Solutions des exercices de préparation au contrôle de synthèse n°1

Classes de 6e - Mathématique 6h - A. Vandenbruaene

Coniques

1. $C \equiv x^2+4x+9y^2-5=0 \Leftrightarrow C \equiv (x+2)^2+9y^2=9 \Leftrightarrow C \equiv \dfrac{(x+2)^2}{9}+y^2=1$.

a) Ellipse horizontale ; $a=3$; $b=1$; $c=2\sqrt{2}$.
Centre (-2,0) . Sommets : (-5,0) , (1,0) et (-2 , ±1) .
Foyers : $(-2-2\sqrt{2} \ , 0)$ et $(-2+2\sqrt{2} \ , 0)$. Excentricité : $e=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

b) Les points P , Q et R , S : $\left(0, \pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$ et $\left(-4, \pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

c) La résolution de l'équation résolvante aux abscisses $37x^2+184x+220=0$ permet de trouver les points $I(-2.97, 0.95)$ et $J(-2,-1)$.

d) Soit $t \equiv y = mx+p$ comprenant $A(1,3)$. On a donc $p = 3 - m$.
On remplace y par $mx+p$ dans l'équation de C ce qui mène à l'équation suivante :

$$\left(1+9m^2\right)x^2+(18m+4)x+9p^2-5=0 .$$

Son discriminant doit être nul : $\Delta = 180m^2+144mp-36p^2+30=0$.

En y remplaçant p par $3-m$, on obtient

$648m - 288 = 0$ et donc $m=\dfrac{4}{9}$.

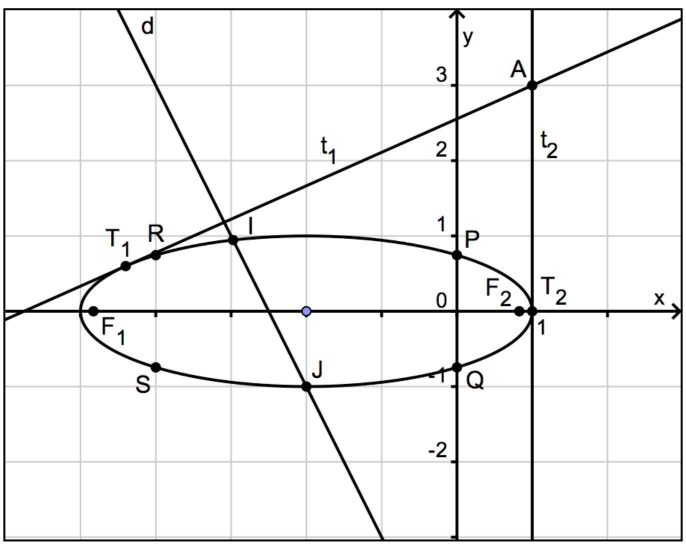
Une des tangentes est donc :

$$t_1 \equiv y = \frac{4}{9}x+\frac{23}{9} .$$

Elle touche C en $T_1\left(-\dfrac{22}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$.

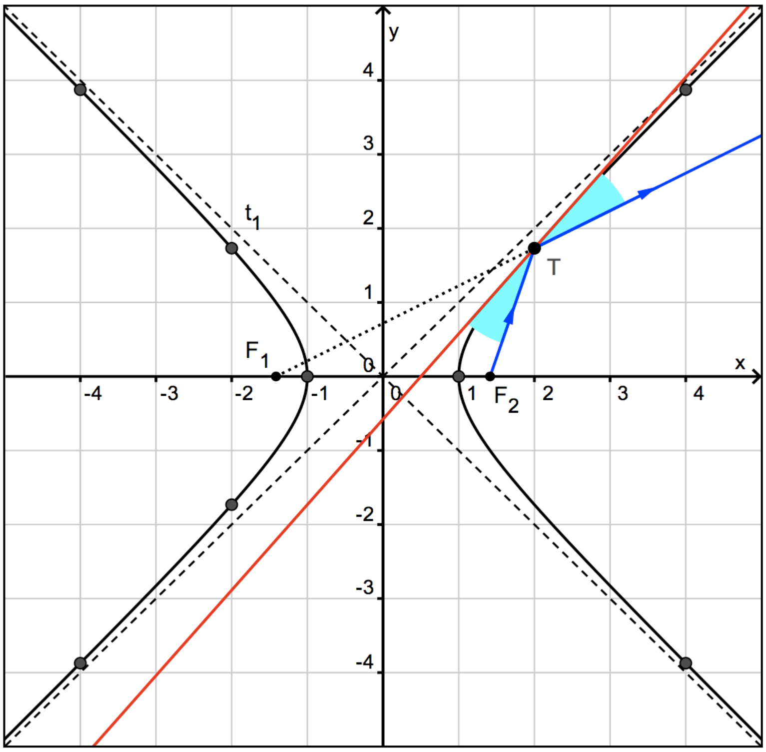
L'autre tangente ne possède pas une équation du type $y=mx+p$ car elle est verticale !

On a donc $t_2 \equiv x=1$ avec $T_2(1,0)$.



2. a) La conique $D \equiv x^2 - y^2 = 1$ est une hyperbole horizontale centrée en $(0{,}0)$.
On a les valeurs suivantes : $a = 1$, $b = 1$ et $c = \sqrt{2}$.
Sommets : $(\pm 1 , 0)$. Foyers : $(\pm\sqrt{2} , 0)$. Asymptotes : $y = \pm x$.

b) Les huit points sont $\left(\pm 2 , \pm\sqrt{3}\right)$ et $\left(\pm 4 , \pm\sqrt{15}\right)$.



c) Le point T a pour coordonnées $\left(2 , \sqrt{3}\right)$.
Les pentes respectives des rayons incident i et réfléchi r sont :

$$m_i = \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}} \approx 2{,}9568 \quad \text{et} \quad m_r = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} \approx 0{,}5073 \ .$$

La fonction associée à la conique D en T est $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

La pente de la tangente t à D en T est : $m_t = y'(2) = \left[\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right]_{x=2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Tangente de l'angle entre i et t : $\tan\hat{\imath} = \left|\dfrac{m_i - m_t}{1 + m_i \, . \, m_t}\right| \approx 0{,}408248$.

Tangente de l'angle entre r et t : $\tan\hat{r} = \left|\dfrac{m_r - m_t}{1 + m_r \, . \, m_t}\right| \approx 0{,}408248$.

L'égalité des tangentes confirme la propriété optique de l'hyperbole : l'angle aigu entre i et t est égal à celui entre r et t (22,2077 °).

3. a) Équation focale : $K \equiv d(P,F) = \frac{3}{2}.d(P,d)$.

b) $d(P,F) = \frac{3}{2}.d(P,d) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{3}{2}.|y-1|$

Après élévation au carré et quelques calculs (courage …), on obtient

$$K \equiv -\frac{x^2}{9/5} + \frac{\left(y-\frac{9}{5}\right)^2}{36/25} = 1 .$$

Il s'agit d'une hyperbole verticale centrée en (0, 9/5) avec $a = \frac{6}{5}$ et $b = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.
Sommets : (0 , 3/5) et (0 , 3) .

Asymptotes : $y = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{9}{5}$.

---

4. On a $e = \frac{c}{a} = 0{,}95$ et $a + c = 20$ (UA) .

La résolution de ce système donne $a \approx 10{,}2564$ (UA) et $c \approx 9{,}7436$ (UA) .
La distance au périhélie est donc : $a - c \approx 0{,}5128$ (UA) .

---

5. a) L'équation de la conique est équivalente à $(y-2)^2 = 4(x-3)$.
Il s'agit donc d'une parabole horizontale ouverte à droite de sommet S(3,2) .
Foyer : F(4,2) .

b) Les points sont (4,0) , (4,4) , (7,-2) et (7,6) .

c) La fonction associée à la partie positive de la conique est : $y(x) = 2\sqrt{x-3} + 2$.

On a $y'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ et $m_t = y'(7) = \frac{1}{2}$. Donc : $t_1 \equiv y - 6 = \frac{1}{2}(x-7) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

d) La pente de d étant égale à -2 , l'équation de la tangente est : $t_2 \equiv y = -2x + p$.
On remplace y par $-2x + p$ dans l'équation de E , ce qui donne l'équation suivante :

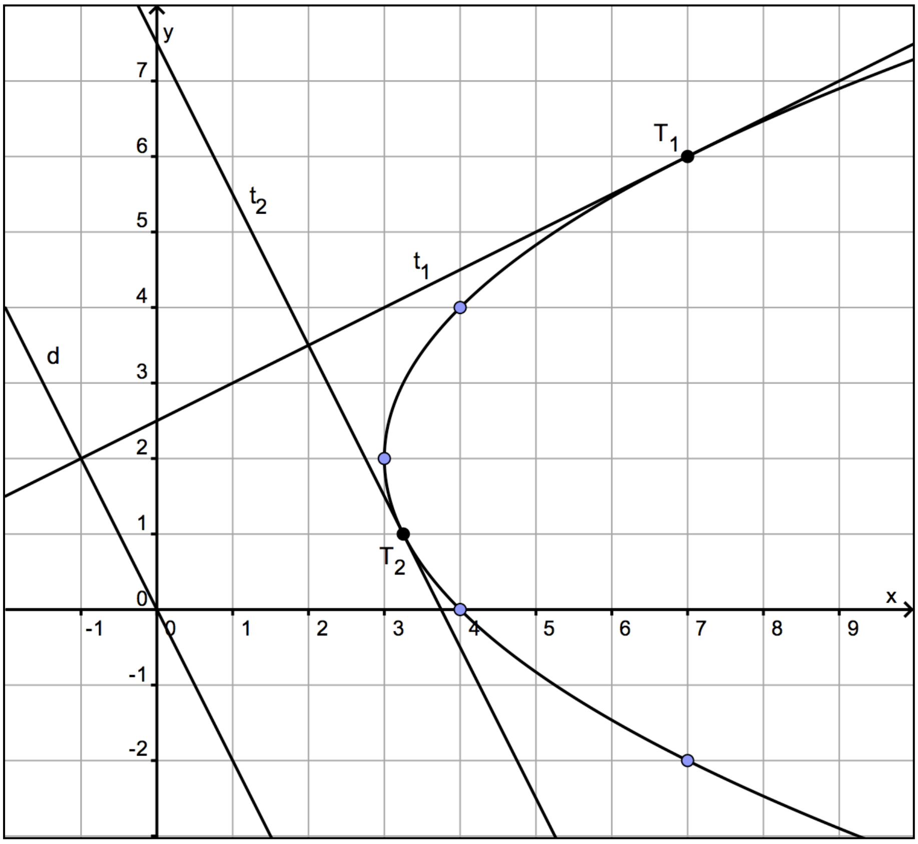
$$4x^2 + 4(1-p)x + p^2 - 4p + 16 = 0 .$$

Son discriminant doit être nul : $\Delta = 32p - 240 = 0$. D'où $p = \frac{15}{2}$ et $t_2 \equiv y = -2x + \frac{15}{2}$.

L'abscisse du point de tangence T_2 est $x_{T_2} = \left[\frac{-4(1-p)}{8}\right]_{p=\frac{15}{2}} = \frac{13}{4}$.

En remplaçant cette valeur dans l'équation de t_2 , on trouve $y_{T_2} = 1$. Donc : $T_2\left(\frac{13}{4},1\right)$.

Vérifications graphiques pour l'exercice n°5



Fonctions logarithmes et exponentielles

1. On a $f(x)=a^x$ et $a^{-3}=\dfrac{64}{27}$. On en déduit $f(x)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^x$.

---

2. On a $f(x)=\log_a x$ et $\log_a 25=4$. On en déduit $f(x)=\log_{\sqrt{5}} x$.

---

3. $\log_a \dfrac{x^2y^3}{\sqrt{z}}=2.\log_a x+3.\log_a y-\dfrac{1}{2}.\log_a z=8$.

---

4. $\ln\left[\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\right]=\ln 1=0$.

---

5. a) $x^2-3x-10>0$ et dom $f=\ \left]-\infty,-2\right[\cup\left]5,+\infty\right[$.

   b) $\left|x^2-3x-10\right|>0\Leftrightarrow x^2-3x-10\neq 0$ et dom $f=\ R\setminus\{-2,5\}$.

---

6. a) C.E. : $-3<x<3$. Solutions : $x=\pm\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$.

   b) C.E. : $0<x<3$. L'équation s'écrit $\ln\dfrac{x^2}{3-x}=0\Rightarrow\dfrac{x^2}{3-x}=1$.

   On trouve $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$. Seule la solution positive est acceptable : $S=\left\{\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

   c) L'équation est équivalente à $e^{2x+1}=\dfrac{1}{3}$. Solution : $x=\dfrac{\ln\frac{1}{3}-1}{2}=\dfrac{-\ln 3-1}{2}$.

   d) L'équation est équivalente à $4^{2-4x}=4^{-x-1}$. Donc : $2-4x=-x-1\Leftrightarrow x=1$.

   e) L'inéquation est équivalente à $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x\geq\left(\dfrac{3}{4}\right)^3$.

   La fonction $f(x)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^x$ étant strictement décroissante dans **R** : $x\leq 3$. $S=\left]-\infty,3\right]$.

   f) La fonction $f(x)=e^x$ étant strictement croissante dans **R** : $-x<\ln 5\ \Leftrightarrow\ x>-\ln 5$.

---

7. L'évolution de cette population est donnée par la formule $P(n)=250.3^n$, où n est le nombre de périodes de 40 minutes.

   a) Après 1 heure : $P(1{,}5)=250.3^{1,5}\approx 1299$ microbes.
   Après 2 heures : $P(3)=250.3^3=6750$ microbes.
   Après 6 heures : $P(9)=250.3^9=4\,920\,750$ microbes.

   b) Il faut résoudre $100000=250.3^n\Leftrightarrow 3^n=400$.
   Donc, $n=\log_3 400\approx 5{,}4537$ ce qui correspond à environ 3 heures et 38 minutes.

8. a) En 2017 : $P(8)=15\,.\,1{,}025^8 \approx 18{,}28$ millions d'habitants.

b) Il faut résoudre l'équation $25=15\,.\,1{,}025^n \Leftrightarrow 1{,}025^n=\dfrac{5}{3}$.

On trouve $n=\log_{1{,}025}\dfrac{5}{3}\approx 20{,}69$. Le pays comptera 25 millions d'habitants en 2037.

---

9. L'évolution de la valeur de la voiture est donnée par la formule $V(n)=12000\,.\,0{,}8^n$, où n est le nombre d'années.

a) Dans 5 ans : $V(5)=12000\,.\,0{,}8^5\approx 3932{,}16$ euros.

b) Il faut résoudre l'équation $0{,}1=0{,}8^n$. On trouve $n=\log_{0{,}8}0{,}1\approx 10{,}32$ années.

---

10. a) La décroissance est exponentielle car toutes les 5 minutes, la température est multipliée par le facteur constant $0{,}8$.

b) L'évolution de la température est donnée par la formule $T(n)=60\,.\,0{,}8^n$, où n est le nombre de périodes de 5 minutes.

Dans 23 minutes : $T(4{,}6)=60\,.\,0{,}8^{4{,}6}\approx 21{,}50$ (°C).

c) Il faut résoudre l'équation $37=60\,.\,0{,}8^n \Leftrightarrow 0{,}8^n\approx 0{,}6167$.

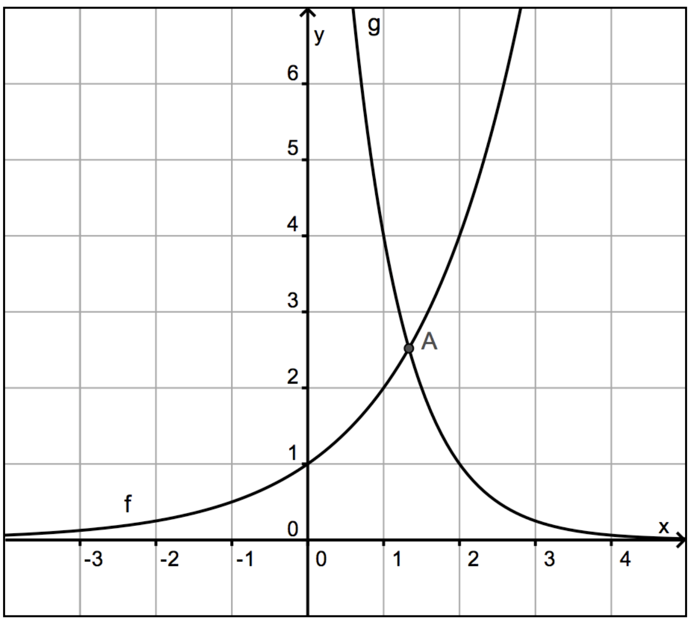
On trouve $n=\log_{0{,}8}0{,}6167\approx 2{,}1664$ périodes de 5 minutes.

Donc, dans $10{,}83$ soit environ 11 minutes.

---

11. b) Il faut résoudre l'équation $2^x=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 2^x=2^{-2x+4}$.

On trouve $x=\dfrac{4}{3}$. Le point d'intersection est $A\left(\dfrac{4}{3},2^{\frac{4}{3}}\right)\approx(1.33\,,2.52)$.



Nombre complexes

1. $\dfrac{3+i}{2-i}+\dfrac{1}{4+i}=\dfrac{(3+i)(2+i)}{5}+\dfrac{4-i}{17}=\dfrac{5+5i}{5}+\dfrac{4-i}{17}=1+i+\dfrac{4-i}{17}=\dfrac{21}{17}+\dfrac{16}{17}i$

---

2. $(1-2i)^3=-11+2i$

---

3. On calcule d'abord le discriminant, ce qui donne : $\Delta=-5+12i$.

   Ensuite, on résout l'équation binôme $z^2=-5+12i$, ce qui permet de trouver les racines carrées de Δ : $2+3i$ et $-2-3i$.

   Les solutions de l'équation sont données par $x=\dfrac{4-i\pm(2+3i)}{2}$.

   Après simplification, on obtient $S=\{3+i,1-2i\}$.

---

4. Même démarche qu'au n°3 avec $\Delta=32-24i$, dont les racines carrées sont $6-2i$ et $-6+2i$.

   Les solutions de l'équation sont données par $x=\dfrac{6+2i\pm(6-2i)}{4i}$.

   Après simplification, on obtient $S=\{-3i,1\}$.

---

5. Le polynôme $p(x)=ix^3-3ix^2+(2+3i)x-2-i$ s'annule pour $x=1$, il est donc divisible par (x - 1) . Effectuant cette division par la méthode de HORNER ou d'EUCLIDE, on obtient :

$$p(x)=(x-1)\left(ix^2-2ix+2+i\right).$$

   Le trinôme du second degré a pour discriminant $\Delta=-8i$, dont les racines carrées sont $2-2i$ et $-2+2i$. Les racines de ce trinôme sont données par : $x=\dfrac{2i\pm(2-2i)}{2i}$.

   Après simplification, on obtient l'ensemble des trois solutions de l'équation : $S=\{1,-i,2+i\}$.

---

6. Sachant que $p(-3)=0$, on trouve $k=12$.

   La division de $p(x)=2x^3+12x^2+47x+87$ par $(x+3)$ donne : $p(x)=(x+3)\left(2x^2+6x+29\right)$.

   Le trinôme du second degré a pour discriminant $\Delta=-196=196i^2$ et on trouve facilement ses racines : $-\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}i$ et $-\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{2}i$.

   Finalement : $p(x)=2.(x+3).\left(x+\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{2}i\right).\left(x+\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}i\right)$.

7. Utilisons les formes trigonométriques :

$$\frac{\left[\sqrt{2}\,.\,cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{12}}{\left[2\,.\,cis\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^{9}} = \frac{2^6.\,cis(-3\pi)}{2^9.\,cis\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{1}{8}\,.\,cis\left(-\frac{9\pi}{2}\right) = \frac{1}{8}\,.\,cis\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{8}\,.\,i\ .$$

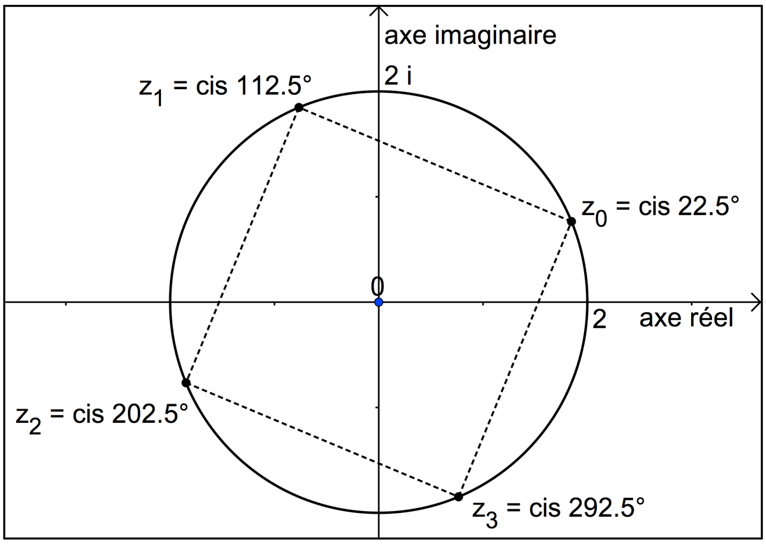
---

8. Il suffit d'effectuer $(2+i)^4$ et on trouve bien $-7+24i$.

---

9. En posant $z=\rho\,.\,cis\theta$, l'équation s'écrit : $\rho^4\,.\,cis4\theta = 16\,.\,cis\frac{\pi}{2}$.

Les solutions sont $z_k = 2\,.\,cis\left(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)$ ($k\in\mathbf{Z}$) .



---

10. Les racines huitièmes de l'unité sont $z_k = cis\left(k\frac{\pi}{4}\right)$ ($k\in\mathbf{Z}$) :

$$z_0 = 1\ ,\ z_1 = cis\left(\frac{\pi}{4}\right),\ \ z_2 = cis\left(\frac{\pi}{2}\right),\ \ z_3 = cis\left(\frac{3\pi}{4}\right),\ \ldots\ ,\ \ z_7 = cis\left(\frac{7\pi}{4}\right).$$
