Étude d'une fonction polynôme (première partie)

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+1$.

Étudier les variations de f et calculer les coordonnées de ses extrema éventuels.

Toute fonction polynôme a pour domaine de définition l'ensemble **R** .

Dérivée première

$$f'(x)=\frac{3x^2}{6}+\frac{2x}{2}-\frac{3}{2}+0 \quad \rightarrow \quad f'(x)=\frac{x^2}{2}+x-\frac{3}{2}$$

Tableau des variations

Ce tableau découle du tableau de signes de f' .
Racines de f' : $\Delta = 4$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -3$

x		- 3		1	
f ' (x)	+	0	-	0	+
f (x)	↗	Max	↘	Min	↗

Conclusions

La fonction f

- est croissante dans l'intervalle] - ∞ , - 3]
- admet un maximum en x = 3 ; coordonnées (- 3 , f(-3)) = (- 3 , $\frac{11}{2}$)
- est décroissante dans l'intervalle [- 3 , 1]
- admet un minimum en x = 1 ; coordonnées (1 , f(1)) = (1 , $\frac{1}{6}$)
- est croissante dans l'intervalle [1 , + ∞ [

Limites

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{6}\right)=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{6}\right)=-\infty$$

Représentation graphique

Il est toujours bon de calculer quelques points supplémentaires pour compléter les résultats ci-dessus. Par exemple : f(-5) = 1/6 f(-4) = 13 / 3 f(0) = 1 f(2) = 4 / 3 etc.

Quand on sait calculer les racines de f , il faut le faire aussi (pour une fonction du 3^e degré, penser à la méthode de HORNER). Ici, ce n'est pas possible. Tout au plus peut-on calculer une approximation de la racine de f par la méthode de dichotomie, et on trouverait x ≈ - 5.03 (mais ce n'est pas le sujet).