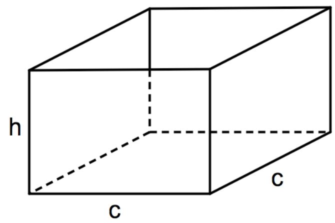
Exercice n°3 page 43

On veut réaliser une caisse en forme de parallélépipède rectangle à base carrée, sans couvercle, et de volume $1\ (m^3)$. Calculer les dimensions de la caisse pour que sa surface totale soit minimale.



Soit c le côté du carré de base et h la hauteur de la caisse.

1. Grandeur à optimiser : l'aire totale, soit la somme des quatre aires latérales et de celle de la base, est $A(c,h) = 4ch + c^2$ (1).
2. Contrainte : le volume doit être égal à $1\ (m^3)$, donc $V = c^2h = 1$ (2).
3. Exprimer une variable en fonction de l'autre : d'après (2), nous avons $h = \dfrac{1}{c^2}$.
4. Exprimer la grandeur à optimiser en fonction d'une seule variable : nous remplaçons h dans (1) et nous trouvons $A(c) = 4c\dfrac{1}{c^2} + c^2 = \dfrac{4}{c} + c^2$.
5. Maintenant que nous avons une fonction d'une seule variable, étudions ses variations à l'aide de la dérivée première.

$$A(c) = \frac{4}{c} + c^2 \rightarrow A'(c) = -\frac{4}{c^2} + 2c = \frac{-4 + 2c^3}{c^2}$$

Le numérateur a pour racine $c = \sqrt[3]{2}$.

c		0		$\sqrt[3]{2}$	
$-4+2c^3$		-	-	0	+
c^2		0	+	+	+
$A'(c)$		X	-	0	+
$A(c)$		X	↘	Min	↗

La fonction $A(c)$ atteint un minimum lorsque $c = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}25992$.

La hauteur est alors $h = \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} \approx 0{,}62996$.

<u>Conclusion</u> : pour que l'aire totale soit minimale, il faut que la caisse ait une base carrée d'environ $1{,}26$ (m) de côté et une hauteur de 63 (cm) (*)

L'aire totale sera alors : $A_{\min} = \dfrac{4}{\sqrt[3]{2}} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 \approx 4{,}76\ (m^2)$.

(*) On peut prouver que pout toute caisse parallélépipédique à base carrée et sans couvercle, il faut que la hauteur soit la moitié du côté de la base pour que l'aire totale soit minimale. Faites-le.