# Géométrie analytique dans l'espace

*« La géométrie analytique plane, inaugurée par FERMAT et DESCARTES dans les années 1630, avait la prétention de résoudre par des calculs routiniers des problèmes géométriques dont la solution par les méthodes classiques (c'est-à-dire inspirées des Grecs) aurait demandé une imagination qui n'est pas à la portée du premier venu et frise parfois le hasard … ou le génie. »*

*« L'idée de la géométrie analytique solide (c'est-à-dire à trois dimensions) est à peu près aussi ancienne que celle de la géométrie analytique plane. Elle remonte à DESCARTES, FERMAT, LA HIRE (1640-1718) et bien d'autres … Au départ, on se limitait essentiellement à l'idée de représenter une fonction de deux variables au moyen d'un graphe qui soit une surface dans l'espace tridimensionnel. Il faudra cependant attendre Jacob HERMANN (1678-1733) pour voir étudiées les propriétés élémentaires des plans et de quelques surfaces du second degré. »*

*Francis BORCEUX dans « Invitation à la Géométrie », ciaco éditeur, 1986.*

## 1. Équations d'un plan

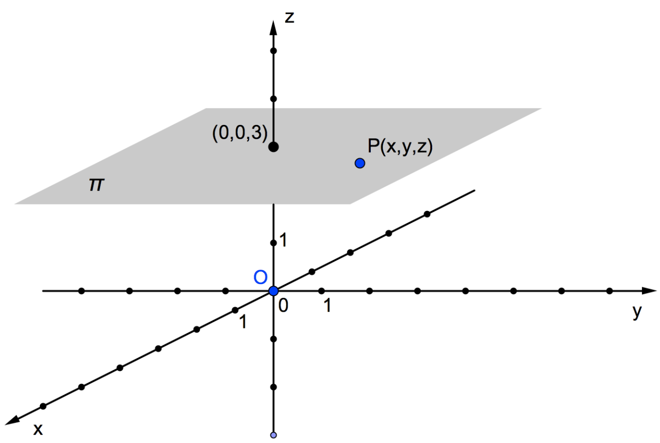
### 1.1. Exemples

Une équation d'un plan exprime une *condition* pour qu'un point appartienne à ce plan.
Cette condition pourra prendre différentes formes - vectorielle, paramétrique ou cartésienne - ainsi que nous allons le voir au travers des exemples suivants.

**Exemple 1**

La situation la plus simple est celle où le plan considéré est parallèle à un plan formé par deux axes de coordonnées.
Dans la figure ci-contre, le plan $\pi$ comprend le point $(0,0,3)$ et est parallèle au plan $xy$.

À quelle condition un point quelconque $P(x,y,z)$ appartient-il au plan $\pi$ ?




Il faut, et il suffit, que le point $P$ soit situé à une hauteur égale à $3$, autrement dit que sa cote $z$ soit égale à $3$. Il n'y a aucune condition sur $x$ ni sur $y$ : l'abscisse et l'ordonnée du point $P$ peuvent être quelconques.

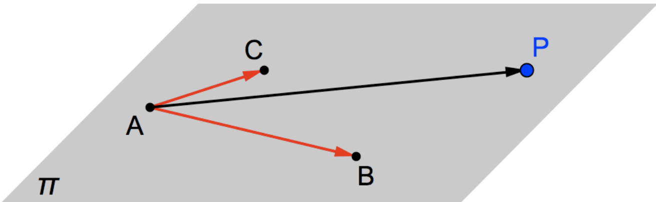
Une *équation cartésienne* de $\pi$ est donc $z = 3$. Nous noterons : $\boxed{\pi \equiv z = 3}$.

**Exemple 2**

Le cas le plus général est celui où le plan $\pi$ n'est parallèle à aucun des axes de coordonnées. Soit le plan $\pi$ comprenant les points A(2,-3,1) , B(0,2,4) et C(-1,-3,3).

***Équation vectorielle***

À quelle condition un point quelconque *P(x,y,z)* appartient-il à $\pi$ ?
Nous pouvons répondre à cette question en utilisant d'abord les *vecteurs*.




Pour que le point $P$ appartienne au plan $ABC$ , il faut et il suffit que le segment $[AP]$ soit situé dans le plan déterminé par les segments $[AB]$ et $[AC]$ . On dit que ces segments doivent être *coplanaires*.

Le même vocabulaire est utilisé pour les vecteurs : pour que le point $P$ appartienne au plan $ABC$ , les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ , $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ doivent être *coplanaires*.

Cela signifie que le vecteur $\overrightarrow{AP}$ peut être « construit » à partir des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ :

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\,.\,\overrightarrow{AB} + \mu\,.\,\overrightarrow{AC} \quad (\lambda \text{ et } \mu \text{ sont des réels}).$$

On dit que le vecteur $\overrightarrow{AP}$ est *combinaison linéaire* des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ .

Nous pouvons ainsi écrire une *équation vectorielle* du plan $\pi$ :

$$\boxed{\pi \equiv \overrightarrow{AP} = \lambda\,.\,\overrightarrow{AB} + \mu\,.\,\overrightarrow{AC}}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont appelés *vecteurs directeurs* du plan $\pi$ , tandis que les nombres réels $\lambda$ et $\mu$ sont des *paramètres*.
Par définition, des vecteurs directeurs d'un plan ont des <u>directions différentes</u> et sont <u>parallèles au plan</u>.

On utilise couramment une autre forme d'équation vectorielle pour un plan. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AP} = \lambda\,.\,\overrightarrow{AB} + \mu\,.\,\overrightarrow{AC} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = \lambda\,.\,\overrightarrow{AB} + \mu\,.\,\overrightarrow{AC} \\
&\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \lambda\,.\,\overrightarrow{AB} + \mu\,.\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO} \\
&\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \lambda\,.\,\overrightarrow{AB} + \mu\,.\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OA}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\pi \equiv \overrightarrow{OP} = \lambda\,.\,\overrightarrow{AB} + \mu\,.\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OA}}$$

### *Équations paramétriques*

Ces équations s'obtiennent à partir d'une équation vectorielle en utilisant les <u>composantes</u> des vecteurs.

$$\overrightarrow{OP} = \lambda \,.\, \overrightarrow{AB} + \mu \,.\, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OA} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \,.\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \,.\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Connaissant les règles de calcul concernant les composantes (multiplication par un réel et addition), nous pouvons écrire autrement l'égalité précédente :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda - 3\mu + 2 \\ 5\lambda - 3 \\ 3\lambda + 2\mu + 1 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons le système d'*équations paramétriques* du plan $\pi$ :

$$\pi \equiv \begin{cases} x = -2\lambda - 3\mu + 2 & (1) \\ y = 5\lambda - 3 & (2) \\ z = 3\lambda + 2\mu + 1 & (3) \end{cases}$$

### *Équation cartésienne*

Une équation cartésienne établit le lien entre les coordonnées $x$ , $y$ et $z$ du point $P$ pour qu'il appartienne au plan $\pi$ .
Elle s'obtient en éliminant les paramètres des équations paramétriques.

Éliminons le paramètre $\mu$ entre les équations (1) et (3) en les multipliant par des nombres bien choisis et en additionnant membre à membre :

2 x (1) : $2x = -4\lambda - 6\mu + 4$

3 x (3) : $3x = 9\lambda + 6\mu + 3$

addition $2x + 3z = 5\lambda + 7$ (4)

Il nous reste à éliminer le paramètre $\lambda$ entre cette équation et l'équation (2). Il suffit de les soustraire membre à membre :

(4) $2x + 3z = 5\lambda + 7$

(2) $y = 5\lambda - 3$

soustraction $2x - y + 3z = 10$

Cette dernière égalité est une *équation cartésienne* du plan $\pi$ :

$$\boxed{\pi \equiv 2x - y + 3z - 10 = 0}$$

Les solutions de l'équation $2x - y + 3z - 10 = 0$ sont les coordonnées des points du plan $\pi$.

Par exemple, pour le point $A(2,-3,1)$, nous avons bien : $2\,.2 - (-3) + 3\,.1 - 10 = 0$ .
Par contre, le point $D(15,12,-3)$ n'appartient pas à $\pi$ car $2\,.15 - 12 + 3\,.(-3) - 10 = -1 \neq 0$ .

## 1.2. Méthode du déterminant pour obtenir une équation cartésienne d'un plan

Une méthode pratique pour trouver une équation cartésienne d'un plan est celle du *déterminant* (voyez le chapitre « Matrices et déterminants »).

Considérons de nouveau le plan $\pi$ comprenant les points $A(2,-3,1)$, $B(0,2,4)$ et $C(-1,-3,3)$.
Soit $P(x, y, z)$ un point quelconque de $\pi$.

Nous formons la matrice 3 x 3 dont la première colonne correspond aux composantes du vecteur $\overrightarrow{AP}$, tandis que les deux autres colonnes correspondent aux composantes de deux de ses vecteurs directeurs, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Une équation cartésienne de $\pi$ s'obtient alors en annulant le déterminant de cette matrice :

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & -2 & -3 \\ y+3 & 5 & 0 \\ z-1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \, .$$

Calculons ce déterminant par la méthode de SARRUS (l'autre méthode est celle des « cofacteurs » ) :

$$\pi \equiv \left| \begin{matrix} x-2 & -2 & -3 \\ y+3 & 5 & 0 \\ z-1 & 3 & 2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} x-2 & -2 \\ y+3 & 5 \\ z-1 & 3 \end{matrix} = 0 \Leftrightarrow 10.(x-2) + 0 - 9.(y+3) + 15.(z-1) - 0 + 4.(y+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 10x - 5y + 15z - 50 = 0$$

Cette équation est bien équivalente à celle que nous avons obtenue en page 3 , il suffit de diviser les deux membres par 5 .

**Exercice**

Justifiez cette méthode !

Revoyez d'abord les propriétés des déterminants.
Expliquez ensuite pourquoi le fait d'annuler le déterminant formé par les vecteurs - colonnes $\overrightarrow{AP}$ , $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ fournit nécessairement une équation cartésienne du plan ABC .

## 1.3. Formulaire pour les équations de plans

Soit un plan $\pi$ comprenant le point $A(a_1, a_2, a_3)$ .

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs directeurs de $\pi$ .

Si $P(x, y, z)$ est un point quelconque de $\pi$, nous avons pour celui-ci :

- une équation vectorielle : $\pi \equiv \overrightarrow{OP} = \lambda . \overrightarrow{AB} + \mu . \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OA}$

  (où $\lambda$ et $\mu$ sont des paramètres réels, des « paramètres directeurs » )

- des équations paramétriques : $\pi \equiv \begin{cases} x = \lambda u_1 + \mu v_1 + a_1 \\ y = \lambda u_2 + \mu v_2 + a_2 \\ z = \lambda u_3 + \mu v_3 + a_3 \end{cases}$

- une équation cartésienne : $\pi \equiv a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$

  (où $a$ , $b$ et $c$ sont des réels non simultanément nuls et $d$ un réel )

  Nous admettrons qu'une équation cartésienne d'un plan est toujours une équation du premier degré à trois inconnues(*).

  Une telle équation peut être obtenue par la méthode du déterminant :

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x - a_1 & u_1 & v_1 \\ y - a_2 & u_2 & v_2 \\ z - a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

(*) *À l'exemple 1 de la page 1, l'équation du plan est $z = 3$ . Il s'agit bien d'une équation du premier degré à trois inconnues où les coefficients $a$ et $b$ sont nuls :* $z = 3 \Leftrightarrow 0.x + 0.y + 1.z - 3 = 0$ .

## Exercices

***Refaites la démarche complète de l'exemple 2 (pages 2 à 4)***

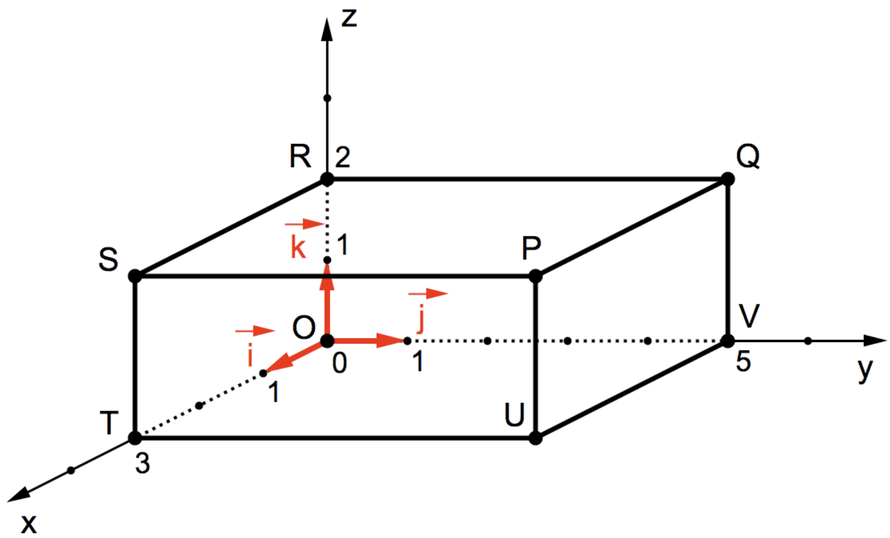
1. Déterminez des équations vectorielle, paramétriques et cartésienne (par les deux méthodes : éliminations des paramètres et déterminant) du plan $\pi$ déterminé par les points $A(-3,1,2)$ , $B(1,2,0)$ et $C(4,-5,3)$.

---

***Des plans particuliers***

2. Donnez une équation cartésienne de chacun des trois plans déterminés par les axes de coordonnées : $xy$ , $xz$ et $yz$ .

3. Observez la figure ci-dessous afin de déterminer une équation cartésienne de chacun des plans suivants : $PQR$ , $PQV$ , $PSU$ , $ORU$ et $QST$ .




---

***Retour sur des plans quelconques***

4. Voici des équations paramétriques d'un plan : $\pi \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu - 1 \\ y = \lambda - 2\mu + 3 \\ z = \lambda + \mu - 4 \end{cases}$ .

   a) Déterminez deux vecteurs directeurs de $\pi$ .

   b) Le point $S(2,1,0)$ appartient-il à $\pi$ ?

   c) Un point de $\pi$ a pour abscisse $(-1)$ et pour ordonnée $6$ . Calculez sa cote.

   d) Déterminez une équation cartésienne de $\pi$ .

---

5. Même exercice qu'au numéro 4 avec : $\pi \equiv \begin{cases} x = \lambda - 2\mu + 1 \\ y = 3\lambda + \mu \\ z = -\lambda + 2\mu - 3 \end{cases}$ .

6. Dans chacun des cas suivants, déterminez une équation cartésienne du plan déterminé par les trois points donnés.

   a) $A(0,1,3)$ , $B(1,2,0)$ et $C(4,0,0)$

   b) $O(0,0,0)$ , $B(-3,1,2)$ et $C(4,-5,3)$

   c) $A(2,0,0)$ , $B(0,5,0)$ et $C(0,0,3)$

---

7. Un plan $\pi$ comprend les points $A(a,0,0)$ , $B(0,b,0)$ et $C(0,0,c)$ où $a$ , $b$ et $c$ sont des réels non nuls.

   Démontrez qu'une équation cartésienne de $\pi$ est donnée par la formule

$$\boxed{\pi \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

   Utilisez ensuite cette formule pour vérifier l'exercice n°6 (c) .

---

8. Déterminez la valeur du réel $k$ pour que le plan $\alpha \equiv x + k\,y - 2z - 9 = 0$ comprenne le point $P\,(5\,,-4\,,-6\,)$ .

---

9. Soit le plan $\beta \equiv 2x - 5\,y + 6z - 15 = 0$ .

   a) Dans $\beta$ , déterminez le point $A$ dont l'abscisse vaut $0$ et l'ordonnée $3$ .

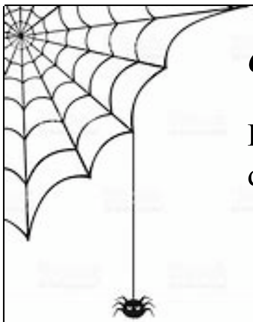
   b) Dans $\beta$ , déterminez le point $B$ dont l'abscisse vaut $1$ et la cote $3$ .

   c) Le point $C\,(\,2\,,-1\,,1\,)$ appartient-il à $\beta$ ?

   d) Des résultats précédents, déduisez deux vecteurs directeurs de $\beta$ .

   e) Déduisez-en des équations paramétriques de $\beta$ .

---



***Olympiades Mathématiques Belges (éliminatoires 1977)***

Dans l'espace $\mathbf{R}^3$ muni d'un repère orthonormé, on considère le plan $\alpha$ d'équation

$$2x - 7y + 3z = 3\ .$$

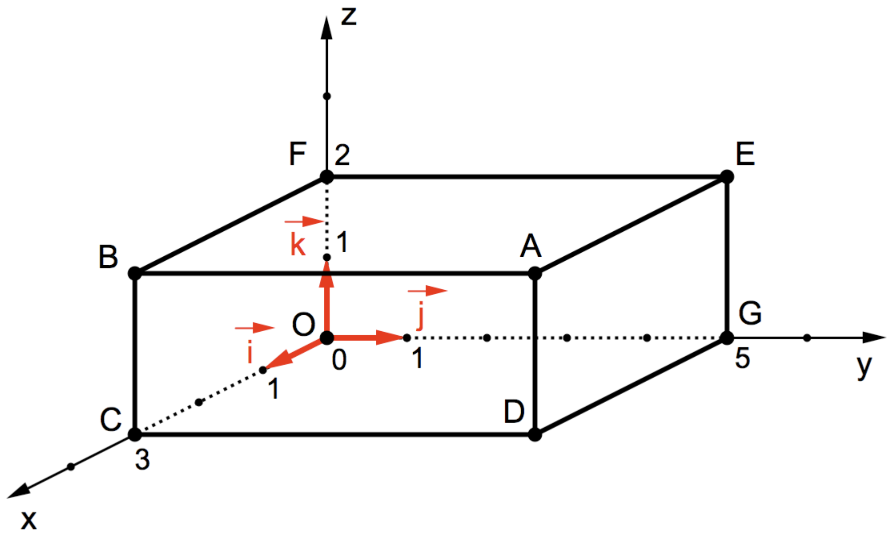
Quelle est une équation du plan symétrique de $\alpha$ par rapport au plan $z = 0$ ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $7x - 2y + 3z = 3$ | C | $2x + 7y - 3z = 3$ |
| B | $7x + 2y + 3z = 3$ | D | $2x - 7y - 3z = 3$ |

# 2. Équations d'une droite

## 2.1. Exemples

Comme pour les plans, nous allons commencer par des cas particuliers.
Pour nos deux premiers exemples, observons la figure suivante.




**Exemple 1**

À quelles conditions un point quelconque $P(x,y,z)$ appartient-il à la droite $AB$ ?

Comme la droite $AB$ est l'intersection des plans $ABCD$ et $ABFE$, il faut que le point $P$ appartienne <u>simultanément</u> à ces deux plans .
Or, tout point du plan $ABCD$ a pour abscisse 3 (une équation de ce plan est $x = 3$ ), tandis que tout point du plan $ABFE$ a pour hauteur 2 (une équation de ce plan est $z = 2$ ).

Le point $P$ doit donc satisfaire à deux conditions pour appartenir à la droite $AB$ :

$$x = 3 \text{ et } z = 2 .$$

Ce sont les équations cartésiennes de la droite $AB$. Nous écrirons ainsi :

$$\boxed{AB \equiv \begin{cases} x = 3 \\ z = 2 \end{cases} .}$$

Remarquons qu'il n'y a pas de condition sur $y$ . C'est normal car $AB$ est parallèle à l'axe $y$ .

**Exemple 2**

À quelles conditions un point quelconque $P(x,y,z)$ appartient-il à la droite $AF$ ?
Le raisonnement est analogue à celui de l'exemple 1 .

La droite $AF$ est l'intersection des plans $ABFE$ et $AFOD$ .
Il faut donc que le point $A$ satisfasse <u>simultanément</u> aux équations de ces deux plans.

Nous savons déjà que $ABFE$ a pour équation $z = 3$ .

Dans le plan $AFOD$, il n'y a pas de condition sur $z$.
Comme ce plan comprend les points $(0,0,0)$ et $(2,4,0)$, son équation est $y = 2x$ (justifiez ; voir exercice n°3 page 6 , plan $ORU$).

Les équations cartésiennes de $AF$ sont donc $z = 3$ et $y = 2x$.

$$\boxed{AF \equiv \begin{cases} z = 3 \\ y = 2x \end{cases}.}$$

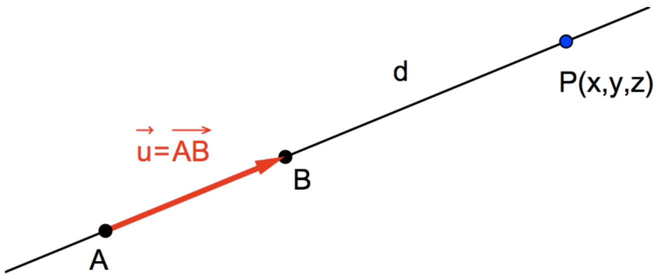
*Ces deux premiers exemples nous suggèrent qu'une droite de l'espace possède deux équations cartésiennes.*
*Chacune de ces équations est l'équation d'un plan contenant cette droite.*

**Exemple 3**

Si la droite n'a rien de particulier, nous allons reproduire la démarche « équations vectorielle-paramétriques-cartésiennes ».

Soit la droite $d$ comprenant les points $A(1,-3,-2)$ et $B(3,-2,1)$.

***Équation vectorielle***




Pour qu'un point $P\ (x, y, z)$ appartienne à la droite $AB$, il faut et il suffit que les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient *colinéaires*, c'est-à-dire multiples l'un de l'autre.

En langage symbolique, cela se traduit par l'égalité $\overrightarrow{AP} = k.\overrightarrow{AB}$ où $k$ est un nombre réel.

Transformons cette égalité :

$$\overrightarrow{AP} = k.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = k.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = k.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = k.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}.$$

Nous utiliserons dorénavant cette forme d'équation vectorielle de la droite $d = AB$ :

$$\boxed{d \equiv \overrightarrow{OP} = k.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un *vecteur directeur* de la droite tandis que le réel $k$ est un *paramètre*.

### *Équations paramétriques*

Comme précédemment, nous obtiendrons les équations paramétriques en utilisant les composantes des vecteurs de l'équation vectorielle.

$$\overrightarrow{OP} = k.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k . \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k+1 \\ k-3 \\ 3k-2 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons le système d'*équations paramétriques* de la droite $d$ :

$$\boxed{d \equiv \begin{cases} x = 2k + 1 & (1) \\ y = k - 3 & (2) \\ z = 3k - 2 & (3) \end{cases}}$$

### *Équations cartésiennes ( forme « système » )*

Éliminons d'abord le paramètre $k$ entre les équations (1) et (2) .

1 x (1) : $x = 2k + 1$

2 x (2) : $2y = 2k - 6$

soustraction $x - 2y = 7$ (4)

L'équation obtenue est celle d'un *plan* qui contient la droite $AB$ .

Cela ne suffit pas : il nous faut une deuxième équation de plan !
Il faut en effet *déterminer* la droite $d$ comme intersection de deux plans sécants.

Nous avons le choix d'éliminer $k$ entre les équations (1) et (3) ou entre les équations (2) et (3) . Choisissons cette seconde possibilité :

3 x (2) : $3y = 3k - 9$

1 x (3) : $z = 3k - 2$

soustraction $3y - z = -7$ (5)

Nous avons ainsi notre deuxième équation de plan. Les équations (4) et (5) *déterminent* la droite $d$ ; elle constituent un *système d'équations cartésiennes* de $d$ .

$$\boxed{d \equiv \begin{cases} x - 2y - 7 = 0 \\ 3y - z + 7 = 0 \end{cases}}$$

Toute droite de l'espace est déterminée par un système de deux équations cartésiennes du premier degré à trois inconnues.
Tout point de cette droite possède une coordonnée qui est solution de ce système.

Par exemple, le point $T(9, 1, 10)$ appartient à la droite d car $\begin{cases} 9-2.1-7=0 \\ 3.1-10+7=0 \end{cases}$.

***Forme « symétrique » des équations cartésiennes***

Voici une autre façon très pratique d'obtenir des équations cartésiennes de $d$.

À tout point $P(x,y,z)$ appartenant à $d$, il correspond une seule valeur de $k$, *identique* dans les trois équations paramétriques.

Isolons $k$ dans chacune de ces équations.

Nous avons $d \equiv \begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = k - 3 \\ z = 3k - 2 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} k = \dfrac{x-1}{2} \\ k = y+3 \\ k = \dfrac{z+2}{3} \end{cases}$.

En égalant les expressions des seconds membres, nous obtenons la forme dite « symétrique » des équations cartésiennes de $d$ :

$$\boxed{d \equiv \frac{x-1}{2} = y+3 = \frac{z+2}{3}}$$

Il est intéressant de remarquer que :

- la coordonnée du point $A(1,-3,-2)$ se « retrouve » aux numérateurs ;
- les composantes du vecteur directeur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ se « retrouvent » aux dénominateurs ;
- la forme symétrique permet de retrouver le système d'équations cartésiennes trouvé précédemment (au bas de la page 10) :

  a) $\dfrac{x-1}{2} = y+3 \quad \Rightarrow \quad x-1 = 2y+6 \quad \Rightarrow \quad x-2y-7=0$

  b) $y+3 = \dfrac{z+2}{3} \quad \Rightarrow \quad 3y+9 = z+2 \quad \Rightarrow \quad 3y-z+7=0$

## 2.2. Formulaire pour les équations de droites

Soit une droite $d$ comprenant le point $A(a_1, a_2, a_3)$ .

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $d$ .

Si $P(x, y, z)$ est un point quelconque de $d$ , nous avons pour celle-ci :

- une équation vectorielle : $d \equiv \overrightarrow{OP} = k\,.\vec{u} + \overrightarrow{OA}$ (où $k$ est un paramètres réel)
- des équations paramétriques : $d \equiv \begin{cases} x = k u_1 + a_1 \\ y = k u_2 + a_2 \\ z = k u_3 + a_3 \end{cases}$
- des équations cartésiennes : $d \equiv \begin{cases} a x + b y + c z + d = 0 \\ e x + f y + g z + h = 0 \end{cases}$

  (où les équations du système sont des équations cartésiennes de deux plans $\pi_1$ et $\pi_2$ tels que $\pi_1 \cap \pi_2 = d$ )
- des équations cartésiennes sous forme symétrique : $d \equiv \dfrac{x - a_1}{u_1} = \dfrac{y - a_2}{u_2} = \dfrac{z - a_3}{u_3}$

  ( si cette expression a du sens : $u_1 \neq 0$ , $u_2 \neq 0$ et $u_3 \neq 0$ ) .

# Exercices

***Refaites la démarche complète de l'exemple 3 (pages 9 à 11)***

1. Déterminez des équations vectorielle, paramétriques et cartésiennes (sous forme « système » et sous forme « symétrique » ) de la droite $d$ déterminée par les points $A(5, 0, 1)$ et $B(7, 1, 0)$ .

---

***Des droites particulières***

2. Déterminez des équations cartésiennes de chacun des axes de coordonnées : $Ox$ , $Oy$ et $Oz$ .

---

3. Observez la figure de la page 8 pour déterminer des équations cartésiennes de chacune des droites suivantes : $AE$ , $AD$ , $CD$ , $CG$ , $BF$ , $AG$ , $OB$ , $OD$ , $OE$ , $FG$ et $FC$ .

***Retour sur des droites quelconques***

4. Voici des équations paramétriques d'une droite : $d \equiv \begin{cases} x = 2k - 1 \\ y = 5k + 3 \\ z = -k + 2 \end{cases}$.

   a) Déterminez un point et un vecteur de $d$.

   b) Le point $K(-5, -7, 0)$ appartient-il à $d$ ?

   c) Un point $L$ de $d$ a pour ordonnée $23$ ; calculez ses autres coordonnées.

   d) Déterminez des équations cartésiennes de $d$.

---

5. Même exercice qu'au numéro 4 avec $d \equiv \begin{cases} x = k - 12 \\ y = k - 14 \\ z = -3k + 21 \end{cases}$.

---

6. Déterminez des équations cartésiennes de la droite comprenant le point $P(-3, 1, 5)$ et parallèle à la droite $AB$ avec $A(6, 4, 2)$ et $B(7, 4, 1)$.

---

7. Déterminez des équations cartésiennes de la droite comprenant le point $Q(2, 0, 0)$ et parallèle à la droite $CD$ avec $C(0, 5, 0)$ et $B(0, 0, 3)$.

---

8. Déterminez un point et un vecteur directeur de chacune des droites suivantes.

   a) $a \equiv \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z}{6}$

   b) $b \equiv x + 3 = 2y + 1 = 8z$

---

9. Déterminez les coordonnées du point de cote $5$ de la droite $d \equiv \begin{cases} x + 3y - z = -4 \\ 2x - y + 2z = 19 \end{cases}$.

---

10. Déterminez les coordonnées du point d'ordonnée $4$ de la droite $e \equiv x - 1 = 2y - 4 = 3z + 9$.

---

11. Écrire des équations de la droite comprenant le point $R(-1, 1, 2)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

---

12. Déterminez les réels $a$ et $b$ pour que la droite $d$ comprenne le point $S$ donné.

    a) $d \equiv 2x - a = y + 3 = b - 2z$ et $S(1, 2, 3)$ ;

    b) $d \equiv ax + 1 = 2 - ay = b(z - 1)$ et $S(1, 2, -2)$.

---

13. Écrire des équations cartésiennes de chacune des trois droites comprenant le point $T(1, 2, -3)$ et parallèles à un des axes de coordonnées $Ox$, $Oy$ et $Oz$.

## 3. Vecteur normal à un plan : théorème

Soit un plan $\pi \equiv ax+by+cz+d=0$ (avec $a$, $b$ et $c$ des réels non simultanément nuls).

Soit $A(a_1,a_2,a_3)$ un point fixe de $\pi$ et $P(x,y,z)$ un point quelconque, variable dans $\pi$.

Exprimons que les coordonnées de ces points sont solutions de l'équation de $\pi$ :

$$P(x,y,z)\in\pi \quad\Rightarrow\quad a.x+b.y+c.z+d=0 \qquad (1) \qquad \text{(évidemment)}$$

$$A(a_1,a_2,a_3)\in\pi \quad\Rightarrow\quad a.a_1+b.a_2+c.a_3+d=0 \qquad (2)$$

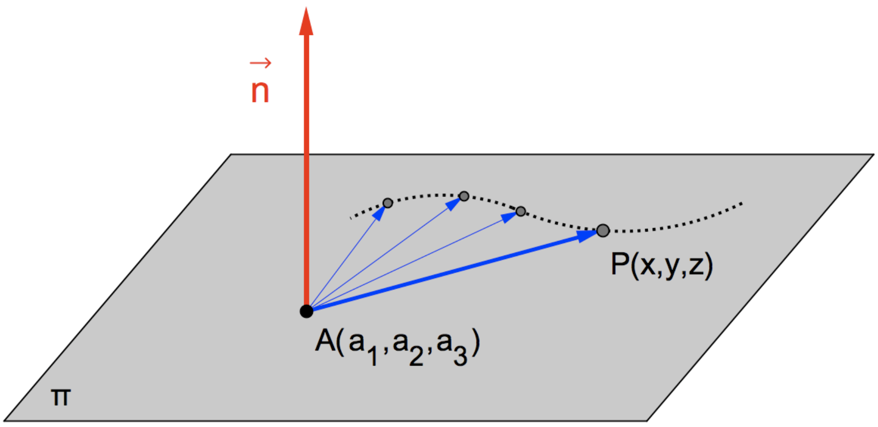
Soustrayant membre à membre l'égalité (2) de l'égalité (1), nous obtenons successivement :

$$a.x-a.a_1+b.y-b.a_2+c.z-c.a_3=0$$

$$a.(x-a_1)+b.(y-a_2)+c.(z-a_3)=0 \qquad (3)$$

La dernière égalité exprime que le produit scalaire des vecteurs $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x-a_1\\y-a_2\\z-a_3\end{pmatrix}$ vaut $0$.

Appelons $\vec{n}$ le vecteur $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. L'autre vecteur n'est autre que $\overrightarrow{AP}$.




Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont donc orthogonaux. Comme le point $P$ est *quelconque* dans $\pi$, le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à *tout* vecteur $\overrightarrow{AP}$. Par conséquent $\vec{n}$ est orthogonal à $\pi$ lui-même. Nous appellerons $\vec{n}$ un « vecteur normal » de $\pi$.

> **Théorème du vecteur normal**
>
> L'espace étant muni d'un repère orthonormé, le vecteur $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est normal (orthogonal) au plan $\pi \equiv ax+by+cz+d=0$.

**Exercices**

Nous travaillons dans un repère orthonormé de l'espace.

1. Pour chacun des plans suivants, donnez les composantes d'un vecteur normal.

   a) $\alpha \equiv 3x + y - 2z + 7 = 0$

   b) $\beta \equiv -5x + 2y = -7$

   c) $\gamma \equiv z = 3$

---

2. Déterminez une équation cartésienne du plan comprenant le point $A(400, 5, 8)$ et perpendiculaire au vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

---

3. a) Démontrez la formule encadrée ci-dessous.

   b) Utilisez cette formule pour déterminer une équation cartésienne du plan $\pi$ ayant pour vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et comprenant le point $A(3,4,5)$.

***Une formule pratique***

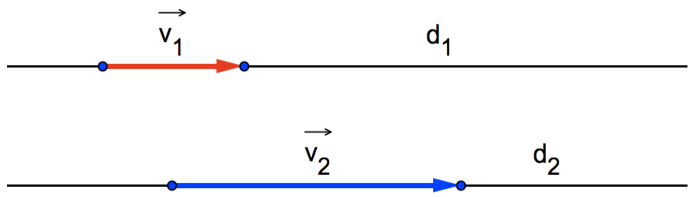
Si un plan $\pi$ a pour vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et comprend le point $A(a_1, a_2, a_3)$, alors :

$$\pi \equiv a.(x - a_1) + b.(y - a_2) + c.(z - a_3) = 0 \ .$$

# 4. Conditions de parallélisme et de perpendicularité

Nous travaillons toujours dans un repère orthonormé de l'espace.

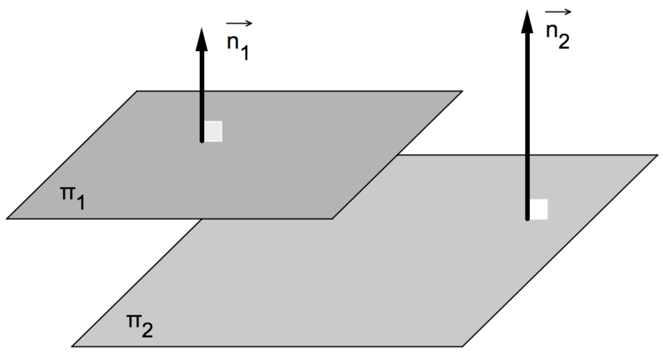
## 4.1. Parallélisme de deux droites




Les droites $d_1$ et $d_2$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont parallèles :

$$d_1 \,//\, d_2 \;\Leftrightarrow\; \exists\, k \in R \;:\; \vec{v_1} = k.\vec{v_2}$$

## 4.2. Parallélisme de deux plans




Les plans $\pi_1$ et $\pi_2$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont parallèles :

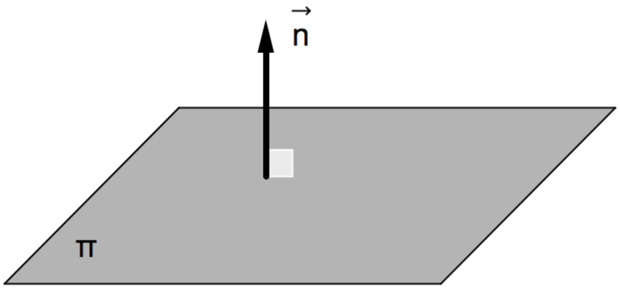
$$\pi_1 \,//\, \pi_2 \;\Leftrightarrow\; \exists\, k \in R \;:\; \vec{n_1} = k.\vec{n_2}$$

***Autre formulation du critère***

Soient les plans $\pi_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ et $\pi_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$ .

$$\pi_1 \,//\, \pi_2 \;\Leftrightarrow\; \exists\, k \in R \;:\; \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = k.\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \exists\, k \in R \;:\; \begin{cases} a_1 = k.a_2 \\ b_1 = k.b_2 \\ c_1 = k.c_2 \end{cases}$$

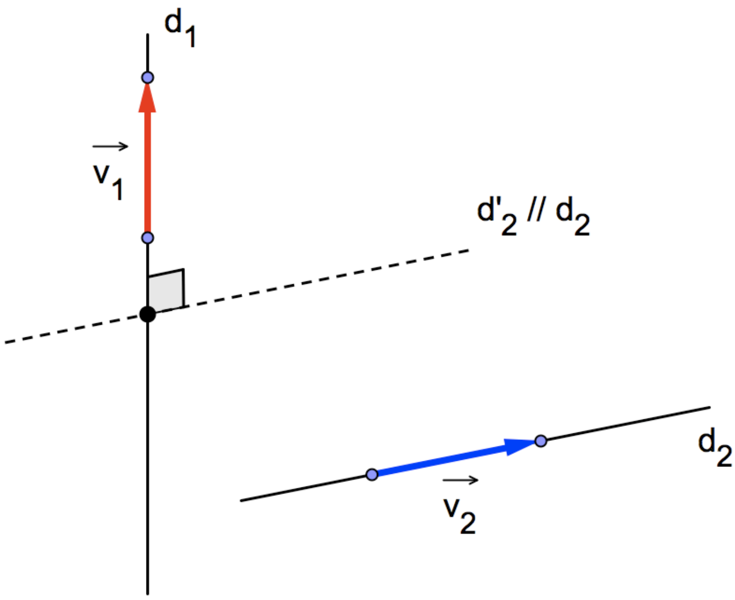
### 4.3. Parallélisme d'une droite et d'un plan


La droite $d$ de vecteur directeur $\vec{v}$ et le plan $\pi$ de vecteur normal $\vec{n}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux :

$$d \,//\, \pi \iff \vec{v} \bullet \vec{n} = 0$$ (le symbole « • » désigne le produit scalaire)

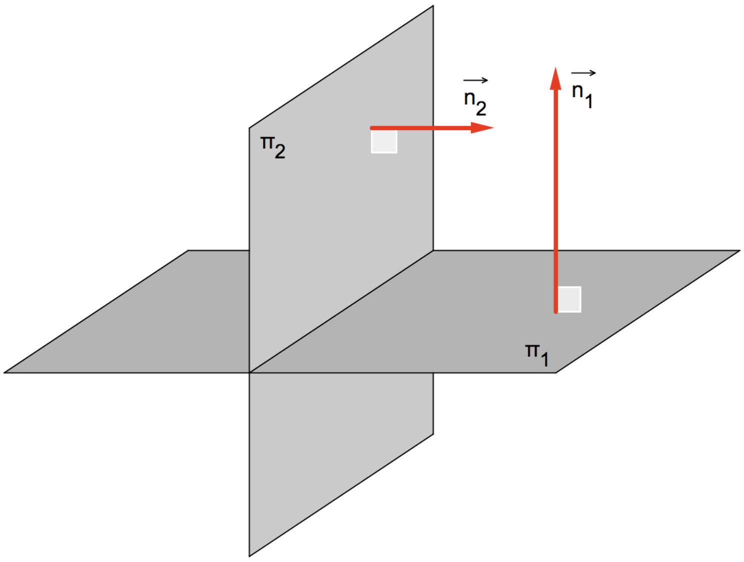
### 4.4. Orthogonalité de deux droites




Les droites $d_1$ et $d_2$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont orthogonales si et seulement si les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont orthogonaux :

$$d_1 \perp d_2 \iff \vec{v_1} \bullet \vec{v_2} = 0$$

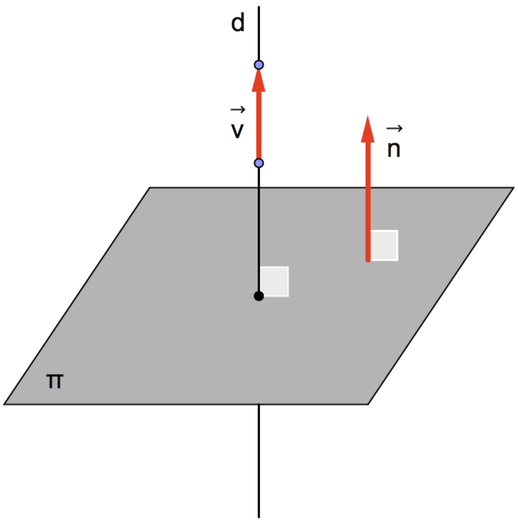
### 4.5. Perpendicularité de deux plans




Les plans $\pi_1$ et $\pi_2$ de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux :

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \bullet \overrightarrow{n_2} = 0$$

### 4.6. Perpendicularité d'une droite et d'un plan




La droite $d$ de vecteur directeur $\vec{v}$ est perpendiculaire au plan $\pi$ de vecteur normal $\vec{n}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{n}$ sont parallèles :

$$d \perp \pi \Leftrightarrow \exists\, k \in R : \vec{v} = k . \vec{n}$$

**Exercices**

1. Pour chacune des affirmations suivantes, déterminez si elle est vraie ou fausse. Justifiez en utilisant les critères des pages 16 à 18.

   a) Les droites $a \equiv x-1 = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{5}$ et $b \equiv \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{15}$ sont parallèles.

   b) Les plans $\pi_1 \equiv 2x-3y+z-1=0$ et $\pi_2 \equiv 4x-6y+z-4=0$ sont parallèles.

   c) La droite $d \equiv -x = y = z$ est parallèle au plan $\pi \equiv 2x-3y+z-1=0$ .

   d) Les droites $c \equiv 2x = y-9 = \frac{z+1}{2}$ et $d \equiv \frac{x}{6} = -y+1 = -z$ sont orthogonales.

   e) La droite $a \equiv x-1 = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{5}$ est perpendiculaire au plan $\pi \equiv \frac{x}{2} + y + \frac{5z}{2} - 7 = 0$ .

   f) Les plans $\alpha \equiv 3x+4z=0$ et $\beta \equiv 12x+y-9z+1=0$ sont perpendiculaires.

---

2. Soit la droite $d \equiv \begin{cases} 2x-7y+z-8=0 \\ -y+z+4=0 \end{cases}$ .

   a) Déterminez deux points de $d$ et déduisez-en un vecteur directeur.

   b) La droite $d$ est-elle parallèle au plan $\pi \equiv 4x-7y-5z+3=0$ ?

---

3. Soient les droites $d_1 \equiv \begin{cases} 2x-1=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$ et $d_2 \equiv \begin{cases} x-y-1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$ .

   a) Déterminez deux points de $d_1$ et déduisez-en un vecteur directeur.

   b) Faites de même pour la droite $d_2$ .

   c) Les droites $d_1$ et $d_2$ sont-elles orthogonales ?

   d) La droite $d_1$ est-elle perpendiculaire au plan $\pi \equiv 3x+y-z-1=0$ ?

---

4. Déterminez des équations cartésiennes de la droite comprenant le point $P(1,2,-1)$ et perpendiculaire au plan
$$\pi \equiv x+2y-3z=0 .$$

---

5. Déterminez une équation cartésienne du plan comprenant le point $Q(2,1,-3)$ et perpendiculaire à la droite
$$d \equiv x = y-1 = 2-z .$$

6. On considère la droite $s \equiv \dfrac{x-1}{2} = y+1 = -z+1$ et le point $T(1,2,-1)$.

a) Déterminez des équations cartésiennes de la droite $t$ passant par $T$ et parallèle à $s$.

b) Déterminez une équation cartésienne du plan $\pi$ passant par $T$ et perpendiculaire à $s$.

c) Calculez les coordonnées du point $S$ où $s$ coupe $\pi$.

d) Calculez la distance entre $S$ et $T$ (il s'agit aussi de la distance entre les droites parallèles $s$ et $t$ ! ).

---

7. On considère le plan $\alpha \equiv 2x - y + z - 1 = 0$ et le point $B(1,-1,1)$.

a) Déterminez une équation cartésienne du plan $\beta$ passant par $B$ et parallèle à $\alpha$.

b) Déterminez des équations de la droite $p$ passant par $B$ et perpendiculaire à $\alpha$.

c) Calculez les coordonnées du point $P$ où $p$ coupe $\alpha$.

d) Calculez la distance entre $B$ et $P$ (il s'agit aussi de la distance entre les plans parallèles $\alpha$ et $\beta$ ! ).

---

8. Déterminez le réel $k$ pour que les plans suivants soient perpendiculaires :

$$\theta \equiv 2x + 3y - 5z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad \varphi \equiv x + y + kz - 1 = 0 .$$

---

9. On considère les plans $\alpha \equiv 2x + y - z - 1 = 0$ et $\beta \equiv x - y + 2z + 1 = 0$.
Ces deux plans se coupent suivant la droite $d$.

a) Déterminez un vecteur directeur de $d$.

b) Déduisez-en une équation cartésienne du plan $\omega$ comprenant le point O (origine des axes) et perpendiculaire aux plans $\alpha$ et $\beta$.

---

10. Soient les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

a) Déterminez un vecteur $\vec{v}$ perpendiculaire à la fois au vecteur $\vec{a}$ et au vecteur $\vec{b}$.

b) Déduisez-en une équation cartésienne du plan $\pi$ ayant $\vec{a}$ et $\vec{b}$ comme vecteurs directeurs et comprenant le point $P(1,1,1)$.

**Exercices supplémentaires**

1. Déterminez le réel $k$ pour que le point $P\,(k, 2k, 3k)$ appartienne au plan $\pi \equiv 3x + y - 2z - 3 = 0$ .

---

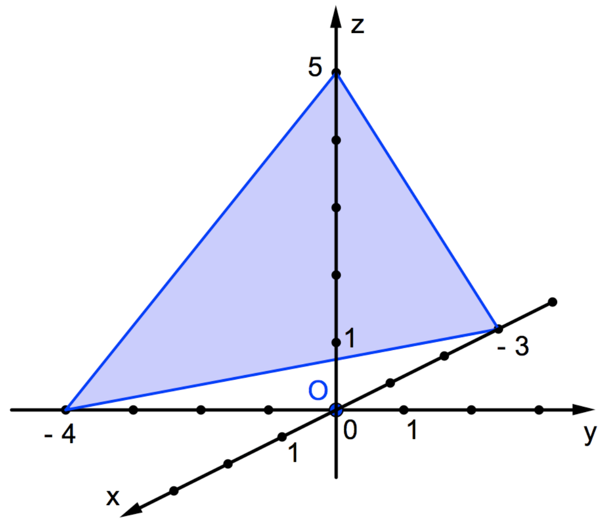
2. Déterminez les coordonnées des points d'intersection du plan $\alpha \equiv 4x + 6y - z - 12 = 0$ avec les axes du repère.

---

3. Soit le plan $\beta \equiv x - 3y + 2z = 6$ . Déterminez un vecteur directeur de chacune des droites d'intersection de $\beta$ avec les plans de coordonnées ( $xOy$ , $xOz$ et $yOz$) .

---

4. Donnez une équation cartésienne du plan représenté ci-dessous.




---

5. Déterminez une équation cartésienne du plan $\pi$ dont des équations paramétriques sont

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu + 3 \\ y = -\lambda + 2\mu + 4 \\ z = -\lambda + \mu + 5 \end{cases} .$$

---

6. Même question qu'au n°5 si $\pi \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = \lambda + 3\mu - 5 \\ z = -\lambda + \mu \end{cases} .$

---

7. On donne les droites $a \equiv x = 2y - 3 = 4z$ et $b \equiv -2x = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{-z-1}{2}$ .

   a) Après avoir déterminé un vecteur directeur pour chaque droite, vérifiez qu'elles sont orthogonales.

   b) Déterminez des équations cartésiennes de la droite $c$ , comprenant le point $P\,(-3, 0, 2)$ et parallèle à la droite $a$ .

8. Soit le plan $\pi \equiv 2x - 5y - 7z - 10 = 0$ .

   a) Déterminez une équation cartésienne du plan $\alpha$ comprenant l'origine du repère et parallèle à $\pi$ .

   b) Écrivez des équations cartésiennes d'une droite *quelconque* incluse dans $\pi$ .

---

9. Soit la droite $d \equiv x - 3 = \dfrac{2y+1}{4} = \dfrac{2-z}{3}$ .

   a) Cette droite est-elle parallèle au plan $\pi \equiv x - 2y - z - 1 = 0$ ?

   b) Calculez les coordonnées du point d'intersection de $d$ et du plan déterminé par l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

---

10. Soit la droite $d \equiv x = -y + 1 = \dfrac{z}{2}$ .

    Trouvez deux plans perpendiculaires dont l'intersection est la droite $d$ .

---

11. Soit le point $M\,(2,5,1)$ .

    a) Déterminez des équations cartésiennes de la droite $a$ comprenant $M$ et parallèle à l'axe des abscisses.

    b) Même question pour la droite $b$ comprenant $M$ et parallèle à l'axe des ordonnées.

    c) Même question pour la droite $c$ comprenant $M$ et parallèle à l'axe des cotes.

---

12. Calculez l'angle aigu formé par les plans $\alpha \equiv 3x - y + 2z = 5$ et $\beta \equiv x + y - 4z = 3$ .

---

13. Même question qu'au n°12 pour les plans $\delta \equiv y = 4$ et $\varepsilon \equiv -x + 2y + 3z = 0$ .

---

14. Soient les points $P\,(3,1,2)$ , $Q\,(2,3,1)$ et $R\,(-2,0,1)$ . Le point $S$ , d'abscisse $-2$ et de cote $3$ , appartient au plan $PQR$. déterminez l'ordonnée de $S$ .

---

15. Pour chacun des plans suivants, déterminez deux vecteurs directeurs non parallèles. Déduisez-en des équations paramétriques du plan.

    a) $\alpha \equiv x - 2y + z - 5 = 0$

    b) $\beta \equiv 3x - 2z = 12$

    c) $\gamma \equiv y = 4$

---

16. Déterminez les coordonnées du point W , symétrique du point $V\,(3,-2,1)$ par rapport au plan $\pi \equiv 3x - 2y + 5z - 1 = 0$ .

---

17. Déterminez une équation cartésienne du plan $\pi$ comprenant le point $M\,(3,0,-1)$ et perpendiculaire aux plans $\alpha \equiv 3x - 2y + z = 5$ et $\beta \equiv 2x + 3y - z = 1$ .

*Les quatre derniers exercices de cette série concernent des calculs de distances dans l'espace (ce sujet sera développé dans le paragraphe 5).*

18. Calculez la distance entre le point $P\,(0,0,1)$ et la droite $d \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$ .

---

19. Calculez la distance entre le point $M\,(1,0,1)$ et le plan $\pi \equiv 3x - y - z + 1 = 0$ .

---

20. Calculez la distance entre le point $K\,(2,1,3)$ et la droite $d \equiv \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 2 + k \quad (\, k \in \mathbf{R}\,) \\ z = 2k \end{cases}$ .

---

21. Calculez la distance entre le point $L\,(-1,2,0)$ et le plan $\pi \equiv \begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = 1 - \lambda + \mu \quad (\, \lambda\,,\ \mu \in \mathbf{R}\,) \\ z = 2 - \mu \end{cases}$ .

---

# 5. Distances dans l'espace

## 5.1. Distance entre deux points

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points donnés de l'espace.

Vous connaissez déjà la formule pour calculer la distance qui les sépare :

$$\boxed{d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

## 5.2. Distance entre un point et une droite

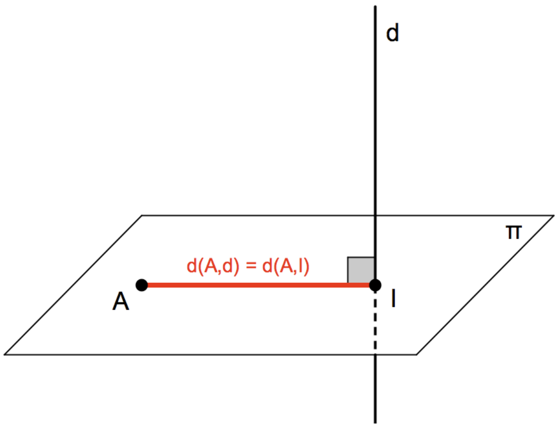
**Démarche**

1° Vérifiez si le point $A$ appartient à $d$ ou non (si $A \in d$ la distance est nulle).

2° Déterminez une équation cartésienne du plan auxiliaire $\pi$ comprenant $A$ et perpendiculaire à $d$.

3° Déterminez le point de percée $I$ de $d$ dans $\pi$.

4° $d(A,d) = d(A,I)$




## 5.3. Distance entre un point et un plan

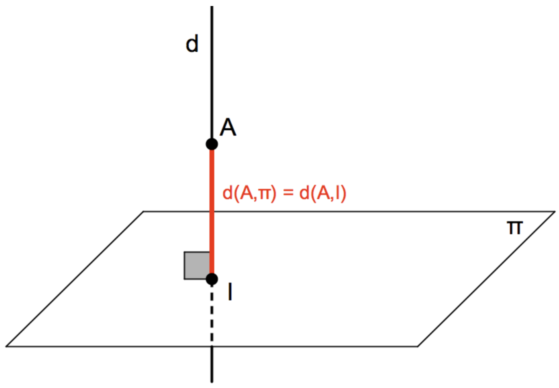
**Démarche**

1° Vérifiez si le point $A$ appartient à $\pi$ ou non (si $A \in \pi$ la distance est nulle).

2° Déterminez des équations cartésiennes de la droite auxiliaire $d$ comprenant $A$ et perpendiculaire à $\pi$.

3° Déterminez le point de percée $I$ de $d$ dans $\pi$.

4° $d(A,\pi) = d(A,I)$




Une formule existe (démonstration en annexe) :

La distance entre le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et le plan $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ est :

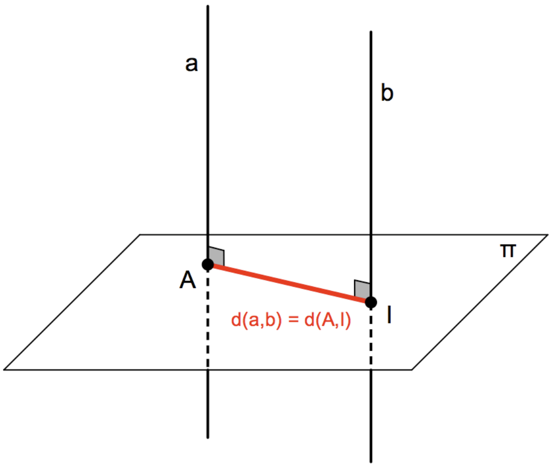
$$d(A,\pi) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

### 5.4. Distance entre deux droites parallèles

**Démarche**

1° Choisissez un point sur une des deux droites (par exemple, un point $A$ sur la droite $a$).

2° Calculez la distance entre ce point $A$ et le droite $b$ (voir 5.2.) .



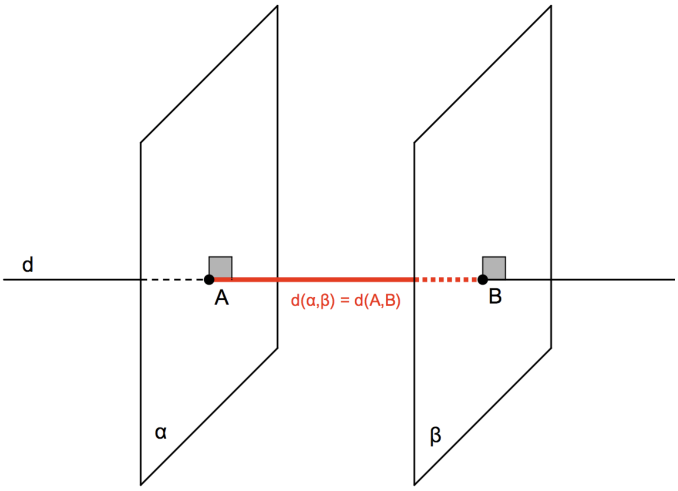

### 5.5. Distance entre deux plans parallèles

**Démarche**

1° Choisissez un point sur un des deux plans (par exemple, un point $A$ sur le plan $\alpha$).

2° Calculez la distance entre ce point $A$ et le plan $\beta$

(voir 5.3.) .




Avant d'aborder la distance entre deux droites gauches, quelques applications.

**Exercices**

1. Calculez la distance entre le point $A(2,0,-1)$ et la droite $d \equiv x-1=\frac{y+1}{2}=z-3$ .

---

2. Calculez la distance entre le point $A(3,1,0)$ et le plan $\pi \equiv 2x-y+3z+1=0$ .

---

3. Calculez la distance entre les droites parallèles (vérifiez tout de même ☺ )

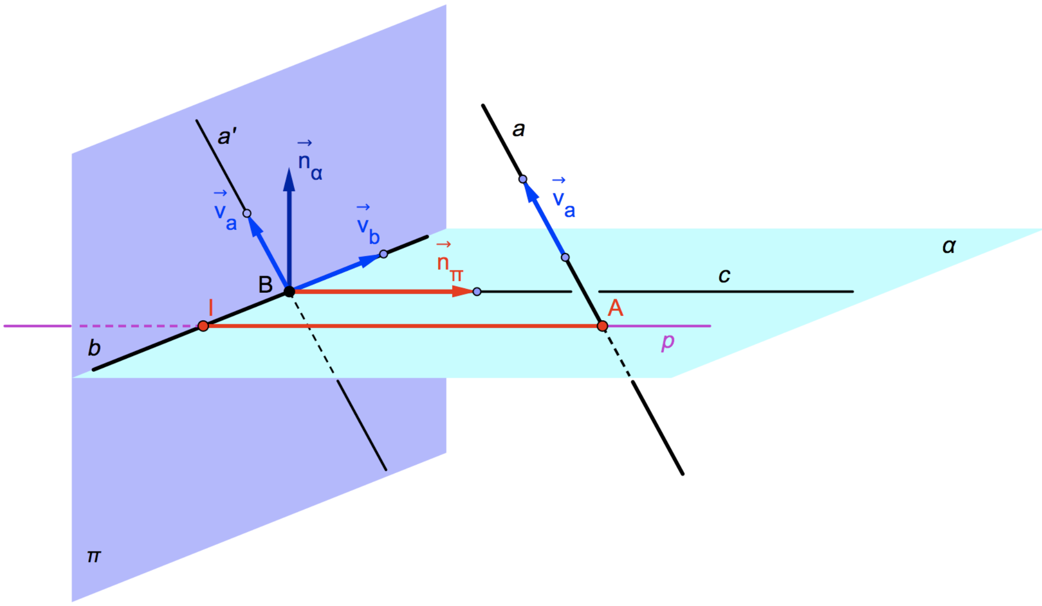
$$a \equiv \frac{x}{4}=\frac{1-y}{2}=z+2 \quad \text{et} \quad b \equiv \frac{x+3}{2}=2-y=2z \ .$$

---

4. Calculez la distance entre les plans $\alpha \equiv 4x-2y+6z=0$ et $\beta \equiv 2x-y+3z+5=0$ .

## 5.6. Distance entre deux droites gauches

La démarche permettant de construire la perpendiculaire commune à deux droites gauches est détaillée dans le fascicule « Géométrie synthétique de l'espace » à la page 76.
Nous reprenons ci-dessous le schéma illustrant la construction en y ajoutant les vecteurs qui entrent en jeu.




**Démarche** [1]

1° Trouvez un vecteur simultanément orthogonal à $\overrightarrow{v_a}$ et $\overrightarrow{v_b}$.
Nommez ce vecteur $\overrightarrow{n_\pi}$ car il est normal au plan $\pi$ formé par les droites $a'$ et $b$ ($a'$ étant la parallèle à la droite $a$ passant par $B$).

2° Déterminez une équation cartésienne du plan $\pi$.

3° Trouvez un vecteur simultanément orthogonal à $\overrightarrow{v_b}$ et $\overrightarrow{n_\pi}$.
Nommez ce vecteur $\overrightarrow{n_\alpha}$ car il est normal au plan $\alpha$ (avec $\alpha \supset b$ et $\alpha \perp \pi$).

4° Déterminez une équation cartésienne de $\alpha$.

5° Calculez les coordonnées du point de percée $A$ de $a$ dans $\alpha$.

6° Déterminez des équations (paramétriques) de la droite $p$ comprenant $A$ et perpendiculaire à $\pi$. Cette droite est parallèle à $c$ et à pour vecteur directeur $\overrightarrow{n_\pi}$.

7° Calculez les coordonnées du point de percée $I$ de $p$ dans $\pi$.

8° La droite $AI$ est la perpendiculaire commune aux droites $a$ et $b$. Calculez la distance entre le point $I$ et le point $A$ : c'est la distance entre les droites gauches $a$ et $b$.

---

[1] Cette démarche est générale. La procédure peut être plus simple dans certains cas particuliers.

**Exercice résolu**

On donne les points $O(0,0,0)$ , $A(4,2,1)$ , $B(2,0,0)$ et $C(0,0,1)$ .

a) Vérifiez rapidement que les droites $OA$ et $BC$ sont gauches.

b) Calculez la distance entre les droites $OA$ et $BC$ .

**Solution (non détaillée)**

a) La droite $BC$ est incluse dans le plan $xOz$ . Le point $O$ s'y trouve aussi mais n'est pas sur $BC$ .
Comme le point $A$ est extérieur au plan $xOz$ , les droites $BC$ et $OA$ sont gauches.

b) 1°/ $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_b} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;

$\overrightarrow{n_\pi} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur simultanément orthogonal à $\overrightarrow{v_a}$ et $\overrightarrow{v_b}$ .

2°/ $\pi \equiv x - 3y + 2z - 2 = 0$ .

3°/ $\overrightarrow{n_\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur simultanément orthogonal à $\overrightarrow{v_b}$ et $\overrightarrow{n_\pi}$ .

4°/ $\alpha \equiv 3x + 5y + 6z - 6 = 0$ .

5°/ $OA \cap \alpha = \{A\} = \left\{ \left( \frac{6}{7} , \frac{3}{7} , \frac{3}{14} \right) \right\}$ .

6°/ $p \equiv \begin{cases} x = \lambda + 6/7 \\ y = -3\lambda + 3/7 \\ z = 2\lambda + 3/14 \end{cases} \quad (\lambda \in R)$ .

7°/ $p \cap \pi = \{I\} = \left\{ \left( 1 , 0 , \frac{1}{2} \right) \right\}$ .

8°/ $d(OA, BC) = d(A, I) = \frac{\sqrt{14}}{7}$ .

Le problème suivant montre qu'une analyse lucide de la situation révèle que l'on se trouve dans un cas particulier et permet d'éviter la démarche précédente.

**Exercice résolu (ULB - examen d'admission 2015)**

Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormé $Oxyz$, on donne les points $A(1,0,0)$, $B(1,2,0)$, $C(1,2,3)$ et $D(3,2,1)$.

Donner des équations paramétriques de la perpendiculaire commune à $AB$ et $CD$.

**Solution**

Les points $A$ et $B$ ont à la fois la même abscisse $x=1$ et la même cote $z=0$.
Cette droite est donc parallèle à l'axe $Oy$ et est contenue dans le plan $xOy$.

Les points $C$ et $D$ ont la même ordonnée $y=2$ et la droite $CD$ est donc incluse dans le plan $\alpha \equiv y=2$. Ce plan est vertical et perpendiculaire à l'axe $Oy$, et il est donc aussi perpendiculaire à la droite $AB$.

Le point de percée de $AB$ dans $\alpha$ est clairement le point $B$ puisque son ordonnée vaut $2$ !

La droite $p$ comprenant $B$ et perpendiculaire à $CD$ est la perpendiculaire commune que nous cherchons. Elle est incluse dans $\alpha$ car $B$ s'y trouve et $CD$ aussi.
Une des équations cartésiennes de $p$ est dont $y=2$.

Par ailleurs, la droite $p$ est incluse dans le plan $\beta$ comprenant $B$ et perpendiculaire à $CD$.

Sachant que $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}=2.\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, et tenant compte de $B\in\beta$, on trouve : $\beta \equiv x-z-1=0$.

Les équations cartésiennes de la perpendiculaire commune sont donc : $\boxed{p\equiv\begin{cases}x-z-1=0\\ y=2\end{cases}}$.

Pour trouver des équations paramétriques, il suffit de poser $x=\lambda$ : $\boxed{p\equiv\begin{cases}x=\lambda\\ y=2 \qquad (\lambda\in R)\\ z=\lambda-1\end{cases}}$.

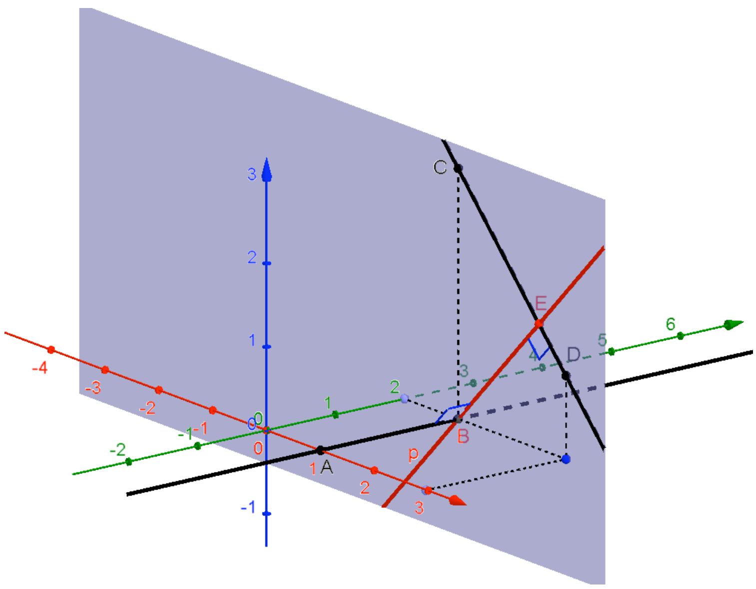
Voici une petite illustration réalisée avec GEOGEBRA 3D.

En gris, le plan $\alpha \equiv y=2$.

En rouge foncé, la droite $p$.

On a $p=BE$ où $E$ est le point de percée de $CD$ dans le plan $\beta \equiv x-z-1=0$ (non représenté).

La longueur du segment $[BE]$ est la distance entre les droites gauches $AB$ et $CD$.



# 6. Sphères

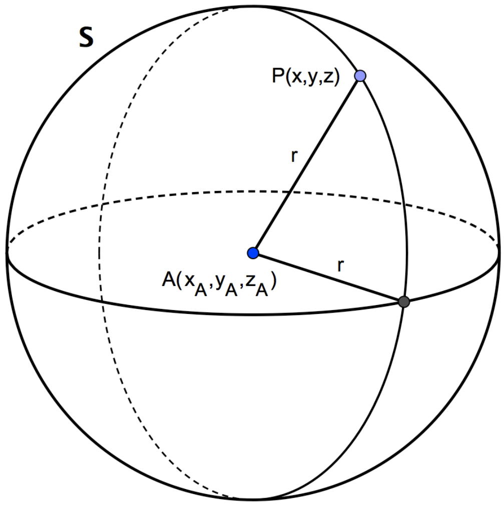
## 6.1. Définition

Une sphère est un lieu géométrique de points de l'espace situés à égale distance d'un point fixe donné.

Le point fixe donné est le *centre* de la sphère.
La distance entre un point quelconque de la sphère et son centre est le *rayon* de la sphère.

## 6.2. Équation cartésienne

Considérons une sphère **S** de centre $A(x_A, y_A, z_A)$ et de rayon $r$.




Un point $P(x, y, z)$ appartient à la sphère si et seulement si la distance entre $P$ et le centre $A$ est égale à $r$ :

$$\begin{aligned} P \in \mathbf{S} \quad &\Leftrightarrow \quad d(A,P) = r \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + (z-z_A)^2} = r \\ &\Leftrightarrow \quad (x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + (z-z_A)^2 = r^2 \end{aligned}$$

Les points de la sphère sont les seuls dont les coordonnées vérifient cette égalité.
En effet, la distance au centre de tout point *extérieur* à la sphère est *supérieure* à $r$, tandis que la distance au centre de tout point *intérieur* à la sphère est *inférieure* à $r$.

Dans un repère orthonormé du plan, l'équation cartésienne de la sphère **S** de centre $A(x_A, y_A, z_A)$ et de rayon $r$ est

$$S \equiv (x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + (z-z_A)^2 = r^2 .$$

Notez bien la ressemblance avec l'équation d'un cercle $C \equiv (x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 = r^2$ .
Le terme supplémentaire $(z-z_A)^2$ dans l'équation de la sphère est dû au fait qu'elle est un objet spatial, à trois dimensions, alors que le cercle est une courbe plane, à deux dimensions.

**Exercices**

1. Dans chacun des cas suivants, déterminez une équation cartésienne de la sphère de centre $A$ et de rayon $r$.

   a) $A(3,-1,4)$ et $r=5$

   b) $A(0,0,-3)$ et $r=3$

---

2. Déterminez les coordonnées du centre et le rayon de la sphère dont une équation est :

   a) $x^2+y^2+z^2-6y+4z=0$

   b) $x^2+y^2+z^2-2x+4z-5=0$

   c) $x^2+y^2+z^2-6x+12y-4z=0$

---

3. Déterminez une équation cartésienne de la sphère de centre $A(0,4,-3)$ et comprenant le point $P(4,1,-3)$.

---

4. Déterminez une équation cartésienne de la sphère dont un diamètre est $[\,\mathrm{D}\ \mathrm{E}\,]$ avec $D(2,3,1)$ et $E(-2,-1,3)$.

---

5. Déterminez les coordonnées des points de percée de la droite $d \equiv x=2y=z$ dans la sphère $S \equiv x^2+y^2+z^2-2x-4y-20=0$.

---

6. Une sphère **S** comprend les points $P(-2,2,0)$ et $Q(4,-2,0)$, et son centre est situé sur la droite $a \equiv x=y=z$.

   a) Déterminez une équation cartésienne de **S**.

   b) Déterminez les points d'intersection de **S** avec chacun des axes de coordonnées.

---

7. Précisez l'intersection de la sphère $S \equiv x^2+y^2+z^2-6x+12z+20=0$ avec chacun des plans de coordonnées ( $xOy$, $xOz$ et $yOz$ ).

---

8. Déterminez une équation cartésienne de la sphère **S** de rayon $10$ et comprenant les points $T(1,0,1)$, $U(0,1,1)$ et $V(2,1,3)$.

---

9. Soit la sphère $S \equiv x^2+y^2+z^2-4x-4z-1=0$.

   a) Calculez les coordonnées de son centre $A$ et déterminez son rayon $r$.

   b) Déterminez une équation cartésienne du plan tangent à **S** en son point $K(1,2,4)$.

   c) Le plan $\pi \equiv 2x-y-2z=5$ coupe **S** suivant le cercle **C**.
   Déterminez le centre et le rayon de **C**.

# 7. Systèmes de trois équations à trois inconnues

## (en lien avec les positions relatives de trois plans dans l'espace)

### 7.1. Exemple de système à solution unique ( « système de Cramer » )

Soit à résoudre le système $\begin{cases} x - y + 2z = 11 & (1) \\ 2x + y - z = -1 & (2) \\ 3x + 4y + 2z = 10 & (3) \end{cases}$.

Choisissons par exemple d'éliminer l'inconnue $z$ entre les équations (1) et (2) d'abord, entre les équations (1) et (3) ensuite.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 x (1) | $x - y + 2z = 11$ | 1 x (1) | $x - y + 2z = 11$ |
| 2 x (2) | $4x + 2y - 2z = -2$ | 1 x (3) | $3x + 4y + 2z = 10$ |
| (addition) | $5x + y = 9$ (4) | (soustraction) | $-2x - 5y = 1$ (5) |

Nous obtenons ainsi un système de deux équations d'inconnues $x$ et $y$ : $\begin{cases} 5x + y = 9 & (4) \\ -2x - 5y = 1 & (5) \end{cases}$.

Ce système admet comme solution $x = 2$ et $y = -1$ (vérifiez par une méthode de votre choix).
Il reste à remplacer ces valeurs dans une des équations de départ, par exemple dans (1) :

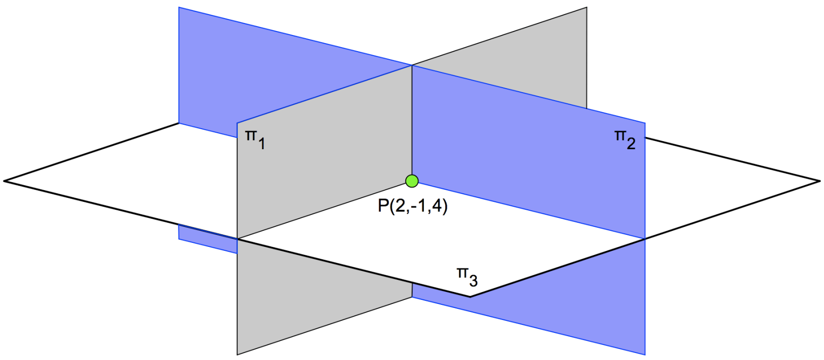
$$2 - (-1) + 2z = 11 \text{ ce qui donne } z = 4 .$$

Le système initial admet donc une *solution unique*. Nous noterons : $S = \{(2, -1, 4)\}$ .

**Interprétation géométrique**

Chaque équation du système est une équation cartésienne de plan.

Comme le système admet une solution unique, les trois plans sont sécants deux à deux et ont un seul point commun : $P(2,-1,4)$ .




La figure ci-dessus est une représentation possible de la situation (notez bien qu'aucun plan n'est perpendiculaire à un autre comme vous pouvez le vérifier grâce à leurs équations).

Exercice : résolvez le système suivant et interprétez géométriquement la solution

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 3y + z = 6 \end{cases}$$

## 7.2. Exemple de système impossible

Soit à résoudre le système $\begin{cases} 11x + 6y + 4z = 4 & (1) \\ -x + 3y + z = 5 & (2) \\ 3x + 4y + 2z = 6 & (3) \end{cases}$.

Tout comme dans l'exemple 7.1 , éliminons l'inconnue $z$ entre les équations (1) et (2) d'abord, entre les équations (1) et (3) ensuite.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 x (1) | $11x + 6y + 4z = 4$ | 1 x (1) | $11x + 6y + 4z = 4$ |
| 4 x (2) | $-4x + 12y + 4z = 20$ | 2 x (3) | $6x + 8y + 4z = 12$ |
| (soustraction) | $15x - 6y = -16 \quad (4)$ | (soustraction) | $5x - 2y = -8 \quad (5)$ |

Nous obtenons ainsi le système : $\begin{cases} 15x - 6y = -16 & (4) \\ 5x - 2y = -8 & (5) \end{cases}$.

Observez bien les équations obtenues : elles sont *incompatibles*.

En effet, si nous multiplions par $3$ les deux membres de l'équation (5) nous obtenons $15x - 6y = -24$ ce qui contredit l'égalité (4) où $15x - 6y = -16$ !

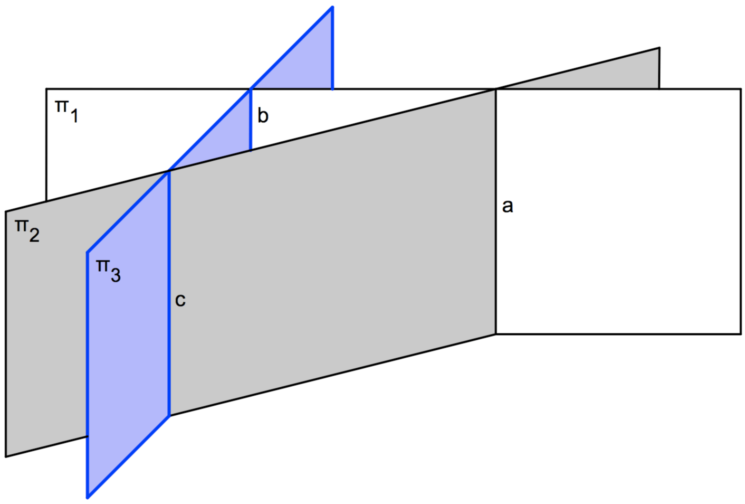
Le système formé par les équations (4) et (5) n'admettant pas de solution, le système initial n'a pas de solution non plus : il est dit *impossible*. Nous noterons $S = \varnothing$ .

**Interprétation géométrique**

Les équations du système sont des équations cartésiennes de plans $\pi_1$ , $\pi_2$ et $\pi_3$ .

L'examen des coefficients montre qu'aucun des trois plans n'est parallèle à un autre.

De plus, le système n'ayant pas de solution, il n'y a pas de point commun aux trois plans.




La conclusion est illustrée par la figure ci-dessus. Les plans sont sécants deux à deux et chacun d'eux est parallèle à la droite d'intersection des deux autres :

$$\pi_1 \cap \pi_2 = a \text{ et } \pi_3 // a \qquad \pi_1 \cap \pi_3 = b \text{ et } \pi_2 // b \qquad \pi_2 \cap \pi_3 = c \text{ et } \pi_1 // c .$$

Exercice : résolvez le système suivant et interprétez géométriquement la solution

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 5x + 2y + 4z = 1 \end{cases}$$

## 7.3. Exemple de système simplement indéterminé

Soit à résoudre le système $\begin{cases} x+y-z=2 & (1) \\ 2x+y-3z=0 & (2) \\ x-y-3z=-6 & (3) \end{cases}$.

Utilisons encore une fois la même technique pour éliminer l'inconnue $z$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 x (1) | $3x+3y-3z=6$ | 3 x (1) | $3x+3y-3z=6$ |
| 1 x (2) | $2x+y-3z=0$ | 1 x (3) | $x-y-3z=-6$ |
| (soustraction) | $x+2y=6$ (4) | (soustraction) | $2x+4y=12$ (5) |

Nous obtenons ainsi le système : $\begin{cases} x+2y=6 & (4) \\ 2x+4y=12 & (5) \end{cases}$.

Observez bien les équations obtenues : elles sont *équivalentes*.

En effet, si nous multiplions par 2 les deux membres de l'équation (4) nous obtenons l'équation (5) !
Le système formé par les équations (4) et (5) se ramène donc à une seule d'entre elles, par exemple $x+2y=6$.
Cette équation admet une infinité de solutions ; pour en trouver une, il faut donner une valeur à une des deux inconnues et calculer l'autre :

1° donnons une valeur quelconque à $x$ : $x=\lambda$

2° la valeur de $y$ correspondante est : $y=\dfrac{6-\lambda}{2}=3-\dfrac{\lambda}{2}$

3° remplaçons dans l'équation (1) pour trouver $z$ : $(\lambda)+\left(3-\dfrac{\lambda}{2}\right)-z=2 \rightarrow z=1+\dfrac{\lambda}{2}$.

Le système initial admet une infinité de solutions qui sont les triples de nombres réels

$$\left(\lambda\,,3-\frac{\lambda}{2}\,,1+\frac{\lambda}{2}\right).$$

Nous noterons $S=\left\{\left(\lambda\,,3-\dfrac{\lambda}{2}\,,1+\dfrac{\lambda}{2}\right) \mid \lambda\in R\right\}$.

Un tel système est dit *simplement indéterminé* ( « simplement » car il y a une seule valeur d'inconnue à donner, les deux autres se calculent ensuite).

**Interprétation géométrique**

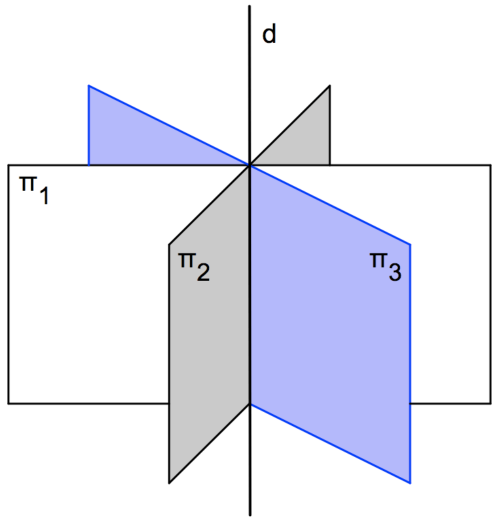
Les équations du système sont des équations cartésiennes de plans $\pi_1$, $\pi_2$ et $\pi_3$.
L'examen des coefficients montre que ces plans sont sécants deux à deux.

Or, le système possède une infinité de solutions, il y a donc une infinité de points communs aux trois plans. Et donc … une droite commune aux trois plans.

La conclusion est illustrée par la figure ci-contre.

Les trois plans se coupent suivant la droite $d$ :

$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = d \; .$$




Exercice : résolvez le système suivant et interprétez géométriquement la solution

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \\ x + 4y + 2z = 8 \end{cases}$$

**Exercices**

1. Résolvez les systèmes suivants et interprétez géométriquement la solution.

a) $\begin{cases} 8x + 5y + 2z = 27 \\ 7x - 4y - z = -7 \\ 9x - 6y - 3z = -15 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 2y - 3z = 7 \\ -2x + 6y - 4z = 14 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \\ x + 4y + 2z = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y + z = 10 \\ x + 2y - z = -6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 2y + 5z = 1 \\ x + y - 3z = 4 \\ -7x - y + 5z = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 10x + y + z = 5 \\ 4x - y - 3z = 0 \\ 3x + y + 2z = 6 \end{cases}$

2. Inventez un système d'équation dont l'interprétation géométrique est « deux plans parallèles et disjoints coupés par un troisième ». Quelle est sa solution ?

3. Un détour par la chimie ! Équilibrez les équations chimiques suivantes.

a) $\ldots\, Fe_7S_8 + \ldots\, O_2 \rightarrow \ldots\, Fe_3O_4 + \ldots\, SO_2$

b) $\ldots\, FeSO_4 + \ldots\, H_2SO_4 + \ldots\, HNO_3 \rightarrow \ldots\, Fe_2(SO_4)_3 + \ldots\, NO + \ldots\, H_2O$

c) $\ldots\, KMnO_4 + \ldots\, H_2SO_4 + \ldots\, KBr \rightarrow \ldots\, K_2SO_4 + \ldots\, Br_2 + \ldots\, MnSO_4 + \ldots\, H_2O$

*Version corrigée et complétée (28 janvier 2024)*
*André VANDENBRUAENE*