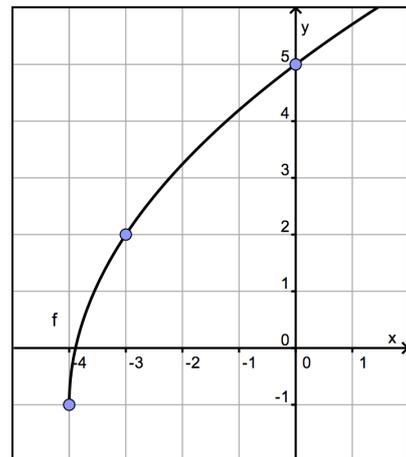


Préparation du contrôle de synthèse n°1 : exercices variés

Fonctions

1. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{5x+1}{x^2-4}$. Calculez les coordonnées des points d'ordonnée 2 du graphique de cette fonction.
2. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{5x-1}{x^2+x+1}$.
 - a) Déterminez son domaine de définition.
 - b) Résolvez l'inéquation $f(x) \geq 1$.
3. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}|x+3|-1$.
 - a) Tracez son graphique.
 - b) Résolvez l'inéquation $f(x) < 0$.
4. Déterminez l'expression analytique de la fonction f représentée ci-contre.



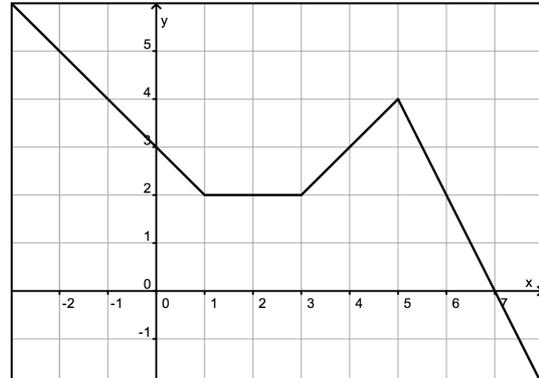
5. Inventez l'expression analytique d'une fonction homographique ayant comme asymptotes les droites $x = 3$ et $y = 4$.
6. « Le graphique de la fonction $f(x) = 6 + \frac{1}{2x+1}$ possède un point d'ordonnée 6 ». Vrai ou faux ? Justifiez.
7. « Pour obtenir le graphique de la fonction $f(x) = \frac{16x-19}{2x-3}$, il faut partir de celui de la fonction $g(x) = \frac{1}{x}$, multiplier ses ordonnées par $5/2$, translater de $3/2$ unités vers la droite, et enfin translater de 8 unités vers le haut ». Vrai ou faux ? Justifiez.
8. Si $f(x) = 3x^2$, quelle est l'expression analytique de $(f \circ f)(x)$? Et celle de $(f \circ f \circ f)(x)$?

9. Soient les fonctions $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = x^2$. Déterminez une expression analytique de la fonction $g \circ f$. Quel est le domaine de définition de $g \circ f$?

10. Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\sin(2x)}$.
Déterminez trois fonctions g , h et i pour que $f(x) = (i \circ h \circ g)(x)$.

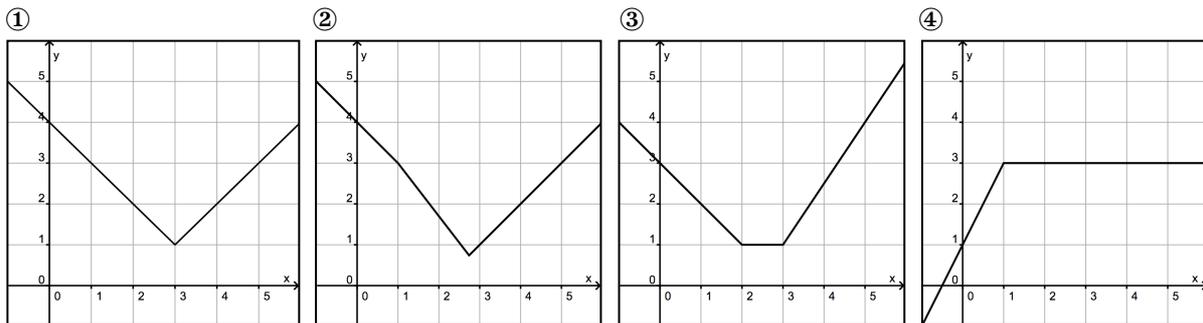
11. Voici le graphique d'une fonction f définie sur \mathbf{R} .

- Décrivez ses variations.
- Donnez une expression analytique de f .



12. Parmi les fonctions représentées ci-dessous, quelles sont-elles qui vérifient la proposition suivante ?

$$\ll \forall x_1, x_2 \in [1, 3] : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1) \gg$$



13. Déterminez le domaine de définition des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{(x-2)^2(1-x)}$

b) $g(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x-2}}$

14. Inventez une expression analytique d'une fonction f pour que $\text{dom } f =]-\infty, 3[\setminus \{0, 1\}$.

15. Tracez le graphique de la fonction $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 1 \\ 4-x & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x-1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$.

Vecteurs de l'espace et produit scalaire

Nous travaillons toujours dans un repère orthonormé du plan ou de l'espace.

- Soient les points $A(2,7,9)$, $B(5,7,8)$ et $C(3,5,0)$.
 - Déterminez les coordonnées d'un point D d'abscisse 24 pour que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} soit parallèles.
 - Calculez l'angle aigu entre les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
- On donne les points $A(0,2)$, $B(15,8)$ et $C(-3,24)$.
 - Montrez que le point $H(5,4)$ appartient à la droite AB .
 - Montrez que CH est une hauteur du triangle ABC .
 - Calculer l'aire du triangle ABC .
- On donne les points $A(3,0)$ et $B(7,3)$. Soit la droite $d \equiv 4x + 3y - 18 = 0$.
Montrez que pour tout point P de la droite d , le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$ est constant. Pourquoi ? Quelle est sa valeur ?
- Calculez les valeurs du paramètre m pour que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} m \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} m-1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$ soient orthogonaux.
- On donne le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ -\sqrt{5} \\ 4 \end{pmatrix}$.
On considère un autre vecteur \vec{v} , formant avec \vec{u} un angle de 60° , et tel que le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ égale 33. Déterminez la longueur du vecteur \vec{v} .

Trigonométrie

Voyez aussi les nombreux exercices de trigonométrie sur www.ismll.be (espace interactif).

- Sachant que $\cos a = -\frac{1}{4}$ et que $a \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$, calculez $\sin(2a)$ et $\tan(2a)$.
- Résolvez l'équation $\tan(3x) + \tan x = 0$ et représentez les solutions sur le cercle trigonométrique. (UCL)
- Résolvez l'inéquation $2\sin x + 1 \geq 0$.
- Démontrez que $\frac{\sin a}{1 + \cos a} = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$.
- Résolvez l'équation $\sin(3x) + \sin(4x) - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$. (UMons)