Étudier complètement la fonction $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2+1}$ et réaliser une représentation graphique.

1. Domaine de définition : $dom\ f = R$ car $\forall\, x \in R\ : x^2 + 1 \neq 0$.

2. Limites et asymptotes

a) Étant donné que $dom\ f = R$, il n'y a pas d'asymptote verticale.

b) Afin de déterminer s'il y a une asymptote horizontale, cherchons la limite de f en $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

Le graphique de f possède une asymptote horizontale : $AH \equiv y = 4$.

c) Il n'y a pas d'asymptote oblique car il y a déjà une asymptote horizontale.
En effet, une fonction rationnelle ne peut avoir simultanément une asymptote horizontale et une asymptote oblique.

3. Dérivée première et variations de *f*

$$f'(x) = \frac{\left(4x^2\right)'.\left(x^2+1\right) - \left(4x^2\right).\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{8x.\left(x^2+1\right) - 4x^2.2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{8x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Étudions le signe de la dérivée première afin d'en déduire les variations de f.
La seule racine du numérateur est 0 , tandis que le dénominateur n'a pas de racine.

x		0	
$8x$	-	0	+
$\left(x^2+1\right)^2$	+	+	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	Min	↗

Coordonnées de l'extremum : $Min\ \left(0, f(0)\right) = \left(0,0\right)$.

La fonction f
- est strictement décroissante dans $]-\infty\, , 0\,]$
- atteint un minimum en $x = 0$
- est strictement croissante dans $[\,0\, , +\infty\,[$

4. Dérivée seconde et concavités du graphique de *f*

$$f''(x)=\left(\frac{8x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)'=\frac{(8x)'.\left(x^2+1\right)^2-(8x).\left[\left(x^2+1\right)^2\right]'}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{8.\left(x^2+1\right)^2-8x.2.\left(x^2+1\right).2x}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$$=\frac{8\left(x^2+1\right).\left[\left(x^2+1\right)-4x^2\right]}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{8.\left(1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Étudions le signe de la dérivée seconde afin d'en déduire les concavités de G_f .

Les racines du numérateur sont $-\sqrt{1/3}$ et $\sqrt{1/3}$.

x		$-\sqrt{1/3}$		$\sqrt{1/3}$	
$8.\left(1-3x^2\right)$	-	0	+	0	-
$\left(x^2+1\right)^3$	+	+	+	+	+
$f''(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\frown$	PI_1	$\smile$	PI_2	$\frown$

Coordonnées des points d'inflexion :

$$PI_1\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\,,f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right)=\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\,,1\right)\ \text{ et }\ PI_2\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\,,f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right)=\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\,,1\right).$$

Le graphique de f

- tourne sa concavité vers le bas dans] - ∞ , $-\sqrt{1/3}$]
- admet un point d'inflexion en $x=-\sqrt{1/3}$
- tourne sa concavité vers le haut dans [$-\sqrt{1/3}$, $\sqrt{1/3}$]
- admet un point d'inflexion en $x=\sqrt{1/3}$
- tourne sa concavité vers le bas dans [$\sqrt{1/3}$, + ∞ [

5. Points supplémentaires

Racine de la fonction : $x=0$.

Ordonnée à l'origine : $f(0)=0$.

Cela ne nous apprend rien de plus. Calculons d'autre points : $(\pm1,2)$ et $\left(\pm2,\frac{16}{5}\right)=(\pm2,3.2)$.

6. Représentation graphique

Traçons d'abord l'asymptote et plaçons ensuite tous les points que nous avons trouvés. Ensuite, en lisant simultanément le tableau des variations et celui des concavités, traçons le graphique.