MATHÉMATIQUE (6H)

Exercices de synthèse

(source : questionnaires d'examens d'admission à l'École polytechnique de Louvain)

PRIMITIVES ET INTÉGRALES

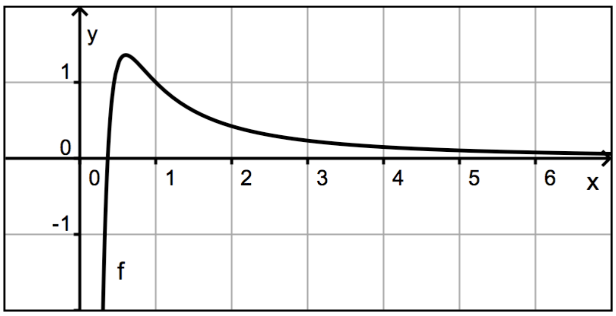
1. En évitant d'effectuer des calculs, dites si les égalités suivantes sont correctes. Justifiez.

   a) $\int_{-1}^{1} e^{\sin x} \cdot dx = 0$

   b) $\int_{1}^{2} \sqrt{1+x^8} \cdot dx = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$

2. Calculez l'intégrale indéfinie $\int \dfrac{1+tg^2(\ln x)}{x} \cdot dx$.

3. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x^2}$ et voici une partie de son graphique.



   a) Calculez l'intégrale indéfinie $\int f(x) \cdot dx$.

   b) Soit A l'aire délimitée par l'axe des abscisses, la courbe G_f , et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = 2$. Démontrez que $0 \le A \le e - \dfrac{1}{2}$.

4. Calculez l'intégrale définie $\int_{1}^{2} \dfrac{1}{x+\sqrt{x}} \cdot dx$.

5. Établissez l'intégrale du volume du solide engendré par la rotation autour de la droite $x = 3$ de la surface délimitée par les graphes de $y = x^2$ et $y = x + 2$ (il n'est pas demandé de calculer cette intégrale).

6. Calculez l'intégrale indéfinie $\int \ln(x^2+1) \cdot dx$.

7. La région du premier quadrant délimitée par le graphique de l'équation $x = 2y^3 - y^4$ et l'axe des y , en tournant autour de l'axe des x , engendre un solide de révolution. Établissez l'intégrale du volume de ce solide (il n'est pas demandé de calculer cette intégrale).

8. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} - x$. Calculez l'aire A délimitée par G_f , la droite d'équation $y = -x + 2$ et la droite d'équation $x = 1$.

9. Calculez les deux intégrales définies suivantes :

a) $\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{x^4+1} \cdot dx$

b) $\int_{-1}^{2} \frac{1}{e^x+1} \cdot dx$

10. a) Démontrez que si f est une fonction continue, alors $\int_0^a f(x) \cdot dx = \int_0^a f(a-x) \cdot dx$.

b) Utilisez ce résultat pour démontrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} \cdot dx = \frac{\pi}{4}$.

11. Calculez l'intégrale indéfinie $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \cdot dx$.

12. Soit R la région comprise entre les courbes $y = x$ et $y = x^2$ pour x 0 . Cette région R subit une rotation autour de l'axe Ox . Il en résulte un solide dont on demande de calculer le volume.

13. Calculez une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2+3x+x^2}{x\left(x^2+1\right)}$.

14. Calculez l'aire de la surface comprise entre la droite $y = x - 1$ et la parabole $y^2 = 2x + 6$.

15. Calculez les intégrales suivantes :

a) $\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \sqrt{x}\right) \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot dx$

b) $\int_{-2}^{2} \left(x^3 - \sqrt[3]{x}\right) \cdot x^2 \cdot dx$

16. Calculez l'intégrale définie suivante : $\int_1^2 x \cdot \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \cdot dx$.

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(2x^2 - 1\right)$.

   a) Étudiez les variations de f. On précisera le domaine de définition de f, les asymptotes éventuelles, les intervalles de croissance et de décroissance, et les extrema éventuels (on n'étudiera pas la concavité ni les points d'inflexion).

   b) Construisez la courbe représentative de f.

   c) Utilisez la courbe représentative de f pour discuter, suivant les valeurs du paramètre k, le nombre de racines de l'équation $x^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot e^{2k-4x}$ ($k \in \boldsymbol{R}$) .

2. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$.

   Étudiez les variations de f. On précisera le domaine de définition de f, les asymptotes éventuelles, les intervalles de croissance et de décroissance, et les extrema éventuels (on n'étudiera pas la concavité ni les points d'inflexion).

3. Soit la fonction f définie par $f(x) = e^{2x} - 4e^x$.

   a) Étudiez les variations de f et tracez sa courbe représentative. Précisez les asymptotes éventuelles, les intervalles de croissance et de décroissance, et les extrema.

   b) Résolvez l'équation $f(x) = -3$.

   c) Résolvez graphiquement l'inéquation $f(x) > -3$.

4. On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(1 + \tan^2 x\right)$.

   a) Déterminez le domaine de définition de f.

   b) Démontrez qu'il suffit d'étudier f sur $D_E = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

   c) Étudiez les variations de f sur D_E et représentez graphiquement f sur D_E .
   On précisera les asymptotes éventuelles, les intervalles de croissance et de décroissance, et les extrema éventuels (on n'étudiera pas la concavité ni les points d'inflexion).

   d) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Démontrez que g admet une fonction réciproque g^{-1} . Précisez le domaine de définition de g^{-1} .

5. Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln^2 x$. Calculez la limite de f à l'origine.

6. Calculez la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e - e^{\cos x}}{x^2}$.

7. Étudiez sur $\boldsymbol{R}^+$ le signe de la fonction f définie par $f(x) = x \cdot e^{-x} - e^{-1}$.

8. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \left(-1 - x^2 + \ln x\right)$.

   a) Démontrez que la dérivée première de f s'annule pour une seule valeur α et que cette valeur est comprise entre 1 et 2 .

   b) Étudiez les variations de f et tracez sa courbe représentative (sans étudier la concavité).

9. Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln\left|e^x - e^{2x}\right|$.

   a) Étudiez les variations de f. On précisera le domaine de définition de f, les asymptotes éventuelles, les intervalles de croissance et de décroissance, et les extrema éventuels (on n'étudiera pas la concavité ni les points d'inflexion).

   b) On donne $e \approx 2{,}718$ et $\sqrt{e} \approx 1{,}648$.
   Démontrez que f s'annule en un point unique $\alpha \in \left]\, 0 , ½ \,\right[$. Construisez le graphe de f.

   c) Démontrez que la restriction g de f à l'intervalle $\left]\, 0 , +\infty \,\right[$ admet une fonction réciproque notée g^{-1} . Donnez l'expression de $g^{-1}(x)$.

10. Soit la fonction $f : \boldsymbol{R} \setminus \{0\} \to \boldsymbol{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{1/x}}$.

    a) Démontrez que f est prolongeable par continuité à l'origine.

    b) Démontrez que le graphe de f admet à l'origine des demi-tangentes distinctes, à gauche et à droite.

    c) Étudiez les variations de f et tracez sa courbe représentative (sans étudiez la concavité).

11. Déterminez pour quelles valeurs réelles de x l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\frac{1}{2^x - 1} > \frac{1}{1 - 2^{x-1}} \ .$$

12. Déterminez pour quelles valeurs réelles de x on a : $\sqrt{\log_2\left(x^2\right)} < \log_2(8x) - 7$.
    Expliquez soigneusement votre raisonnement.

13. Trouvez tous les nombres réels $x > 0$ pour lesquels l'équation suivante est satisfaite :

$$2^{3x} \cdot \left(8^x + 4\right)^2 = 8 \cdot \left(8^{2x} + 1\right) + (32)^{3x} \ .$$

14. Trouvez toutes les valeurs réelles de pour lesquelles l'égalité suivante est satisfaite :

$$\log_3\left(3^x + 1\right) = -x - 2 + \log_3 4 \ .$$

15. Résoudre dans $\boldsymbol{R}$ l'inéquation suivante : $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1-x} \geq 1$.