Page 23

Déterminez les asymptotes verticales ou « points rouges » éventuels au graphique de chacune des fonctions suivantes. Positionnez le graphique par rapport à l'asymptote ou au point trouvé.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ $\quad dom\ f = R\setminus\{-3\}$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -3}\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}=\lim_{x\to -3}(x-3)=-6$$

Le graphique de f n'a pas d'asymptote verticale mais un point rouge en $(-3,-6)$.

b) $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2-16}$ $\quad dom\ f = R\setminus\{-4,4\}$

1° $\displaystyle\lim_{x\to -4}\frac{x^2-4x}{x^2-16}=\frac{32}{0}=\infty$

Étudions le signe du dénominateur :

x		- 4		4	
x^2-16	+	0	-	0	+

En tenant compte du fait que le numérateur est positif, nous obtenons :

$$\lim_{\substack{x\to -4\\ <}}\frac{x^2-4x}{x^2-16}=\frac{32}{0^+}=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to -4\\ >}}\frac{x^2-4x}{x^2-16}=\frac{32}{0^-}=-\infty\ .$$

Le graphique de f admet une asymptote verticale $AV \equiv x=-4$.

2° $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-16}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 4}\frac{x(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x}{x+4}=\frac{1}{2}$

Le graphique de f n'admet pas d'asymptote verticale en x = 4 mais un point rouge de coordonnées $\left(4,\dfrac{1}{2}\right)$.

Page 28

Déterminez les asymptotes horizontales éventuelles au graphique de chacune des fonctions suivantes. Positionnez ensuite le graphique de f par rapport à son (ou à ses) asymptote(s).

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-3}{4x+1}=\frac{\pm\infty}{\pm\infty}=\lim_{x\to -4}\frac{2x}{4x}=\frac{1}{2}$

Le graphique de f admet une asymptote horizontale $AH \equiv y=\dfrac{1}{2}$.

$f(-100)=\dfrac{-203}{-399}\approx 0{,}5088>\dfrac{1}{2}$ et $f(100)=\dfrac{197}{401}\approx 0{,}4913<\dfrac{1}{2}$ (graphique A page suivante).

b) $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3x+2}{1-x^2} = \frac{+\infty}{-\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

Le graphique de f admet une asymptote horizontale $AH \equiv y = -1$.

$$f(-100) = \frac{10\,302}{-9999} \approx -1{,}0303 < -1 \text{ et } f(100) = \frac{9\,702}{-9999} \approx -0{,}9703 > -1 \text{ (graphique B).}$$

c) $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-x+8}{x+3} = \frac{+\infty}{\pm\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$$

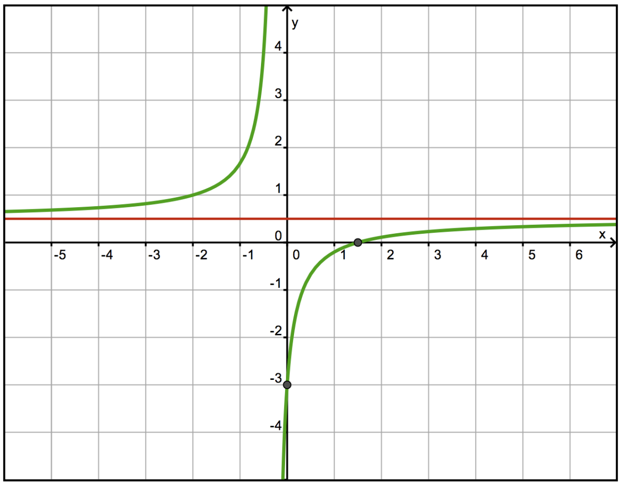
Le graphique de f ne possède pas d'asymptote horizontale, mais nous verrons qu'il possède une asymptote oblique (graphique C).

d) $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-x+3x^3}{2x+x^4} = \frac{\pm\infty}{+\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3}{x^4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{\pm\infty} = 0$$

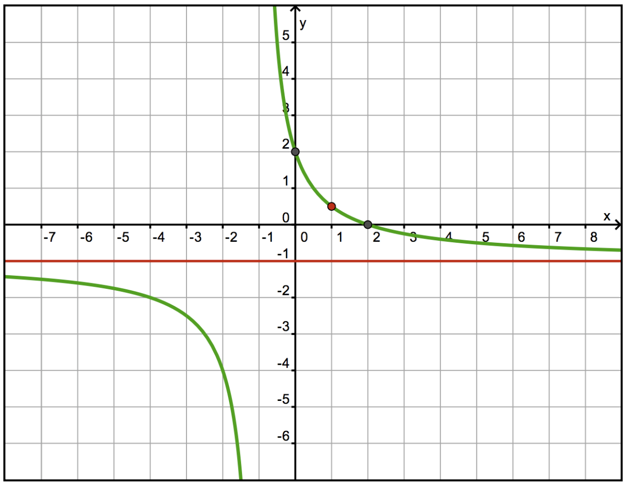
Le graphique de f admet une asymptote horizontale $AH \equiv y = 0$.

$$f(-10) = \frac{-2989}{9980} \approx -0{,}2995 < 0 \text{ et } f(10) = \frac{2991}{10020} \approx 0{,}2985 > 0 \text{ (graphique D).}$$

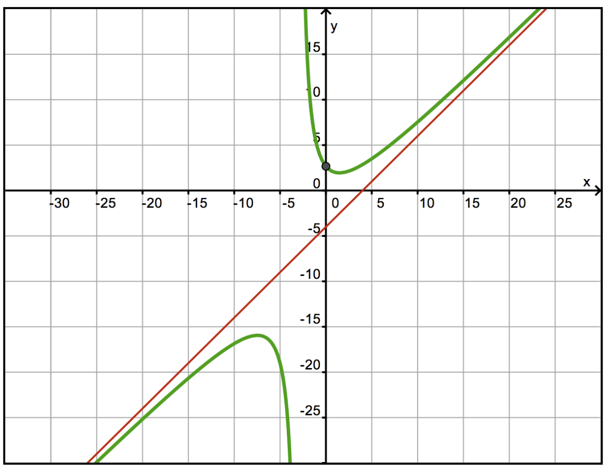
A



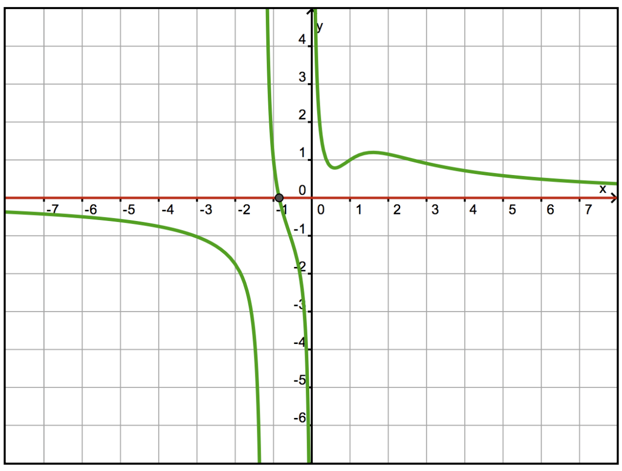
B



C



D



Page 35

Déterminez l'asymptote oblique au graphique de la fonction $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{2x-3}$ (a) .

La première formule de CAUCHY nous permet de calculer la pente de l'asymptote oblique :

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2+1}{(2x-3)x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2+1}{2x^2-3x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2}{2x^2}=2\ .$$

Connaissant la valeur de m , appliquons la seconde formule de CAUCHY pour trouver p :

$$p=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{4x^2+1}{2x-3}-2x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{4x^2+1-2x(2x-3)}{2x-3}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x+1}{2x-3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x}{2x}=3\ .$$

Le graphique de la fonction possède l'asymptote oblique $AO\equiv y=2x+3$.

Cherchons la position de G_f par rapport à cette asymptote.

1° $f(100)=\dfrac{40001}{197}\approx 203{,}05$ et $y(100)\overset{AO}{=}203$ (quand $x\to+\infty$, G_f est au-dessus de AO).

2° $f(-100)=\dfrac{40001}{-203}\approx -197{,}05$ et $y(-100)\overset{AO}{=}-197$ (quand $x\to-\infty$, G_f est au-dessous de AO).

Ces résultats sont confirmés par le graphique de f ci-dessous.