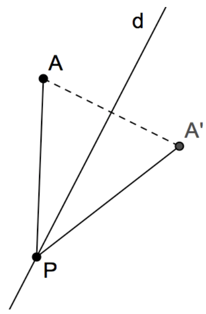
Mathématique (6h)

Corrigé du test sur les lieux géométriques

1. Déterminer le lieu des symétriques d'un point fixe A, par rapport à une droite mobile qui tourne autour d'un point fixe P.

Solution

Soit d la droite comprenant P et tournant autour de P. Soit A' l'image de A par la symétrie orthogonale s_d d'axe d. Comme l'image de P par s_d est P lui même, l'image par s_d du segment [PA] est le segment [PA']. Comme une symétrie orthogonale conserve les distance (c'est une isométrie), on a $|PA'| = |PA| = constante$ (car P et A sont fixes). Les symétriques de A sont donc tous à égale distance de P, et le lieu de ces points est le cercle de centre P et de rayon $|PA|$.

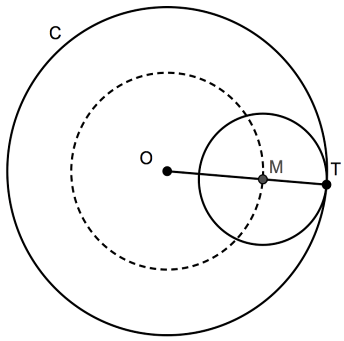


---

2. Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 5 (cm). Déterminer le lieu des centres des cercles de 2 (cm) de rayon et tangents intérieurement à $\mathcal{C}$.

Solution

Soit M le centre d'un cercle tangent intérieurement au cercle $\mathcal{C}$. Soit T le point de tangence des deux cercles. On a : $|MT| = 2$. Comme les points O, M et T sont alignés, on a aussi : $|OM| = 5 - 2 = 3$. Tous les points M sont donc situés à 3 (cm) de O, et le lieu cherché est le cercle de centre O et de rayon 3 (cm).

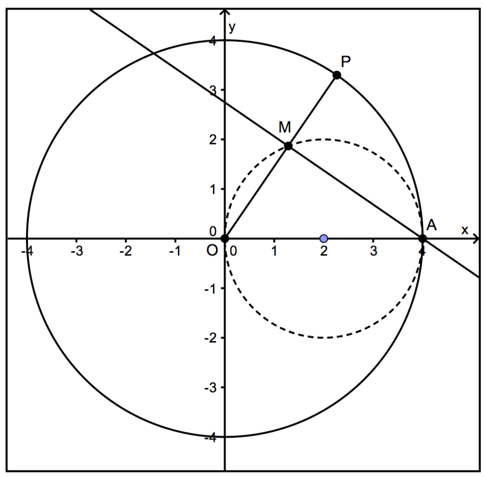


---

3. Soit un cercle de centre O et de rayon 4 (cm). Le point $A(4,0)$ est fixe sur le cercle, tandis que le point P est mobile sur celui-ci. Déterminer le lieu des points commun à PO et à la perpendiculaire à PO comprenant A. Donner l'équation du lieu.

Solution

Soit M le point d'intersection entre PO et la perpendiculaire à PO comprenant A.
Le triangle AMO étant rectangle en M, ce triangle est inscrit dans un cercle dont un diamètre est l'hypoténuse [OA].
Ce cercle est donc le lieu cherché. Il a pour centre le point (2,0), son rayon vaut 2 et son équation est $(x-2)^2 + y^2 = 4$.



Méthode analytique

Les génératrices du lieu sont les droites OP et AM. En prenant comme paramètre λ le coefficient angulaire de OP, nous avons d'abord $OP \equiv y = \lambda \cdot x$ (1).
Comme AM est perpendiculaire à OP et comprend le point A(4,0), nous avons ensuite : $AM \equiv y = -\frac{1}{\lambda} \cdot (x-4)$ (2).

D'après (1) : $\lambda = \frac{y}{x}$ (x ≠ 0 ; si x = 0, nous trouvons O comme point du lieu).

Remplaçons dans (2) : $y = -\frac{x}{y} \cdot (x-4) \Leftrightarrow y^2 = -x^2 + 4x \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$.

---

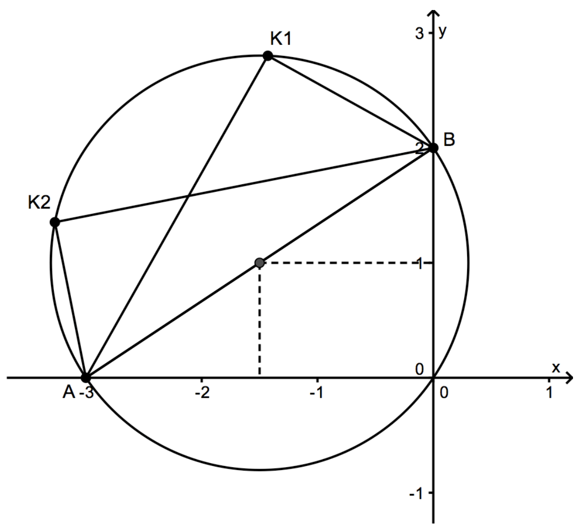
4. Soient les points A(-3,0) et B(0,2). Déterminer l'équation du lieu des points K du plan tels que $|KA|^2 + |KB|^2 = |AB|^2$.

Solution

$$|KA|^2 + |KB|^2 = |AB|^2 \Leftrightarrow (x+3)^2 + y^2 + x^2 + (y-2)^2 = 3^2 + 2^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 9 + 2y^2 - 4y + 4 = 13$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{13}{4}$$

Le lieu des points K est le cercle de centre $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

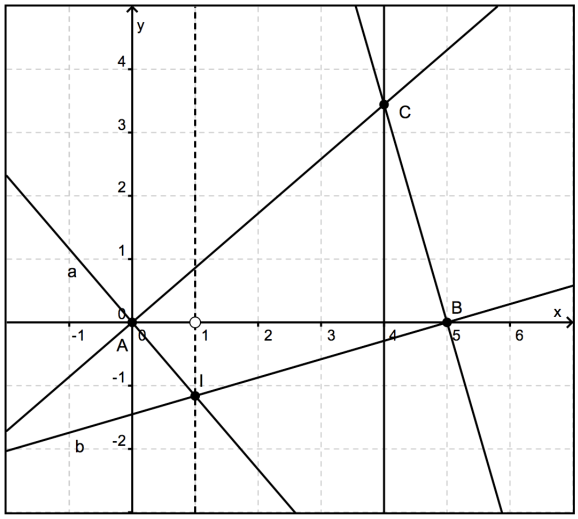


Méthode synthétique

La relation $|KA|^2 + |KB|^2 = |AB|^2$ exprime, en vertu de la réciproque du théorème de Pythagore, que le triangle ABK est rectangle en K et a pour hypoténuse $[AB]$.
Les triangles ABK sont donc inscrits dans le cercle de diamètre $[AB]$ et de rayon $\frac{|AB|}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$. Ce cercle est donc le lieu des points K. Il a pour centre le milieu de $[AB]$, qui est bien le point $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$.

5. On donne les points fixes $A(0,0)$ et $B(5,0)$. Le point C est variable sur la droite d'équation $x = 4$. Soit la droite a, orthogonale à AC en A, et soit la droite b, orthogonale à BC en B.
   Déterminer le lieu des points I, intersections des droites a et b.

Solution



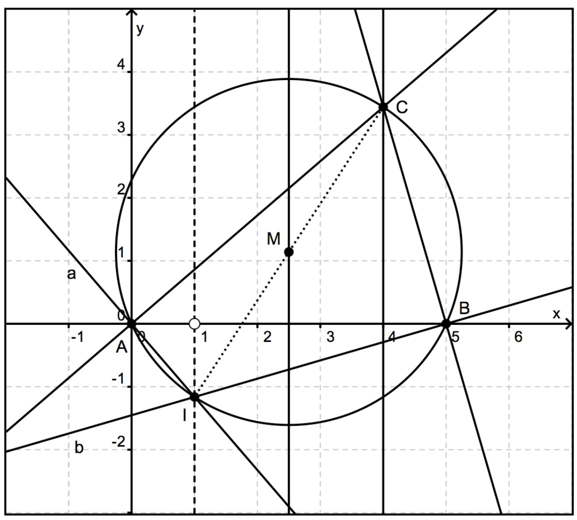
Soit $C(4,\lambda)$ le point variable ($\lambda \in R$). Les génératrices du lieu sont les droites a et b.
Le coefficient angulaire de AC étant $\frac{\lambda}{4}$, celui de a est $-\frac{4}{\lambda}$.
Donc : $a \equiv y = -\frac{4}{\lambda} \cdot x$ (1).
Le coefficient angulaire de BC étant $-\lambda$, celui de b est $\frac{1}{\lambda}$.
Donc : $b \equiv y = \frac{1}{\lambda} \cdot (x-5)$ (2).

D'après (1) : $\lambda = \frac{-4x}{y}$ (y ≠ 0). Remplaçons dans (2) :

$$y = \frac{y}{-4x} \cdot (x-5) \Leftrightarrow -4xy - xy + 5y = 0 \Leftrightarrow y \cdot (-5x+5) = 0 \Leftrightarrow (y=0) \vee (x=1) .$$

Nous ne pouvons accepter que x = 1 (droite parallèle aux ordonnées). Notons que si $\lambda \to \pm\infty$, les droites AC et BC tendent à devenir parallèles à l'axe des ordonnées, tandis que les génératrices se rapprochent de l'axe des abscisses et que le point I s'approche du point $(1,0)$ sans l'atteindre (point parasite). Le lieu des points I est donc la droite d'équation x = 1 privée du point $(1,0)$.

Méthode synthétique



Les triangles CAI et CBI sont rectangles respectivement en A et en B. Ils sont donc tous deux inscrits dans un cercle de diamètre $[CI]$.
Ce cercle a son centre M sur la médiatrice de $[AB]$, c'est-à-dire sur la droite x = 5/2.
Le point I est donc l'image de C par une symétrie centrale de centre M. Comme le point C parcourt la droite x = 4, le lieu des points I est l'image de la droite x = 4 par cette symétrie centrale, c'est-à-dire la droite x = 1 (privée du point $(1,0)$, voir ci-dessus).