6 A - B	**MATHÉMATIQUE (6h)** Corrigé du test n°8 : probabilités	Avril 2013

Questions 1 à 4 : théorie

5. Lors d'une tombola, 1000 billets sont mis en vente. Parmi ces billets, cinq permettent de gagner 100 € , dix de gagner 20 € , vingt de gagner 10 € , cent de gagner 5 € et les autres sont perdants. Une personne achète un seul billet. Quelle est la probabilité pour qu'elle gagne une somme inférieure ou égale à 10 € ?

Il s'agit d'additionner les probabilités des trois événements élémentaires « gagner 10 euros », « gagner 5 euros » et « ne rien gagner » : $\frac{20}{1000}+\frac{100}{1000}+\frac{865}{1000}=0{,}985$.

On peut aussi passer par le complémentaire : $1-\left(\frac{5}{1000}+\frac{10}{1000}\right)=0{,}985$.

6. Parmi 100 étudiants, 70 étudient l'anglais, 50 étudient l'espagnol et 25 étudient à la fois l'anglais et l'espagnol. Quelle est la probabilité pour qu'un étudiant tiré au hasard étudie l'anglais ou l'espagnol ?

Soient les événements A = « l'étudiant étudie l'anglais » et B = « l'étudiant étudie l'espagnol ». Il faut calculer la probabilité de l'événement $A \cup B$ = « l'étudiant étudie l'anglais ou l'espagnol » : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}7+0{,}5-0{,}25=0{,}95$.

7. Soient A et B des événements tels que $P(A)=\frac{1}{5}$, $P(B)=\frac{1}{3}$ et $P(A\cap B)=\frac{1}{10}$. Calculez $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

D'après une des lois de De Morgan :

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}\right)=\frac{17}{30}\ .$$

8. Une classe se compose de 10 filles et de 6 garçons. On forme une délégation en prenant 3 élèves au hasard. Quelle est la probabilité pour que la délégation comprenne

   a) exactement deux filles ?

   b) au moins un garçon ?

a) Probabilité pour qu'il y ait deux filles et un garçon : $\frac{C_{10}^2\cdot C_6^1}{C_{16}^3}=\frac{45\cdot 6}{560}\approx 0{,}4821$.

b) Calculons la probabilité de l'événement contraire « pour qu'il n'y ait aucun garçon » :

$$\frac{C_{10}^3\cdot C_6^0}{C_{16}^3}=\frac{120\cdot 1}{560}\approx 0{,}2143\ .$$

La probabilité pour qu'il y ait au moins un garçon est donc : $1-\frac{120}{560}=\frac{440}{560}\approx 0{,}7857$.

9. On lance trois dés distinguables. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le « 6 » ?

La probabilité de n'obtenir aucune fois le « 6 » est $\left(\frac{5}{6}\right)^3$.

Celle d'obtenir au moins une fois le « 6 » est donc : $1-\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}4213$.

10. On lance deux dés à six faces, bien équilibrés, et on note la somme des points. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 9 ?

Soit E l'événement « la somme des points est égale à 9 » : $E=\{(3{,}6),(4{,}5),(5{,}4),(6{,}3)\}$.

On a : $P(E)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

11. La probabilité pour qu'un nouveau-né soit un garçon vaut environ 0,51 . Quelle est la probabilité pour qu'il y ait 7 garçons dans une famille de 12 enfants ?

Soit X la variable aléatoire « nombre de garçons dans la famille » (X ~ Bi(12,0.51)).

La probabilité d'avoir 7 garçons et 5 filles est : $P(X=7)=C_{12}^{7}\cdot(0{,}51)^7\cdot(0{,}49)^5\approx 0{,}2008$.

12. D'un jeu de 52 cartes bien battues, on tire 5 cartes au hasard. Calculez la probabilité pour que l'on obtienne exactement un As et deux Rois, et deux autres cartes.

Le nombre de « cas possibles » est le nombre de façons d'obtenir 5 cartes parmi 52 (sans répétition et sans tenir compte de l'ordre).
Pour calculer le nombre de « cas favorables », il faut calculer le produit du nombre de façons d'obtenir un As parmi 4 , par le nombre de façons d'obtenir 2 Rois parmi 4 , et par le nombre de façons d'obtenir 2 autres cartes parmi les 44 « non-As et non-Roi ».

La probabilité demandée est donc : $\frac{C_4^1\cdot C_4^2\cdot C_{44}^2}{C_{52}^5}=\frac{4\cdot 6\cdot 946}{2598560}\approx 0{,}0087$.

13. Un sondage, réalisé sur 1000 personnes et portant sur la question « voterez-vous pour le parti A aux prochaines élections ? », a donné les résultats suivants.

	Femmes	Hommes
Oui	350	200
Non	150	175
Sans réponse	100	25

On interroge une personne au hasard.

a) Quelle est la probabilité pour qu'il s'agisse d'un homme ayant répondu « non » ?

b) Sachant que la personne est une femme, quelle est la probabilité pour qu'elle ait répondu « oui » ?

a) $\frac{175}{1000}$ b) $\frac{350}{600}$

14. On lance deux dés distinguables et bien équilibrés. Soient les événements A = « la somme des points vaut 8 » et B = « un des dés a donné un 3 ».

a) Calculer $P(B \mid A)$.

b) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

a) D'abord, nous avons $A = \{(2{,}6),(3{,}5),(4{,}4),(5{,}3),(6{,}2)\}$.
Si l'on sait que l'événement A est réalisé, alors il constitue l'ensemble fondamental réduit, et il n'y a donc plus que 5 cas possibles (au lieu de 36 initialement).
Les couples $(3{,}5)$ et $(5{,}3)$ sont favorables à l'événement B . Donc : $P(B \mid A) = \dfrac{2}{5}$.

b) Nous avons $B = \{(3{,}1),(3{,}2),(3{,}3),(3{,}4),(3{,}5),(3{,}6),(1{,}3),(2{,}3),(4{,}3),(5{,}3),(6{,}3)\}$.
Donc, $P(B) = \dfrac{11}{36} \neq P(B \mid A)$. Les événements A et B ne sont pas indépendants.

15. Deux étudiants A et B cherchent la solution d'un problème sans se consulter. Il y a 8 chances sur 10 pour que l'étudiant A trouve la solution, et il y en a 7 sur 10 pour que B trouve la solution.

a) Quelle est la probabilité pour que le problème soit résolu ?

b) L'étudiant A souhaite s'associer à un étudiant C , de bonne réputation, pour que la probabilité qu'ils résolvent le problème, sans se consulter, soit égale à 0,99 .
Quelle devrait être la « force » de C (c.-à-d. la probabilité qu'il a de résoudre le problème ?).

a) Les événement A et B étant indépendants, nous savons que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
Pour que le problème soit résolu , il faut que A ou B trouve la solution :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}56 = 0{,}94 \ .$$

b) Il faut que :

$$P(A \cup C) = 0{,}99 \Leftrightarrow P(A) + P(C) - P(A) \cdot P(C) = 0{,}99 \Leftrightarrow P(C) \cdot [1 - P(A)] = 0{,}99 - P(A) \ .$$

Donc $P(C) = \dfrac{0{,}99 - 0{,}8}{1 - 0{,}8} = 0{,}95$.

16. Dans une certaine école, 80% des élèves de rhétorique réussissent en mathématique, 90 % réussissent en physique, et 75% réussissent dans les deux branches. On choisit un éléve au hasard. Sachant qu'il a réussi en physique, quelle est la probabilité pour qu'il réussisse aussi en mathématique ?

Soient les événements A = « l'élève réussit en mathématique » et B = « l'élève réussit en physique ».

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}75}{0{,}9} = \frac{5}{6} \approx 0{,}8333 \ .$$