6e Novembre 2014

MATHÉMATIQUE (6h)

Corrigé de l'évaluation formative : courbes paramétrées - coordonnées polaires.

1. À partir du sol, un projectile est tiré avec une vitesse initiale de 15 (m/s) suivant un angle de $25°$ avec l'horizontale. Nous négligerons la résistance de l'air.

   Pour les questions suivantes, donner des valeurs numériques correctement arrondies à 0,01 près.

   a) Établir des équations paramétriques de la trajectoire du projectile.
   Utiliser la valeur $g \approx 10$ (m/s²) pour l'accélération de la pesanteur.

$$\begin{cases} x(t) = 15 \cdot \cos 25° \cdot t \\ y(t) = -5t^2 + 15 \cdot \sin 25° \cdot t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) \approx 13{,}5946 \cdot t \\ y(t) \approx -5t^2 + 6{,}3393 \cdot t \end{cases}$$

   b) Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire.

   De la première équation, on tire $t = \dfrac{x}{15 \cdot \cos 25°}$.

   Remplaçant dans la seconde, nous obtenons : $T \equiv y = -\dfrac{x^2}{45 \cdot \cos^2 25°} + \tan 25° \cdot x$.

   Soit approximativement : $T \equiv y \approx -0{,}0271 \cdot x^2 + 0{,}4663 \cdot x$.

   c) Calculer la hauteur maximale atteinte par le projectile, ainsi que la portée du tir.

   La hauteur maximale sera atteinte à l'abscisse : $x_{\max} \approx -\dfrac{0{,}4463}{2 \cdot (-0{,}0271)} \approx 8{,}6180$.

   En remplaçant cette abscisse dans l'équation de la trajectoire, nous trouvons : $h_{\max} \approx 2{,}01$ (m). La portée du tir est le double de $x_{\max}$ soit environ $17{,}24$ (m) .

---

2. Déterminer une équation cartésienne de chacune des courbes suivantes, dont les équations paramétriques sont données.

   Caractériser précisément chacune de ces courbes.

   a) $C_1 \equiv \begin{cases} x = \dfrac{t}{4} + 1 \\ y = t - 5 \end{cases}$ avec $t \in [0,3]$.

   Il s'agit d'un segment de droite d'équation $C_1 \equiv y = 4x - 9$ et d'extrémités $(1,-5)$ et $\left(\dfrac{7}{4},-2\right)$.

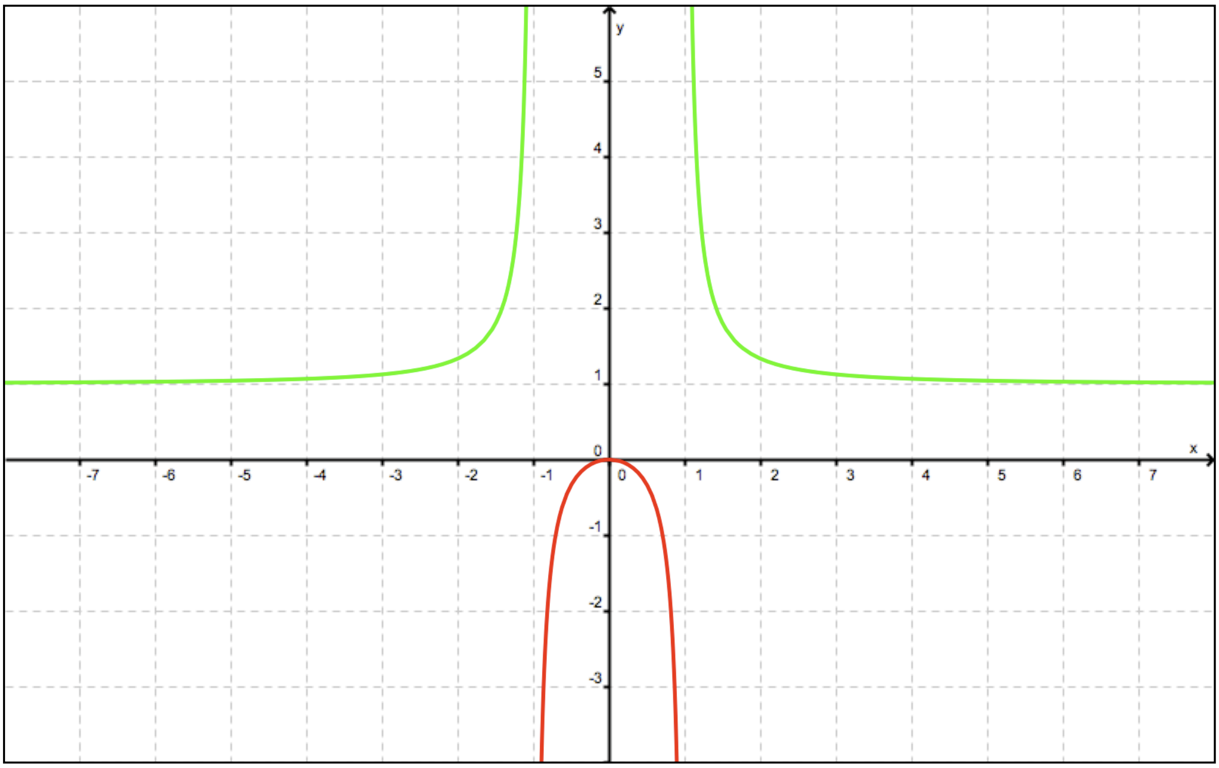
   b) $C_2 \equiv \begin{cases} x = 5 \cdot \sin\theta \\ y = 2\cos^2\theta \end{cases}$ avec $\theta \in R$.

   Comme $\sin\theta = \dfrac{x}{5}$, on a : $y = 2 \cdot \left(1 - \sin^2\theta\right) = 2 \cdot \left(1 - \dfrac{x^2}{25}\right)$.

   Donc, $C_2 \equiv y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$. Il s'agit d'une parabole verticale ouverte vers le bas, restreinte aux abscisses de l'intervalle $[-5,5]$ (car $-5 \le 5 \cdot \sin\theta \le 5$).

c) $C_3 \equiv \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sin\theta} \\ y = 1 + \tan^2\theta \end{cases}$ avec $\theta \in R$.

Comme $\sin\theta = \dfrac{1}{x}$, on a : $y = \dfrac{1}{\cos^2\theta} = \dfrac{1}{1-\sin^2\theta} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{x^2}{x^2-1}$.



La courbe cherchée, représentée en vert ci-dessus, est la restriction de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ à l'ensemble $R \setminus [-1,1]$ car $\dfrac{1}{\sin\theta} > 1$ ou $\dfrac{1}{\sin\theta} < -1$.
La réunion des courbes verte et rouge est le graphique de la fonction f.

d) $C_4 \equiv \begin{cases} x = \tan\theta \\ y = \dfrac{3}{\cos\theta} \end{cases}$ avec $\theta \in R$.

Comme $x^2 = \tan^2\theta$, on a : $y^2 = \dfrac{9}{\cos^2\theta} = 9\cdot\left(1+\tan^2\theta\right) = 9\cdot\left(1+x^2\right)$.

En transformant cette équation, nous trouvons : $-x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

La courbe C_4 est une hyperbole verticale.

---

3. Soit, en coordonnées polaires, le point $P\left(-8,\dfrac{10\pi}{3}\right)$.

Quelles sont ses coordonnées cartésiennes ?

$$P_p\left(-8,\frac{10\pi}{3}\right) = P_p\left(8,\frac{\pi}{3}\right) = P_c\left(8\cdot\cos\frac{\pi}{3}, 8\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right) = P_c\left(4,4\sqrt{3}\right).$$

4. Déterminer des équations polaires de la courbe d'équation cartésienne $xy = 2$.

$$\rho \cdot \cos\theta \cdot \rho \cdot \sin\theta = 2 \Leftrightarrow \rho^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2\theta = 2 \Leftrightarrow \rho^2 = \frac{4}{\sin 2\theta} \Leftrightarrow \rho = \pm \frac{2}{\sqrt{\sin 2\theta}}.$$

---

5. Voici l'équation polaire d'une courbe : $C \equiv \rho^2 \cdot \left(9\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = 4$.

   Déterminer l'équation cartésienne et décrire $\boldsymbol{C}$.

$$C \equiv \rho^2 \cdot \left(9\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = 4 \Leftrightarrow 9\rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta = 4 \Leftrightarrow 9x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4/9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Il s'agit d'une hyperbole horizontale, centrée en $(0,0)$, de sommets $\left(\pm\frac{2}{3},0\right)$ et d'asymptotes $y = \pm 3x$. Ses foyers sont $\left(\pm\frac{2\sqrt{10}}{3},0\right)$.

---

6. Une conique a pour équation polaire $\rho = \dfrac{3}{2-\cos\theta}$.

   Décrire précisément cette conique, donner ses caractéristiques.

Transformons l'équation : $\rho = \dfrac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$.

La conique est une ellipse horizontale, d'excentricité $e = \frac{1}{2}$.

La directrice est située à gauche du foyer $F(0,0)$, donc : $d \equiv x = -3$.

Les sommets situés sur l'axe polaire ont pour coordonnées polaires $(3,0)$ et $(1,\pi)$.

Elle est centrée en $(1,0)$. On en déduit $a = 2$ et $c = 1$, et enfin $b = \sqrt{3}$.

Son équation cartésienne est

$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1}.$$

Sur le graphique ci-contre, nous avons procédé à une vérification : la distance entre un point P de l'ellipse et le foyer est égale à la moitié de celle qui sépare P de la directrice.
Ceci vérifie la définition focale d'une conique avec $e = ½$.