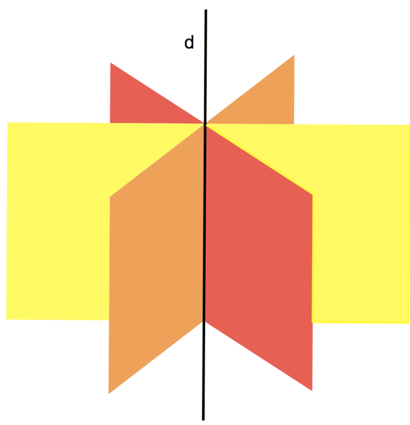
$$\begin{cases} x + y - z = 5 & (1) \\ y - 3z = 9 & (2) \end{cases}.$$

En posant $x = \lambda$, et en soustrayant (2) de (1), on trouve $2z + \lambda = \text{-}\,4$ et donc $z = -2 - \dfrac{\lambda}{2}$.

En remplaçant z dans (2), on obtient $y = 3 - \dfrac{3\lambda}{2}$.

Finalement : $S = \left\{\left(\lambda, 3 - \dfrac{3\lambda}{2}, -2 - \dfrac{\lambda}{2}\right)\right\}$ ($\lambda \in R$) .

Les équations initiales du système correspondent à des plans sécants deux à deux (en effet, aucune équation n'ayant ses coefficients multiples de ceux d'une autre, les plans ne peuvent être parallèles).
Comme le système admet une infinité de solutions, cela signifie que les plans ont une infinité de points communs, et donc une droite d'intersection commune.



c) Si l'on multiplie les deux membres de la troisième équation par - 2 , on obtient l'équation $4x + 2y - 6z = -2$ qui est incompatible avec la première.

Le système est dès lors impossible, il n'admet aucune solution.

D'un point de vue géométrique, cela signifie qu'il n'existe aucun point commun aux trois plans. Plus précisément, la première équation et la troisième sont celles de plans parallèles et disjoints (α et β), tandis que la deuxième est celle d'un plan π sécant aux deux autres.