Exercice n°1 page 37

La consigne était d'étudier les variations de fonctions.
Nous irons plus loin en étudiant aussi les concavités, les coordonnées des points d'inflexion éventuels ainsi que les tangentes aux points d'inflexion.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Dérivée première : $f'(x) = 2x - 5$

Tableau des variations

x		5/2	
f'	-	0	+
f	↘	Min	↗

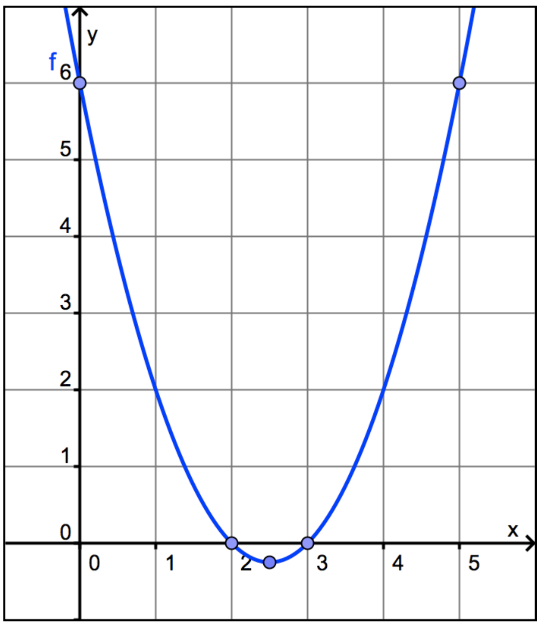
Coordonnées du minimum : $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

Dérivée seconde : $f''(x) = 2$

La dérivée seconde étant positive, la concavité du graphique de f est toujours tournée vers le haut. Il n'y a évidemment pas de point d'inflexion.

Conclusion (que nous aurions déjà pu trouver en 4e année)

La fonction f est décroissante dans l'intervalle] - ∞ , 5/2] , atteint un minimum en x = 5/2 et est croissante dans l'intervalle [5/2 , + ∞ [.



b) $f(x) = x^3 - 3x$

Dérivée première : $f'(x) = 3x^2 - 3$

Tableau des variations

x		- 1		1	
f'	+	0	-	0	+
f	↗	Max	↘	Min	↗

Coordonnées du maximum : $\left(-1, f(-1)\right) = (-1, 2)$
Coordonnées du minimum : $\left(1, f(1)\right) = (1, -2)$

Dérivée seconde : $f''(x) = 6x$

Tableau des concavités

x		0	
f''	-	0	+
f	⌒	PI	‿

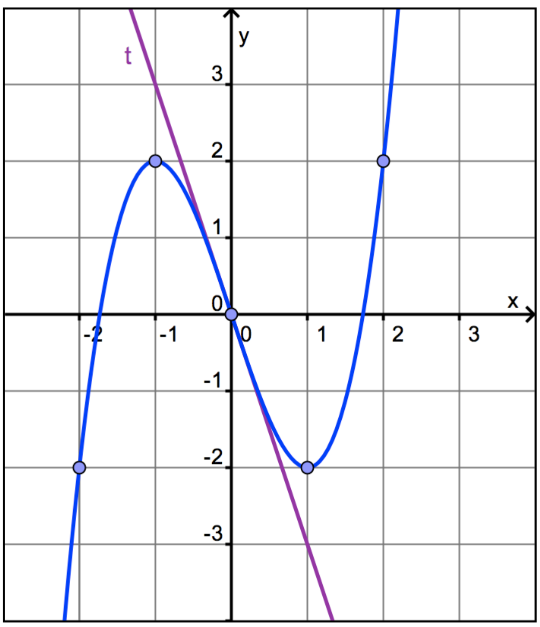
Coordonnées du point d'inflexion : $\left(0, f(0)\right) = (0,0)$

Tangente au point d'inflexion (0,0)

$t \equiv y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0) \;\rightarrow\; t \equiv y - 0 = -3\cdot x$ car $f'(0) = \left[3x^2 - 3\right]_{x=0} = -3$

$\rightarrow \boxed{t \equiv y = -3x}$

Représentation graphique



c) $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x - 1$

Dérivée première : $f'(x) = -6x^2 + 18x - 12 = -6\left(x^2 - 3x + 2\right)$

Tableau des variations

x		1		2	
f'	-	0	+	0	-
f	↘	Min	↗	Max	↘

Coordonnées du maximum : $\left(1, f(1)\right) = (1, -6)$
Coordonnées du minimum : $\left(2, f(2)\right) = (2, -5)$

Dérivée seconde : $f''(x) = -12x + 18 = -6\,(2x - 3)$

Tableau des concavités

x		3/2	
f''	+	0	-
f		PI	

Coordonnées du point d'inflexion : $\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{2}\right)$

Tangente au point d'inflexion $(3/2, -11/2)$

$$t \equiv y - f\left(\frac{3}{2}\right) = f'\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\rightarrow \quad t \equiv y + \frac{11}{2} = \frac{3}{2} \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

car $f'\left(\frac{3}{2}\right) = \left[-6(x^2 - 3x + 2)\right]_{x=3/2} = \frac{3}{2}$

$$\rightarrow \quad \boxed{t \equiv y = \frac{3}{2}x - \frac{31}{4}}$$

Représentation graphique

Voir ci-contre.

<u>Remarque</u> : on peut démontrer que si une fonction du 3^{e} degré possède des extrema, le point d'inflexion est le milieu du segment dont les extrémités sont le maximum et le minimum de la fonction. C'est intéressant pour vérifier !
Ou alors, connaissant les extrema, on peut trouver le PI tout de suite. Ici (1,-6) et (2,-5) , :

$$\left(\frac{1+2}{2}, \frac{-6-5}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{2}\right) \; !$$

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 2$

Dérivée première : $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3\left(x^2 - 4x + 4\right) = 3\left(x-2\right)^2$

Tableau des variations

x		2	
f'	+	0	-
f	↗	PTH	↗

La fonction est strictement croissante dans $\mathbf{R}$. Elle ne possède pas d'extremum.
Le point d'abscisse 2 , où la dérivée s'annule est un point où la tangente au graphique est horizontale (PTH).
Coordonnées du PTH : $\left(2, f(2)\right) = \left(2, 10\right)$

Dérivée seconde : $f''(x) = 6x - 12 = 6\left(x-2\right)$

Tableau des concavités

x		2	
f''	-	0	+
f	⌒	PI	⌣

Coordonnées du point d'inflexion : $\left(2, 10\right)$
(c'est le PTH !) .

Tangente au point d'inflexion $\left(2, 10\right)$

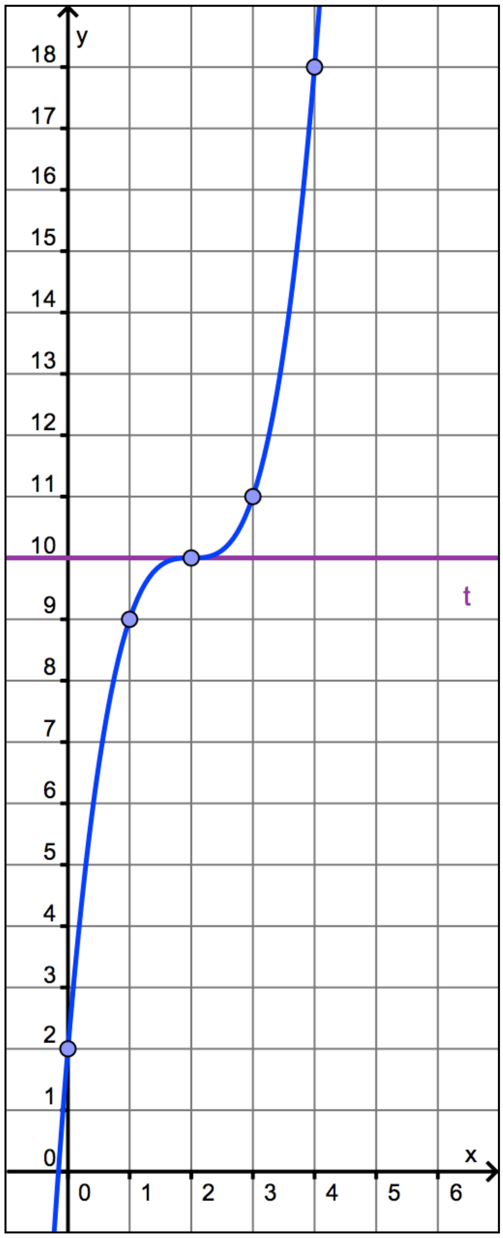
Il est toujours possible d'utiliser notre formule de référence, mais dans le cas présent c'est inutile.
En effet, la tangente est horizontale et son équation est simplement

$$\boxed{t \equiv y = 10}$$

Représentation graphique

Voir ci-contre.

Le seul point fourni par l'étude ci-dessus est le PI . Il faut donc calculer d'autres points pour tracer ce graphique.



e) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 2$

Dérivée première : $f'(x) = 6x^2 + 6x + 6 = 6\left(x^2 + x + 1\right)$

Tableau des variations

x			
f'	+	+	+
f	↗	↗	↗

La dérivée ne possède pas de racine et est strictement positive dans **R** .
La fonction f est strictement croissante dans **R** . Elle ne possède pas d'extremum.
Contrairement à la fonction précédente, il n'y a pas de PTH .

Dérivée seconde : $f''(x) = 12x + 6 = 6\left(2x + 1\right)$

Tableau des concavités

x		- ½	
f''	-	0	+
f	∩	PI	∪

Coordonnées du point d'inflexion :

$$\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Tangente au point d'inflexion $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$$t \equiv y - f\left(-\frac{1}{2}\right) = f'\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow \quad t \equiv y + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

car $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \left[6(x^2 + x + 1)\right]_{x=-1/2} = \frac{9}{2}$

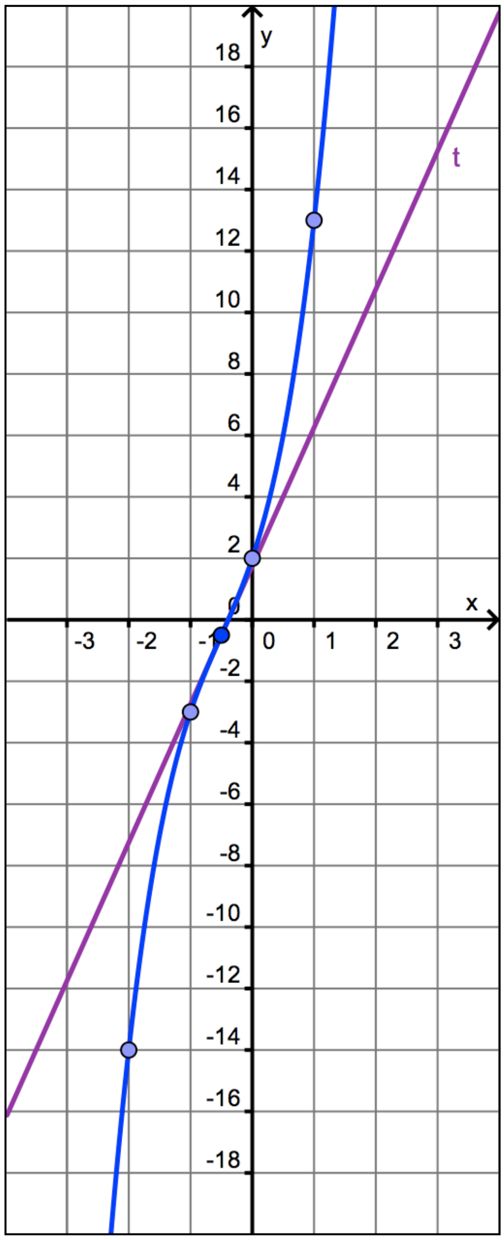
$$\rightarrow \quad \boxed{t \equiv y = \frac{9}{2}x + \frac{7}{4}}$$

Représentation graphique

Voir ci-contre.

Le seul point fourni par l'étude étant le PI , il faut de nouveau calculer d'autres points.

La croissance de cette fonction étant très rapide, nous avons choisi une échelle deux fois plus petite en ordonnées pour que la courbe ne soit pas trop « raide ».



Exercice n°2 page 37

Pour que la fonction $f(x) = 4x^3 + 9x^2 + 3px + 1$ soit croissante dans $\mathbf{R}$, il faut et il suffit que sa dérivée première soit positive dans $\mathbf{R}$.

Dérivée première (n'oubliez pas que p est un facteur constant) :

$$f'(x) = 12x^2 + 18x + 3p = 3\left(4x^2 + 6x + p\right).$$

Nous voyons que f' est une fonction du second degré et que le coefficient de x^2 est positif.
Cette expression sera donc positive, sauf pour les valeurs de x comprises entre ses racines où elle sera négative. Comme nous ne voulons pas qu'elle soit négative, il ne faut donc surtout pas que cette expression ait deux racines ! Donc, une seule racine, ou pas du tout.
Cela signifie que son discriminant doit être négatif ou nul : $\Delta \leq 0$.

Calculons le discriminant de $4x^2 + 6x + p$ (nous pourrions bien sûr calculer celui de $12x^2 + 18x + 3p$, mais autant travailler avec de plus petits nombres) : $\Delta = 36 - 16p$.

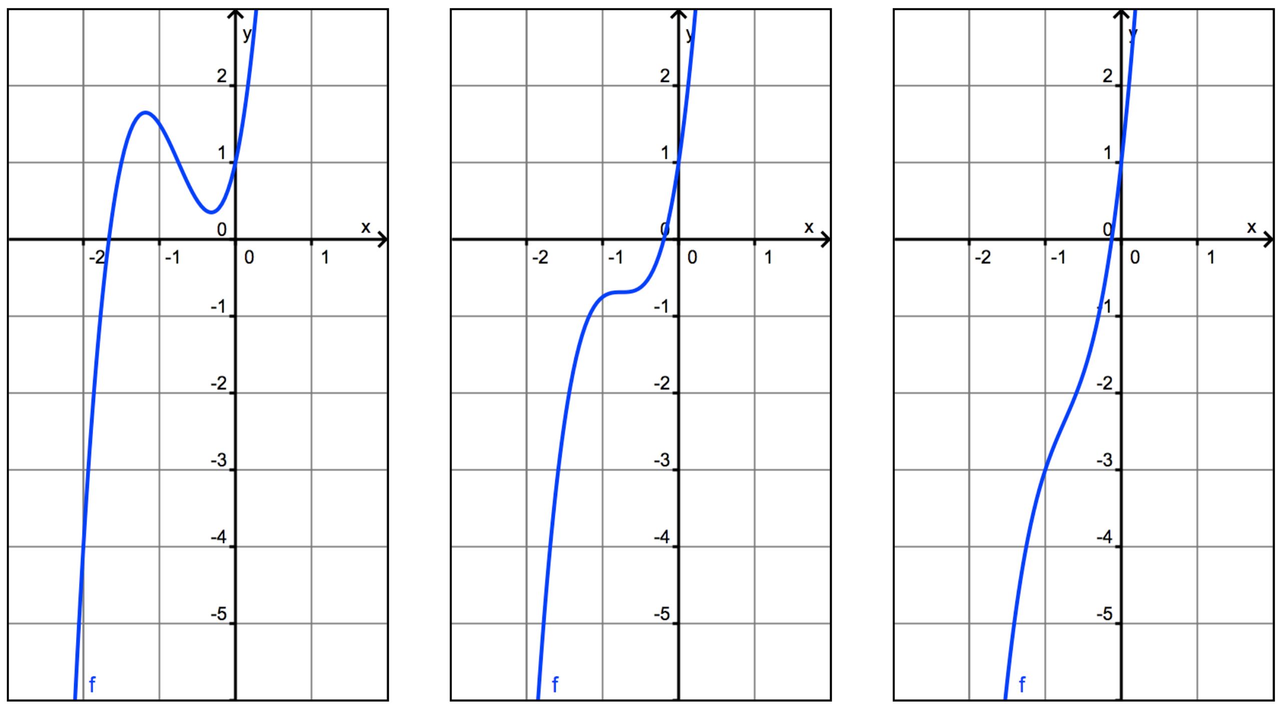
Il faut donc : $36 - 16p \leq 0 \Leftrightarrow p \geq \dfrac{36}{16} \Leftrightarrow p \geq \dfrac{9}{4}$.

Conclusion : pour toute valeur de $p \geq 9/4$, la fonction sera strictement croissante dans $\mathbf{R}$.
Pour toute valeur de $p < 9/4$, il y aura un intervalle sur lequel la fonction sera décroissante et elle admettra un maximum et un minimum.

Vous pouvez observer cela sur l'animation GEOGEBRA disponible sur le site de notre école :

https://www.ces-stexupery.be/institut-sainte-marie/espace-interactif/mathematique/vandenbruaenne-andre/cours_56/math_at_home_5/variations-de-fonctions-page-37

Pour illustrer les modifications de f, voici trois exemples avec $p = 1{,}5$, $p = 9/4 = 2{,}25$ et $p = 3$.



Exercice n°3 page 37

Fonction de demande : $D(t) = -27\,t^4 + 252\,t^3 - 540\,t^2 + 9400$ pour $0 \le t \le 6$.

Par exemple, à 13 heures (qui correspond à $t = 1$ car $t = 0$ correspond à midi), on a une demande égale à $D(1) = -27 + 252 - 540 + 9400 = 9085$ (mégawatts) .

a) Pour trouver les extrema de la demande électrique, il faut passer par la dérivée première de la fonction $D(t)$:

$$D'(t) = -108\,t^3 + 756\,t^2 - 1080\,t = -108\,t\left(t^2 - 7t + 10\right)$$

Les racines de D' sont $t = 0$, $t = 2$ et $t = 5$.

Tableau des variations de D (tableau limité à l'intervalle [0 , 6])

t		0		2		5		6	
$-108\,t$	+	0	-	-	-	-	-	-	-
$t^2 - 7t + 10$	+	+	+	0	-	0	+	+	+
D'	+	0	-	0	+	0	-	-	-
D	↗	Max_1	↘	Min_1	↗	Max_2	↘	Min_2	↘

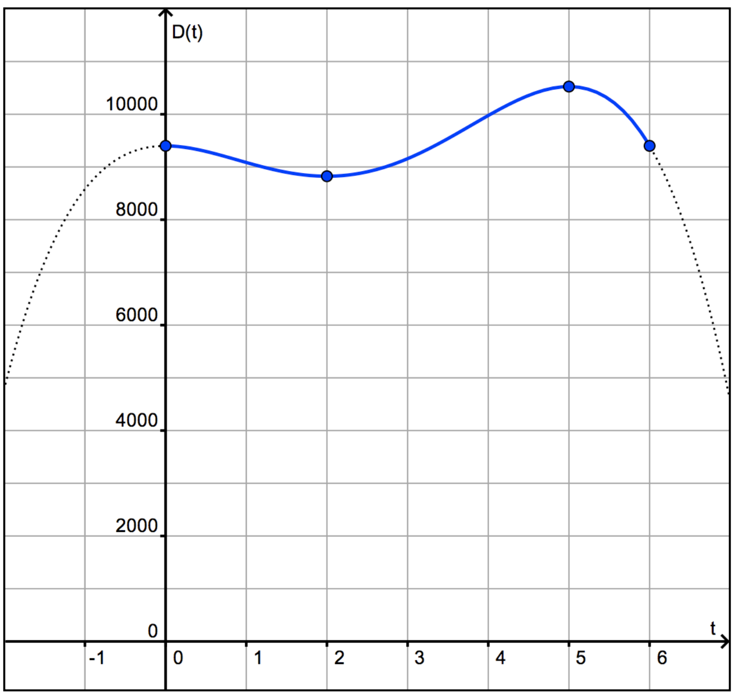
Coordonnées : Max_1 $(0\,,9400)$ Max_2 $(5\,,10525)$

Min_1 $(2\,,8824)$ Min_2 $(6\,,9400)$

La fonction D possède des extrema en $t = 0$ (midi) , $t = 2$ (14 heures) , $t = 5$ (17 heures) et $t = 6$ (18 heures).
Ici, il faut bien noter que la fonction D , restreinte à l'intervalle [0 , 6] , possède des extrema en chaque extrémité de l'intervalle.

b) Le minimum absolu est atteint à 14 heures ($t = 2$) avec une demande de 8 824 (MW).

c) Le maximum absolu est atteint à 17 heures ($t = 5$) avec une demande de 10 525 (MW).



Exercice n°4 page 37

Cet exercice ressemble à l'exercice n°2.

Pour que la fonction $f(x)=\dfrac{3}{m\,x-4}$ soit strictement décroissante sur son domaine, il faut et il suffit que sa dérivée première soit négative en tout point de son domaine.

Dérivée première : $f'(x)=\dfrac{-3m}{(m\,x-4)^2}$.

Le dénominateur de f' étant positif, pour que f' soit négative il faut $-3m\le 0 \Leftrightarrow m\ge 0$.

Tableau des variations de f lorsque $m \geq 0$

x		4 / m	
f'	-	|	-
f	↘	AV	↘

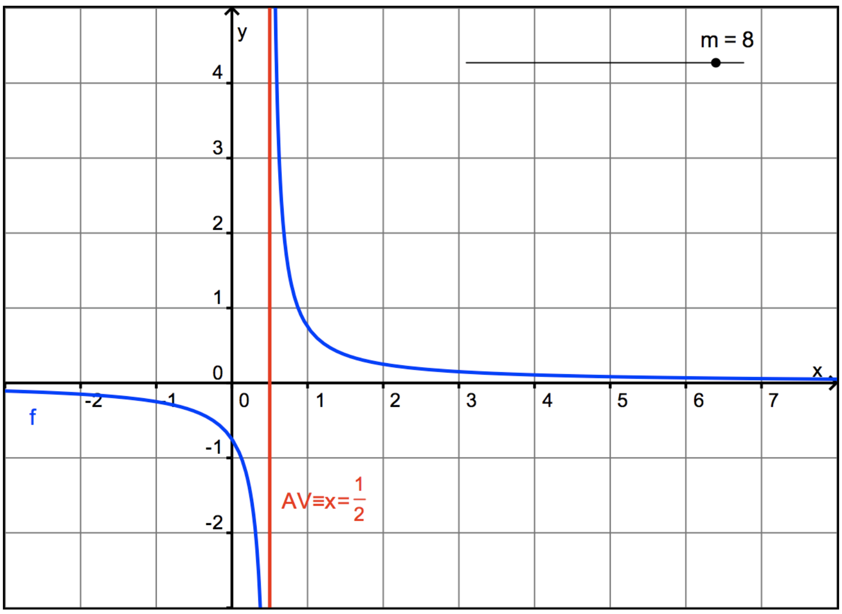
Conclusions

- Lorsque $m > 0$, la fonction f est décroissante sur son domaine **R** \ { 4 / m } et admet une asymptote verticale AV $\equiv x = 4 / m$.
- Lorsque $m = 0$, la fonction est constante $f(x)$ = - ¾ de domaine **R** . Cette fonction répond également à la question car, au sens large, une fonction constante est décroissante.

Vous pouvez observer les modifications de f en fonction des valeurs de m sur l'animation GEOGEBRA disponible sur le site de notre école :

https://www.ces-stexupery.be/institut-sainte-marie/espace-interactif/mathematique/vandenbruaenne-andre/cours_56/math_at_home_5/variations-de-fonctions-page-37

Ci-dessous, un exemple avec $m = 8$. La fonction est bien décroissante en tout point de **R** \ { ½ } .



Exercice n°5 page 37

Pour étudier les variations de $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + 1}{x^2 + bx}$, calculons sa dérivée première en prenant en compte le fait que a et b sont des constantes.

$$f'(x) = \frac{(2x + a)(x^2 + bx) - (x^2 + ax + 1)(2x + b)}{(x^2 + bx)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 2bx^2 + ax^2 + abx - 2x^3 - bx^2 - 2ax^2 - abx - 2x - b}{(x^2 + bx)^2} = \frac{(b - a)x^2 - 2x - b}{(x^2 + bx)^2} .$$

Plutôt que de nous lancer dans une étude de signes qui serait vraiment fastidieuse, utilisons plutôt le fait que lorsqu'une fonction rationnelle atteint un extremum, sa dérivée s'annule.
En effet, si une telle fonction atteint un maximum par exemple, cela signifie qu'elle passe d'une phase de croissance (dérivée positive) à une phase de décroissance (dérivée négative) et qu'au maximum, la dérivée s'annule [(*)].

On demande que la fonction admette un maximum local en $x = 1$, il faut donc que $f'(1) = 0$:

$$f'(1) = \frac{(b - a) - 2 - b}{(1 + b)^2} = 0 \rightarrow -a - 2 = 0 \rightarrow a = -2 .$$

On demande que la fonction admette un minimum local en $x = 2$, il faut donc que $f'(2) = 0$:

$$f'(2) = \frac{(b - a)\,4 - 4 - b}{(4 + 2b)^2} = 0 \rightarrow -4a + 3b - 4 = 0 \rightarrow 3b = 4 + 4a \rightarrow 3b = 4 - 8 \rightarrow b = -\frac{4}{3} .$$

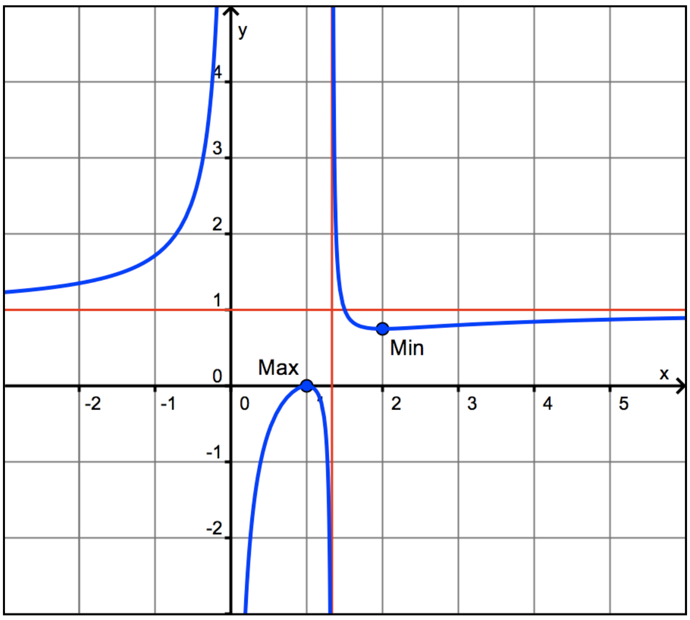
Conclusion

Il faut que a = - 2 et b = - 4 / 3 et la fonction qui répond aux conditions est

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - \frac{4}{3}x} .$$

Elle admet

- un maximum local en $(1, f(1)) = (1, 0)$;
- un minimum local en $$(2, f(2)) = \left(2, \frac{3}{4}\right) .$$



(*) Attention, rappelons-nous que l'inverse n'est pas vrai : si la dérivée s'annule, la fonction n'atteint pas nécessairement un extremum (il peut s'agir d'un « simple » point à tangente horizontale comme dans l'exercice n°1 (d)).