5^e B - C - D	Mai 2020

MATHÉMATIQUE (6h)

Corrigé de l'évaluation formative sur les limites de fonctions et asymptotes

1. En utilisant des suites de nombres et votre calculatrice, évaluez les limites suivantes. Exprimez ensuite votre résultat par une phrase bien construite.

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} \dfrac{1}{5-x} = -\infty$

x	f(x)
5,1	-10
5,01	-100
5,001	-1000
5,0001	-10000
5,00001	-100000
…	…

Toute suite de réels x , extraite du domaine de f et tendant vers 5 par valeurs supérieures, a pour image une suite de réels $f(x)$ tendant vers $-\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{x^2+x-6} = -\dfrac{1}{5}$

x	f(x)
-3,1	-0,1960784
-3,01	-0,1996008
-3,001	-0,19996
-3,0001	-0,199996
-3,00001	-0,1999996
…	…

x	f(x)
-2,9	-0,2040816
-2,99	-0,2004008
-2,999	-0,20004
-2,9999	-0,200004
-2,99999	-0,2000004
…	…

Toute suite de réels x , extraite du domaine de f et tendant vers -3 , a pour image une suite de réels $f(x)$ tendant vers - 0,2 = - 1/5 .

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2+1}{2x^2+x} = 3$

x	f(x)
10	2,861904762
100	2,985124378
1000	2,998501249
10000	2,999850012
100000	2,999985
…	…

Toute suite de réels x , extraite du domaine de f et tendant vers $+\infty$, a pour image une suite de réels $f(x)$ tendant vers 3 .

---

2. Traduisez chacune des phrases suivantes par une limite :

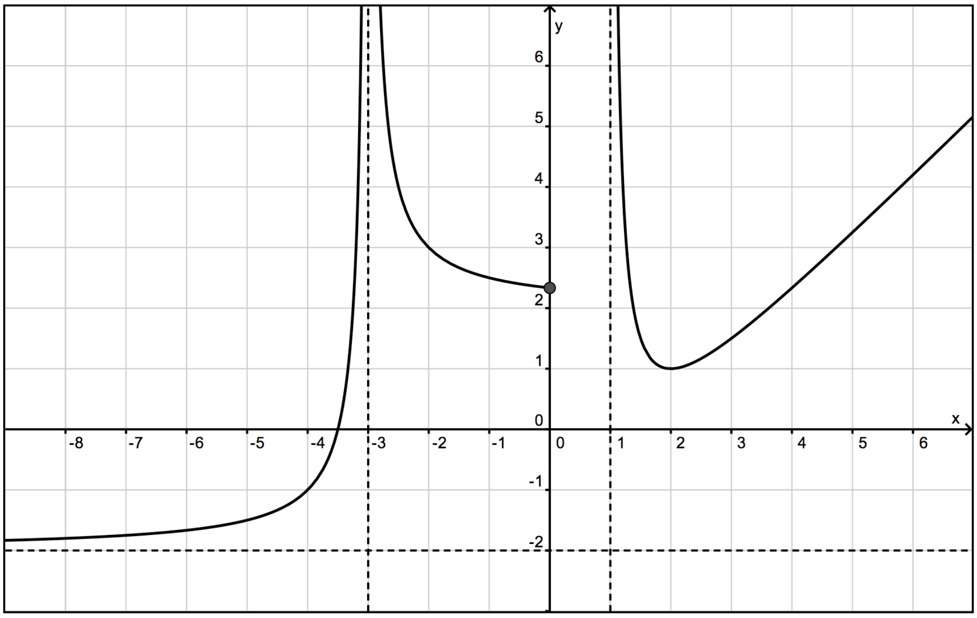
a) La fonction f peut prendre des valeurs aussi proches de 2 que l'on veut, il suffit de prendre des valeurs de x suffisamment grandes.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

b) La fonction f peut prendre des valeurs aussi petites que l'on veut, il suffit de prendre des valeurs de x suffisamment proches de 0 et positives.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$$

3. Voici le graphique d'une fonction f . À l'aide de ce graphique, déterminez les six limites demandées et précisez les équations des asymptotes éventuelles.



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

c) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 2{,}25$

e) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ *n'existe pas*

f) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$

La fonction possède : une asymptote horizontale AH $\equiv y = -2$ (voir limite (b))
une asymptote verticale AV $\equiv x = -3$ (voir limite (c))
une asymptote verticale AV $\equiv x = 1$ (voir limite (f))

La limite (e) n'existe pas car le domaine de la fonction est $]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[\setminus \{-3\}$.
Il est donc impossible de créer une suite de réels x tendant vers 0 par valeurs supérieures tout en restant dans le domaine.

---

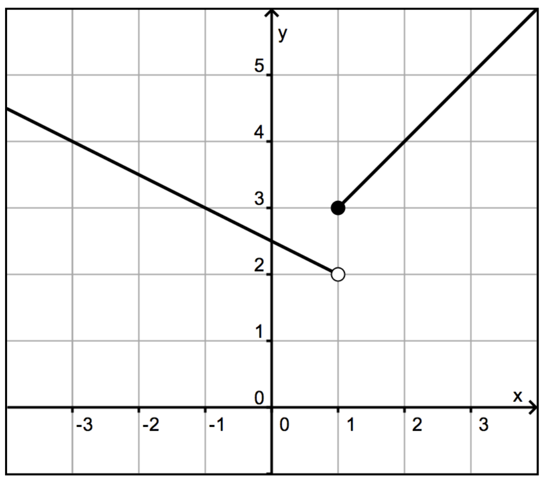
4. Déterminez les limites suivantes pour la fonction représentée ci-dessous :

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = 2$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 3$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

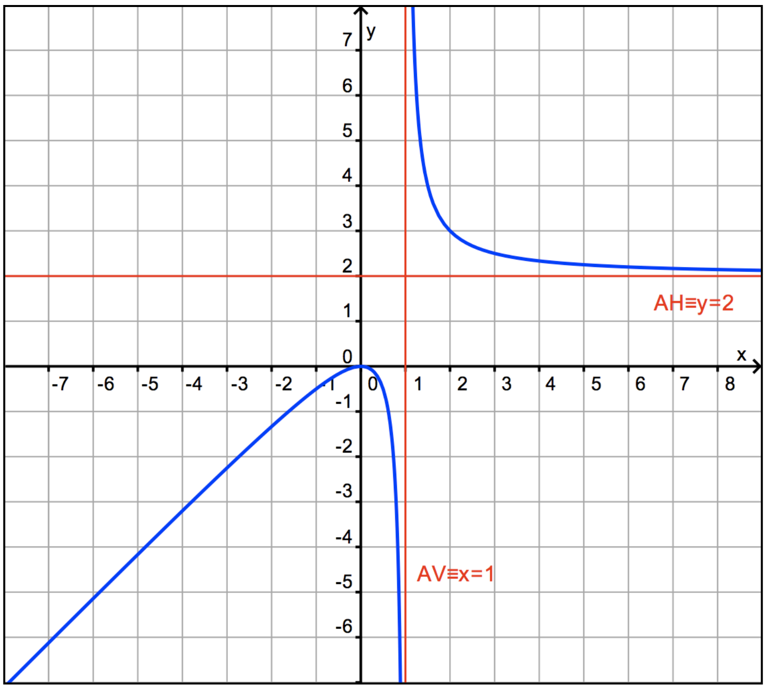


5. Représentez une fonction f vérifiant les quatre conditions suivantes :

1°/ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = -\infty$ 2°/ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = +\infty$ 3°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ 4°/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Les limites (1°) et (2°) montrent qu'il y a une asymptote verticale AV $\equiv x = 1$.
La limite (3°) montre qu'il y a une asymptote horizontale AH $\equiv y = 2$.
Il se peut qu'il y ait une asymptote oblique pour x tendant vers $-\infty$, mais la limite (4°) ne suffit pas à l'assurer.

Inutile de tracer une fonction avec des variations compliquées, voici un graphique parmi les plus simples possibles :



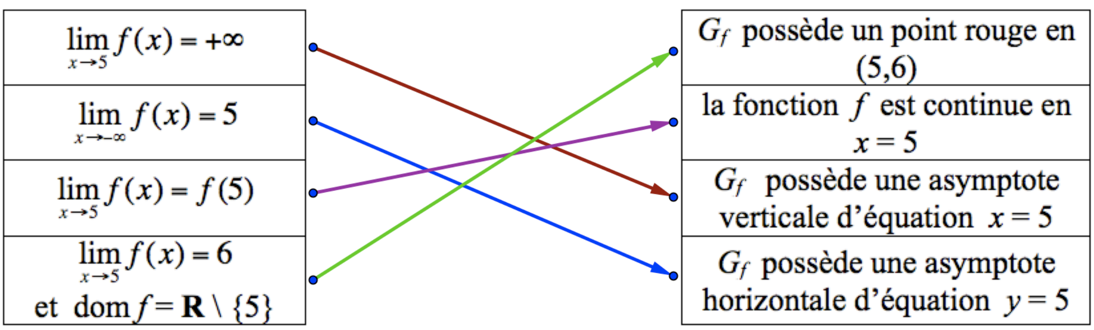
---

6. Cela a-t-il du sens de calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x-5}$? Expliquez.

Soit $f(x) = \sqrt{x-5}$. Étant donné que dom $f = [\ 5\ ,+\infty\ [$, il est impossible de créer une suite de réels x tendant vers $-\infty$ tout en restant dans dom f. On peut aussi dire que « $-\infty$ n'est pas adhérent à dom f ». Il n'y a aucun sens à chercher cette limite, elle n'existe pas.

---

7. Associez chacune des affirmations de la colonne de gauche à une seule de celles de la colonne de droite.



8. Calculez les limites suivantes. Détaillez vos calculs.

a) $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ <}} \dfrac{2x}{x+5} = \dfrac{-10}{0^-} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ >}} \dfrac{2x}{x+5} = \dfrac{-10}{0^+} = -\infty$

En effet, il faut tenir compte du signe du numérateur (-) et de celui du dénominateur, donné par le tableau ci-dessous :

x		-5	
$x+5$	-	0	+

Le graphique de la fonction possède une asymptote verticale AV $\equiv x = -5$.

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{x^2-10x+21} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{(x-3)(x-7)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x-7} = -\dfrac{1}{4}$ (*)

Nous avons factorisé le dénominateur après avoir trouvé ses racines (par exemple $\Delta = 16$, $x_1 = 7$ et $x_2 = 3$) .
On peut être plus astucieux : comme nous savons déjà que 3 est racine du dénominateur et que le terme indépendant de celui-ci est 21 , l'autre racine est forcément 7 .

Le graphique de la fonction possède un « point rouge » de coordonnées (3 , - ¼) .

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{8x^2+2x-3}{1+2x^2} = \dfrac{+\infty}{+\infty} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{8x^2}{2x^2} = 4$

Le graphique de la fonction possède une asymptote horizontale AH $\equiv y = 4$.

(*) Je viens de m'en rendre compte : c'est le même exercice que celui que je vous avais envoyé en exemple !

Faites celui-ci sur le même modèle : $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x+5}{x^2-7x-60}$ (réponse : -1 / 17).