Fonctions exponentielles et logarithmiques

« Ces fonctions sont d'une importance considérable en mathématique et ont des applications dans presque tous les domaines de l'investigation humaine. Elles se révèlent particulièrement utiles dans les domaines de la chimie, de la biologie, de la physique et des sciences de l'ingénieur, où elles contribuent à décrire la croissance ou la décroissance de certaines quantités de la nature. Comme nous le verrons dans ce chapitre, il y a une relation étroite entre la fonction exponentielle et la fonction logarithmique : l'une est la fonction réciproque de l'autre. »

SWOKOWSKI ET COLE,
« Algèbre et trigonométrie (avec géométrie analytique) », DE BOECK Université.

1. Variation linéaire et variation exponentielle en fonction du temps

Lorsqu'on observe l'évolution dans le temps d'une certaine grandeur (la taille d'un animal, le nombre d'individus dans une population, la croissance d'un capital, etc.), on peut rencontrer différents types de variations parmi lesquelles la variation linéaire et la variation exponentielle.

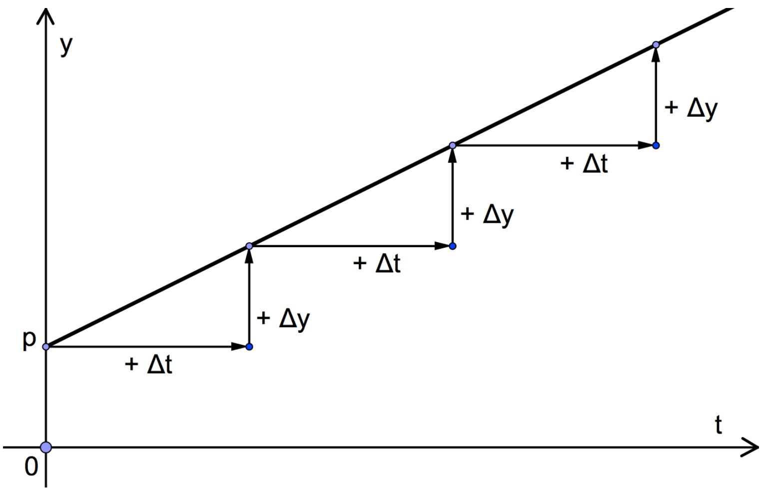
1.1. Variation linéaire

Définition : la grandeur y varie de façon linéaire si, pour un même accroissement de temps Δt, la grandeur y varie d'une même quantité Δy.

Une autre façon d'exprimer cela est de dire que pour des intervalles de temps égaux, la différence entre la valeur finale et la valeur initiale de y est constante.

Tableau de nombres et graphique

t (temps	y
0	p
Δt	$p + \Delta y$
$2\,\Delta t$	$p + 2\,\Delta y$
$3\,\Delta t$	$p + 3\,\Delta y$
…	…



La grandeur « y » est une fonction du premier degré du temps : $y = m\,t + p$.

Notons que $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ est le *taux de variation* de la fonction (il est ici constant et correspond à la *pente* de la droite. La *valeur initiale* de la fonction est p.

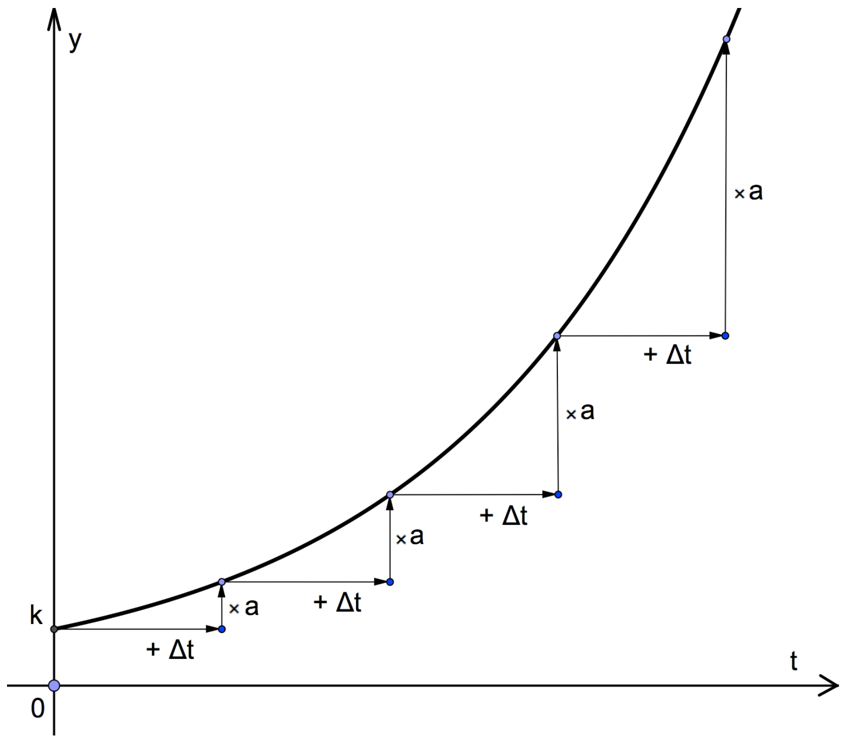
1.2. Variation exponentielle

Définition : la grandeur y varie de façon exponentielle si, pour un même accroissement de temps Δt , elle est multipliée par un même facteur a .

Une autre façon d'exprimer cela est de dire que pour des intervalles de temps égaux, le quotient de la valeur finale par la valeur initiale de y est constant.

Tableau de nombres et graphique

t (temps	*y*
0	*k*
Δt	$k\,.\,a$
$2\,\Delta t$	$k\,.\,a^2$
$3\,\Delta t$	$k\,.\,a^3$
...	...



La grandeur y est une fonction *exponentielle* du temps : $y = k\,.\,a^t$.

Nous appellerons a le *facteur de croissance* ou *base* de l'exponentielle, tandis que k est la valeur initiale de y .

1.3. Taux de variation moyen

Nous savons que pour une grandeur qui varie de façon linéaire, le taux de variation moyen est constant ; c'est aussi la pente de la droite qui représente la fonction.

Qu'en est-il pour une grandeur qui varie de façon exponentielle ?

Calculons le taux de variation moyen de $y = k\,.\,a^t$ entre les instants consécutifs t et $t+1$:

$$TVM = \frac{y(t+1) - y(t)}{(t+1) - t} = \frac{k\,.\,a^{t+1} - k\,.\,a^t}{1} = k\,.\,a^t\,.\,(a-1) = k\,.\,y(t)\,.\,(a-1)\ .$$

Nous constatons que le TVM est proportionnel à la valeur de $y(t)$.
Concrètement, qu'est-ce que cela signifie ? Prenons une fonction exponentielle croissante : plus la valeur de y est grande, plus le TVM est grand. Donc, la croissance de cette fonction s'accélère. Qu'en serait-il d'une fonction exponentielle décroissante ?

La question du taux de variation instantané (dérivée) sera examinée plus loin.

1.4. Exercices

Variation linéaire ou variation exponentielle ?

Dans chacun des exercices 1 à 5 , on donne un tableau de nombres décrivant l'évolution d'une certaine grandeur dans le temps. Il est demandé de :

1° déterminer si cette variation est linéaire ou exponentielle ;
2° donner une formule permettant de calculer la grandeur concernée à un instant donné ;
3° réaliser les prévisions demandées.

1. Un ressort de 70(cm) de long est suspendu verticalement.
   On y accroche différentes masses et on note les longueurs correspondantes du ressort.

Masse (en kilos)	0	0,49	0,98	1,47	1,96	2,45	2,94
Longueur (en cm)	70	71,5	73	74,5	76	77,5	79

   Quelle longueur peut-on prévoir avec une masse de 4 kilos ?

---

2. Le thé vient d'être servi ! La température ambiante du salon est de 20(°C) et une personne décide de mesurer la température du thé toutes les 4 minutes. Voici les résultats.

Temps (en minutes)	0	4	8	12	16	20
Température (en °C)	95	81	68,5	58,5	49,5	42

   Quelle sera la température du thé après 24 minutes ? Que valait-elle après 10 minutes ?

---

3. Une cuve de forme parallélépipédique, contenant du mazout de chauffage, est équipée d'une jauge extérieure. Dès le 1er novembre 2005, le propriétaire de l'installation décide de mesurer chaque semaine la hauteur indiquée par la jauge. Voici ses résultats.

Temps (en semaines)	0	1	2	3	4	5
Hauteur (en cm)	167	161,4	155,8	150,2	144,6	139

   a) Quelle hauteur la jauge indiquera-t-elle après 9 semaines (le 2 janvier 2006) ?

   b) La réserve de mazout est-elle suffisante pour chauffer l'habitation jusqu'au retour des beaux jours ? Disons … le 1er mai (après 26 semaines).

---

4. Un détecteur est utilisé pour mesurer la radioactivité d'un échantillon et l'évolution de cette activité au cours du temps. La mesure est basée sur le nombre d'impulsions par minute que reçoit le détecteur. Voici les résultats obtenus.

Temps (jours)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270
Activité (impulsions par minute)	1000	869	757	658	571	498	430	377	328	262

   a) Quelle sera l'activité de l'échantillon après une année (360 jours) ?

   b) Après combien de jours l'activité n'était-elle plus que la moitié de celle de départ ?

5. Voici des mesures de la concentration du dioxyde de carbone dans l'atmosphère entre 1972 et 1990. La concentration est exprimée en « parties par million » (ppm), c'est-à-dire le nombre de particules de CO_2 parmi un million d'autres particules.

Année	1972	1974	1976	1978	1980	1982	1984	1986	1988	1990
CO_2 (ppm)	327,3	330	332	335,3	338,5	341	344,3	347	351,3	354

Quelle aurait été la concentration de CO_2 en 2000 ? Quand dépassera-t-elle 400 (ppm) ?

Questions relatives à des variations exponentielles

6. Un éleveur vient d'acheter un poulain de 60 kilos. Le poids du jeune cheval devrait augmenter régulièrement de 15% par mois. Si cette hypothèse se vérifie,

   a) quel sera son poids dans 6 mois ?

   b) déterminer l'expression analytique de la fonction qui donne le poids de l'animal (en kilos) en fonction du temps (en mois).

---

7. Un produit bancaire offre un taux d'intérêt de 1,25 % l'an (il s'agit d'intérêts composés, c'est-à-dire que les intérêts obtenus après un an produisent eux-mêmes des intérêts l'année suivante et ainsi de suite).
Si un client place une somme de 2500 € dans ce produit, de quelle somme disposera-t-il dans 5 ans si le taux ne change pas ?

---

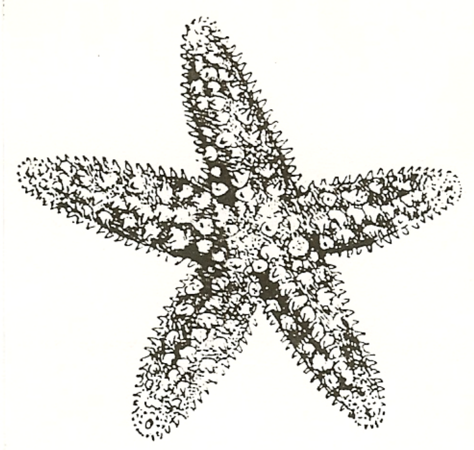
8. Avec un taux d'intérêt de 2,5 % l'an, quel capital faut-il placer à intérêts composés pour obtenir, dix ans après, une somme de 5000 € ?

---

9. Une étoile de mer mesure 2(cm) de diamètre le 31 juillet. Son diamètre augmente de 25% tous les 10 jours jusqu'au 9 octobre inclus.

   a) Déterminer l'expression analytique de la fonction qui donne le diamètre de l'animal en fonction du temps (en nombre de périodes de 10 jours).

   b) Voici l'animal représenté en vraie grandeur le 12 septembre.
   Vérifier si ses dimensions correspondent à ce que la fonction déterminée au point (a) permettait de prévoir.



Faisons le point ...

Nous savons que si une grandeur y, de valeur initiale y_0, croît de façon exponentielle, cette croissance est décrite par la relation

$$y = y_0 \,.\, a^t$$

où a est le facteur de croissance et t le nombre d'unités de temps écoulées depuis l'instant initial.

D'après les exercices précédents, nous pouvons dire que si une grandeur y, de valeur initiale y_0, croît de r % par unité de temps, sa croissance est exponentielle et décrite par la relation

$$y = y_0 \,.\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

Le facteur de croissance est $a = 1 + \dfrac{r}{100}$.

Suite des exercices

10. La population d'une ville varie de façon exponentielle et son facteur de croissance annuel vaut 1,02 . Quel est le taux de croissance annuel de cette population ?

---

11. Une population de bactéries possède un taux de croissance journalier de 30% .
Quel est le facteur de croissance correspondant ? Et si le taux était de 120% ?

---

12. Une population de microbes triple tous les jours.

    a) Quels sont ses facteur et taux de croissance journaliers ?

    b) Et les facteur et taux de croissance hebdomadaires ?

---

13. Sachant que le facteur de croissance d'une population de microbes vaut 2 pour une période de 20 minutes, déterminer le facteur de croissance pour une période de

    a) 1 heure

    b) 10 minutes

    c) 5 minutes

---

14. Un certain type de bactérie voit sa population tripler toutes les 20 minutes.
A l'instant $t = 0$, il y a 50 bactéries.

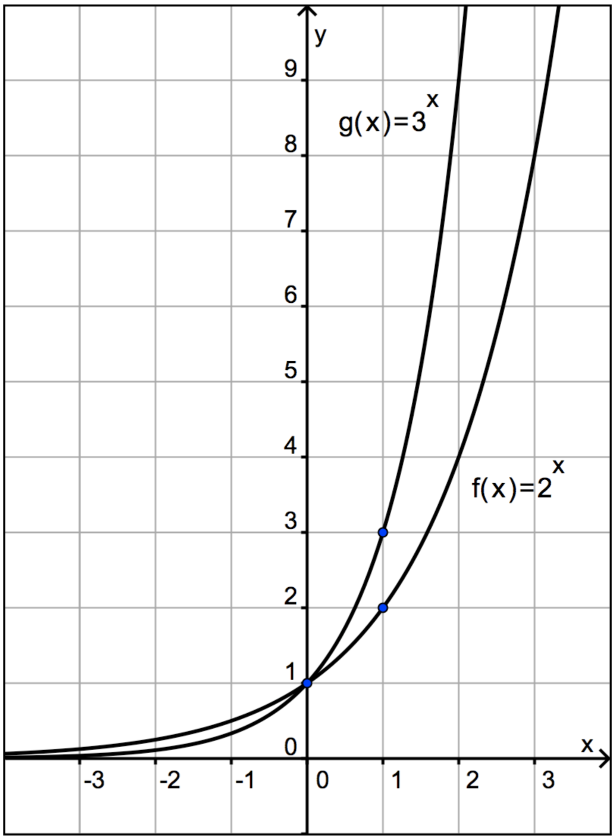
    a) Déterminer l'expression analytique de la fonction qui donne le nombre N de bactéries en fonction du nombre t de périodes de 20 minutes écoulées depuis le début de l'observation.

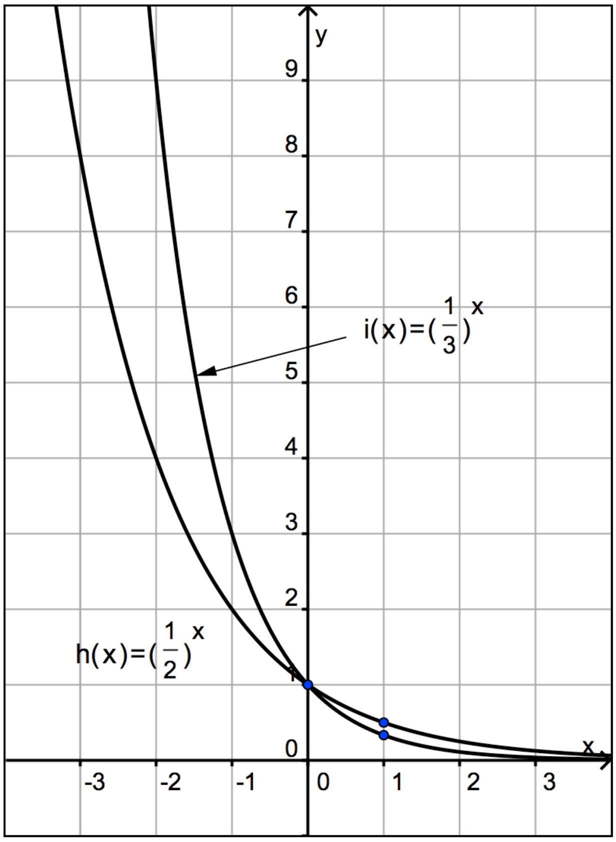
    b) Que devient cette expression si t représente le nombre d'heures au lieu du nombre de périodes de 20 minutes ?

2. Fonctions exponentielles

Définition : une fonction exponentielle est une fonction définie par $f(x) = a^x$ où a est un nombre réel strictement positif différents de 1, appelé *base de l'exponentielle*.

Exemples : $f(x) = 2^x$ et $g(x) = 3^x$ (à gauche) ; $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ et $i(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ (à droite).





Propriétés

Soit une fonction exponentielle $f(x) = a^x$.

- Son domaine de définition est l'ensemble R (voir explications ci-dessous).
- Son ensemble des images est R_0^+ .
- Son graphique comprend toujours les points $(0,1)$ et $(1, a)$.
- Lorsque $a > 1$: la fonction est strictement croissante dans R et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$;
  on a aussi $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ (asymptote horizontale $y = 0$ pour $x \to -\infty$).
- Lorsque $0 < a < 1$: la fonction est strictement décroissante dans R et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ (asymptote horizontale $y = 0$ pour $x \to +\infty$) ; on a aussi $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

Remarques

1° Pourquoi faut-il que la base a de l'exponentielle soit un nombre réel strictement positif et différent de 1 ?

- Si a était négatif, certaines puissances de a n'existeraient pas.
  Par exemple, si $a = -2$, la fonction $f(x) = a^x$ ne serait pas définie pour $x = ½$
  car $(-2)^{\frac{1}{2}}$ n'existe pas.

- Si $a = 0$, la fonction $f(x) = a^x$ ne présente aucun intérêt (elle n'est définie que pour les réels strictement positifs et elle vaut alors 0).

- Si $a = 1$, la fonction est constante de valeur 1 .

2° Une fois que la condition $a \in R_0^+ \setminus \{1\}$ est respectée, comment justifier que le domaine de définition de $f(x) = a^x$ est *R* ?

Considérons par exemple la fonction $f(x) = 2^x$.
Nous connaissons la signification des exposants rationnels d'un nombre, les rationnels étant les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers :

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \qquad 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \qquad 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8} \qquad 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \qquad \text{etc.}$$

Mais qu'en est-il si l'exposant est irrationnel (impossible à écrire sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers), par exemple $x = \pi$?

Nous admettrons que le réel 2^π existe et qu'il est possible de l'approcher d'aussi près que l'on veut en l'encadrant par deux puissances rationnelles de 2 .
Ceci est illustré par une suite d'inégalités obtenues en sachant que $\pi = 3{,}141592654 \ldots$ et que la fonction $f(x) = 2^x$ est croissante.

$3 < \pi < 4$	donc	$2^3 < 2^\pi < 2^4$	
$3{,}1 < \pi < 3{,}2$	donc	$2^{3,1} < 2^\pi < 2^{3,2}$	
$3{,}14 < \pi < 3{,}15$	donc	$2^{3,14} < 2^\pi < 2^{3,15}$	
$3{,}141 < \pi < 3{,}142$	donc	$2^{3,141} < 2^\pi < 2^{3,142}$	etc.

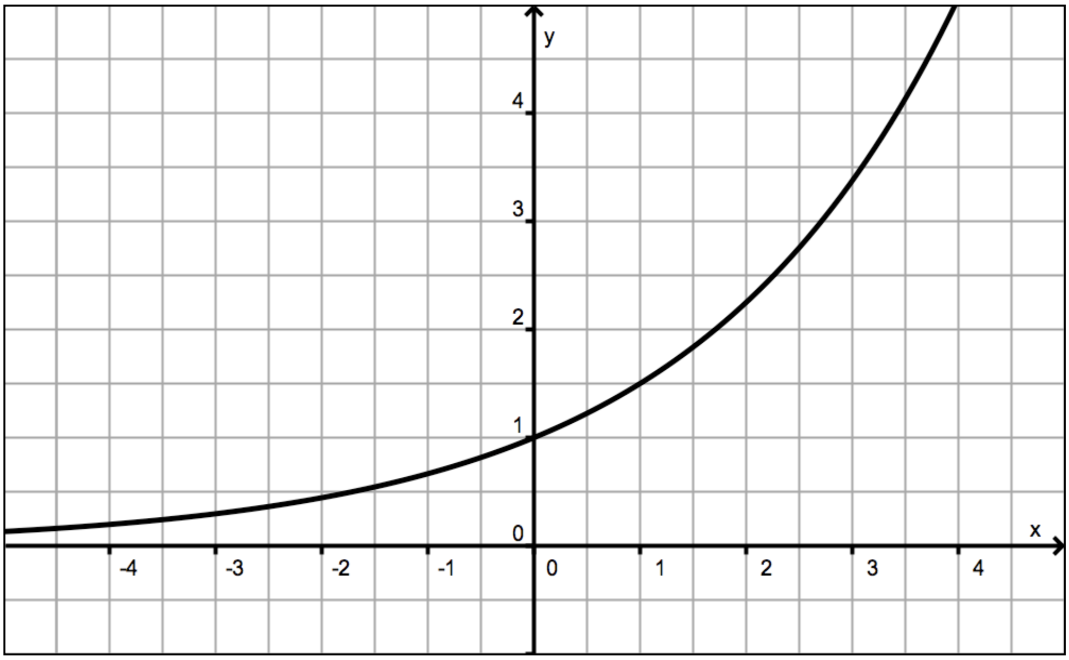
De la même façon, nous pouvons admettre que toute puissance irrationnelle de 2 existe.
La conséquence en est que toute puissance réelle de 2 existe et que $\text{dom} f = R$.
Il en va de même pour toute autre fonction exponentielle.

Exercices

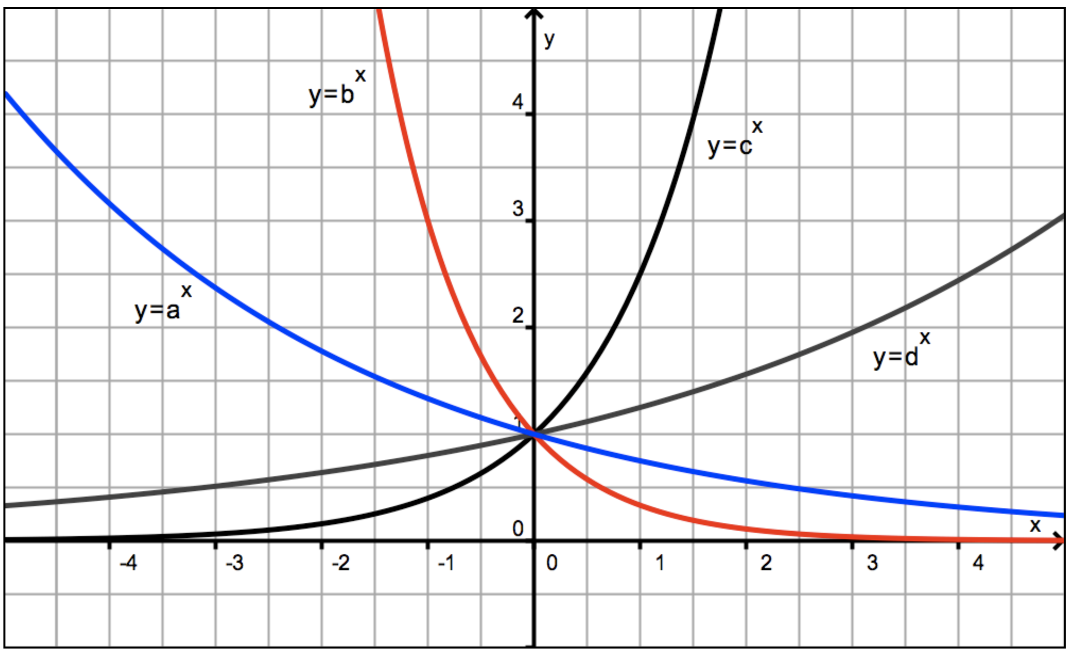
1. Voici le graphique d'une fonction $f(x) = a^x$.

   a) Déterminez la valeur de a .

   b) Tracer le graphique de la fonction $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ sur le même diagramme. Expliquez.



2. Voici les graphiques de quatre fonctions exponentielles de bases respectives a , b , c et d . Classez les nombres a , b , c , d et 1 dans un ordre croissant.



3. La fonction exponentielle de base « e » (exponentielle népérienne)

3.1. Un peu d'algèbre financière (calculs d'intérêts)

Intérêts simples

Supposons qu'une somme de 5000 € soit placée sur un compte bancaire au taux d'intérêt simple de 3% l'an pendant 5 ans. À combien s'élèvera le capital à l'échéance ?

Le taux de 3% signifie qu'une somme de 100 € produit 3 € d'intérêts en un an.

Une somme de 5000 € produira donc $5000 \,.\, \frac{3}{100} = 150$ € d'intérêts et le capital au bout d'un an s'élèvera à 5150 € (ceci s'obtient aussi en faisant 5000 x 1,03).

Comme il s'agit d'intérêt simple, pour chacune des années suivantes, l'intérêt se calcule toujours sur la somme de départ, soit 5000 € .

Chaque année rapporte donc le même montant en intérêts : 150 € .
Après 5 ans, le capital s'élèvera donc à 5000 + 150 . 5 = 5750 € .

On peut généraliser. Si le taux est de r % l'an : $5000 + 5000 \,.\, \frac{r}{100} \,.\, 5$.

Généralisons davantage : au lieu de 5000 € , soit $C(0)$ le capital de départ, et au lieu de 5 ans, soit n le nombre d'années.

Le capital $C(n)$ après n années est alors donné par :

$$\boxed{C(n) = C(0) + C(0)\,.\,\frac{r}{100}\,.\,n}$$

Dans le cas de l'intérêt simple, nous pouvons noter que la croissance du capital dans le temps est linéaire avec un taux d'accroissement égal à $C(0) \cdot \frac{r}{100}$.

Intérêts composés

Supposons qu'une somme de 5000 € soit placée sur un compte bancaire au taux d'intérêt composé de 3% l'an pendant 5 ans. À combien s'élèvera le capital à l'échéance ?

Pour la première année, rien ne change par rapport à l'exemple précédent. Le capital au bout d'un an s'élève donc à 5000 x 1,03 = 5150 € .

Il s'agit maintenant d'intérêts composés. Cela signifie qu'à la fin de chaque période (de chaque année dans le cas présent), les intérêts s'ajoutent au capital pour produire eux-mêmes des intérêts au cours des périodes suivantes.

Ainsi, à la fin de la deuxième année, le capital s'élève à 5150 x 1,03 = 5304,50 € .
Ce montant s'obtient aussi en remarquant que le capital de départ a été multiplié par 1,03 deux fois de suite : $5000 \times 1{,}03^2 = 5304{,}50$ € .

De cette manière, nous aurons successivement,

à la fin de la troisième année : 5000 x $1{,}03^3 \approx 5463{,}64$ €
à la fin de la quatrième année : 5000 x $1{,}03^4 \approx 5627{,}54$ €
à la fin de la cinquième année : 5000 x $1{,}03^5 \approx 5796{,}37$ €

On peut généraliser. Si le taux est de $r\,\%$ l'an : $5000 . \left(1+\dfrac{r}{100}\right)^5$.

Généralisons davantage : au lieu de 5000 € , soit $C(0)$ le capital de départ, et au lieu de 5 ans, soit n le nombre d'années.

Le capital $C(n)$ après n années est alors donné par :

$$\boxed{C(n) = C(0) . \left(1+\frac{r}{100}\right)^n}$$

Dans le cas de l'intérêt composé, nous pouvons noter que la croissance du capital dans le temps est exponentielle avec un facteur de croissance égal à $1+\dfrac{r}{100}$.

Notons enfin que n peut désigner autre chose que des années (des mois par exemple) et que le taux r doit être adapté à la période choisie (taux mensuel par exemple).

Exercice

Un capital de 3500 € est placé sur un compte bancaire au taux annuel de 2,75% .
À combien s'élèvera le capital dans 10 ans dans le cas de l'intérêt simple ?
Et dans le cas de l'intérêt composé ?

3.2. La croissance vertigineuse d'un capital (vers l'exponentielle de base « e »)

Imaginons un super capitaliste dont la fortune est placée au taux de … 100% l'an !

Après un an, son capital aura doublé, ce qui est bien sûr confirmé par la formule des intérêts composés :

$$C_{1\,an} = C(0)\,.\left(1+\frac{100}{100}\right)^{1} = 2\,.C(0)\ .$$

Imaginons maintenant qu'au cours de la première année, les intérêts soient capitalisés chaque mois. Quel sera le capital après un an ?

Comme la période de capitalisation est le mois, il faut d'abord se demander quel est le taux mensuel qui correspond à un taux annuel de 100% .

Si 100 € rapportent 100 € en un an, alors ils rapportent $\frac{100}{12}$ € en un mois.

Nous avons donc un taux mensuel : $r_{mensuel} = \frac{100}{12}$.

Calculons maintenant l'évolution de ce capital, mois après mois :

$$C_{1\,mois} = C(0)\,.\left(1+\frac{100/12}{100}\right)^{1} = C(0)\,.\left(1+\frac{1}{12}\right)^{1} \approx 1{,}0833\,.C(0)$$

$$C_{2\,mois} = C(0)\,.\left(1+\frac{1}{12}\right)^{2} \approx 1{,}1736\,.C(0)$$

$$C_{3\,mois} = C(0)\,.\left(1+\frac{1}{12}\right)^{3} \approx 1{,}2714\,.C(0)$$

… etc.

Exercice

Poursuivez et approfondissez le travail entamé ci-dessus, c'est-à-dire :

a) Calculez le capital au bout d'un an dans le cas de la capitalisation mensuelle.

b) Imaginez une capitalisation journalière. Calculez le taux journalier correspondant à un taux annuel de 100% . Calculez le capital au bout d'un an (365 jours).

c) Calculez le capital au bout d'un an dans le cas d'une capitalisation après chaque heure !

d) Calculez le capital au bout d'un an dans le cas d'une capitalisation après chaque minute !

e) Il est possible de pousser le processus aussi loin que l'on veut … Essayez.

f) Reprenez tous les résultats obtenus précédemment pour le capital au bout d'un an.
Il est toujours égal au capital de départ $C(0)$ multiplié par un certain coefficient .
Comment évolue ce coefficient ? Commentez.

3.3. Le nombre « e » et l'exponentielle népérienne

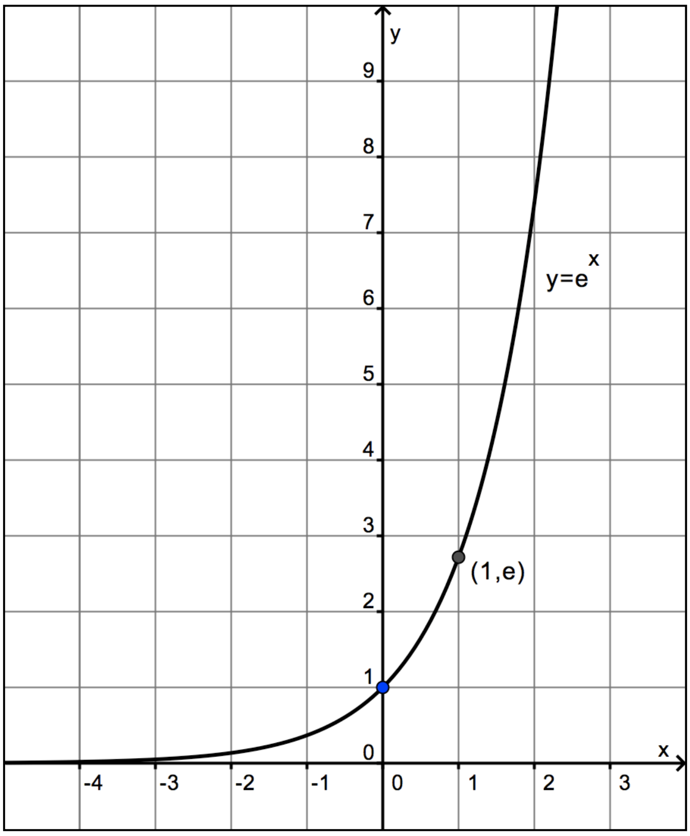
Le nombre « e » est défini par la formule

$$\boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Le nombre « e » est irrationnel ce qui signifie notamment que son écriture décimale est illimitée et non périodique.

$$\boxed{e \approx 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 0287\ \ldots}$$

L'exponentielle de base « e », aussi appelée exponentielle népérienne en l'honneur du mathématicien écossais John NAPIER (1550-1617), est définie par $f(x) = e^x$.



Cette fonction possède bien sûr toutes les propriétés des fonctions exponentielles.
Entre autres, comme $e > 1$, elle est strictement croissante dans R .

Son graphique comprend les points (0,1) et (1,e) et possède l'axe des abscisses comme asymptote horizontale lorsque $x \to -\infty$ (AH $\equiv y = 0$).

Les calculatrices scientifiques possèdent toutes une fonction permettant de calculer les valeurs de cette fonction : SHIFT e^x (CASIO) ou 2nd e^x (TEXAS).

Ainsi : $e^2 \approx 7{,}3991$; $e^3 \approx 20{,}0855$; $e^{-1} \approx 0{,}3679$; $e^{-2} \approx 0{,}1353$; etc.

4. Logarithmes

4.1. Exemples et définitions

Exemple 1

Un certain type de bactérie a besoin de vingt minutes pour se diviser. En plaçant une telle bactérie dans un milieu suffisamment nutritif, combien de temps faudra-t-il pour observer 512 bactéries ?

Soit n le nombre de périodes de vingt minutes nécessaires. Il s'agit de résoudre l'équation

$$2^n = 512 .$$

Il faut donc déterminer l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever 2 pour obtenir 512.
Cet exposant s'appelle le logarithme en base 2 de 512 .

On note : $n = \log_2 512$. Dans notre cas, on peut le trouver facilement : $n = 9$.

Exemple 2

Une population de bactéries comptant 1000 individus au départ croît de 15 % par jour.
Dans combien de temps y aura-t-il 20 000 bactéries ?

Soit n le nombre de jours (pas nécessairement entier !). Il faut résoudre l'équation :

$$20000 = 1000 \,.\, 1{,}15^n .$$

C'est-à-dire :

$$20 = 1{,}15^n$$

Il faut déterminer l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever 1,15 pour obtenir 20 .
Cet exposant s'appelle le logarithme en base 1,15 de 20 .

On note : $n = \log_{1{,}15} 20$.

Nous pouvons obtenir une valeur approximative de ce nombre en tâtonnant à l'aide d'une calculatrice ($n \approx 21{,}6$) , mais nous verrons un moyen de calcul précis dans la suite de ce cours.

Définition : soit un réel a strictement positif et différent de 1 ; le logarithme en base a d'un nombre réel x est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever a pour obtenir x .

En langage symbolique, cela donne :

$$\boxed{\text{si } a \in R_0^+ \setminus \{1\} \text{ , on a : } \log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x}$$

Quelques exemples

- $\log_2 8 = 3$ car $2^3 = 8$
- $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ car $3^{-2} = \frac{1}{9}$
- $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$ car $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

Remarques

Quelle que soit la base $a \in R_0^+ \setminus \{1\}$

1° seuls les réels strictement positifs possèdent un logarithme de base a (car toute puissance de a étant strictement positive, si $x \leq 0$, il est impossible d'avoir $a^y = x$)

2° $\log_a 1 = 0$ (car $a^0 = 1$)

3° $\log_a a = 1$ (car $a^1 = a$)

Logarithmes particuliers

Les deux logarithmes les plus couramment utilisés se trouvent parmi les fonctions de toute calculatrice scientifique.

Logarithme décimal : il s'agit du logarithme en base 10 (touche « log »).

On le note simplement « log » et non « $\log_{10}$ ». Ainsi :

$\log 1000 = 3$	car	$10^3 = 1000$	
$\log 0{,}01 = -2$	car	$10^{-2} = 0{,}01$	
$\log 2500 \approx 3{,}39794$	car	$10^{3{,}39794} \approx 2500$	(calculatrice)

Logarithme népérien : il s'agit du logarithme en base e (touche « ln »).

On le note simplement « ln » et non « $\log_e$ ». Ainsi :

$\ln e^2 = 2$	car	$e^2 = e^2$	
$\ln \frac{1}{e} = -1$	car	$e^{-1} = \frac{1}{e}$	
$\ln 2500 \approx 7{,}82405$	car	$e^{7{,}82405} \approx 2500$	(calculatrice)

Exercices

1. Calculez les logarithmes suivants.

a) $\log_5 125$

b) $\log_2 \frac{1}{2}$

c) $\log_{\sqrt{2}} 2$

d) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

e) $\log_4 1024$

f) $\log_9 27$

g) $\log_2 8\sqrt{2}$

h) $\log_4 \frac{\sqrt{2}}{2}$

i) $\log_4 32$

j) $\log_9 243$

k) $\ln\left(e\sqrt{e}\right)$

l) $\ln \frac{1}{e^2}$

2. Sachant que $a \in R_0^+ \setminus \{1\}$, déterminez les logarithmes suivants.

a) $\log_a a^3$

b) $\log_a \sqrt{a}$

c) $\log_a \dfrac{1}{a^2}$

d) $\log_a \sqrt[3]{a^5}$

e) $\log_a \dfrac{1}{\sqrt{a}}$

f) $\log_a \dfrac{1}{a^2 \sqrt[4]{a}}$

---

3. Résolvez les équations suivantes d'inconnue x ($a \in R_0^+ \setminus \{1\}$) .

a) $\log_x 125 = 3$

b) $\log_2 x = 7$

c) $\log_x a = 1$

d) $\log 10^{-12} = x - 1$

e) $\log_x 2 = -2$

f) $\log_3 \left(x^2 + 1\right) = 2$

4.2. Propriétés des logarithmes

Quels que soient les réels x , $y \in R_0^+$, et quel que soit la base $a \in R_0^+ \setminus \{ 1 \}$:

① Logarithme d'un produit $\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$

② Logarithme d'un quotient $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

③ Logarithme d'une puissance $\log_a x^n = n.\log_a x$ ($n \in R$)

Démonstration de la propriété ①

Posons d'abord $\log_a x = p$. Cela signifie aussi que $a^p = x$ (1) .
Posons ensuite $\log_a y = q$. Cela signifie aussi que $a^q = y$ (2) .

Nous obtenons successivement :

1er membre	=	$\log_a(x.y)$	
	=	$\log_a\left(a^p.a^q\right)$	[d'après (1) et (2)]
	=	$\log_a\left(a^{p+q}\right)$	[règle de calcul relatives aux puissances]
	=	$p+q$	[définition d'un logarithme]
	=	$\log_a x + \log_a y$	[voir ce qui a été posé au départ]
	=	2e membre	

Exercices

1. Sur le modèle de la démonstration de la propriété ① , démontrer les propriétés ② et ③ .

---

2. Sachant que $\log 2 \approx 0{,}30$ et que $\log 3 \approx 0{,}48$, calculez une valeur approximative des logarithmes suivants :

   a) $\log 24$ b) $\log \dfrac{27}{4}$ c) $\log 18\sqrt{3}$

---

3. En vous basant sur les propriétés des logarithmes, calculez la valeur de chacune des expressions suivantes.

   a) $\ln 3 + \ln \dfrac{1}{3}$ b) $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$

4.3. Formule de changement de base

Imaginons que, dans un problème, nous soyons amenés à déterminer la valeur de $\log_{1,15} 2$.

Les calculatrices ne permettent pas d'obtenir directement la valeur d'un logarithme en base 1,15 d'un nombre. Elles ne fournissent en effet que les logarithmes décimaux (« log ») et les logarithmes népériens (« ln »).
C'est l'une de ces deux bases qu'il nous faudra utiliser pour parvenir à nos fins.

Problème général : calculer $\log_a x$ où a est une base quelconque.

Posons $\log_a x$. Nous avons donc $a^y = x$. Soit maintenant b une autre base quelconque.

Nous avons successivement : $\log_b a^y = \log_b x$

$$y.\log_b a = \log_b x$$

$$y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Finalement : $\boxed{\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}}$

Application : calcul de $\log_{1,15} 2$ ($a = 1{,}15$)

Si $b = 10$: $\log_{1,15} 2 = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}15} \approx \dfrac{0{,}3010}{0{,}0607} \approx 4{,}9595$; si $b = e$: $\log_{1,15} 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}15} \approx \dfrac{0{,}6931}{0{,}1398} \approx 4{,}9595$.

Exercice : calculez les logarithmes suivants avec quatre décimales exactes.

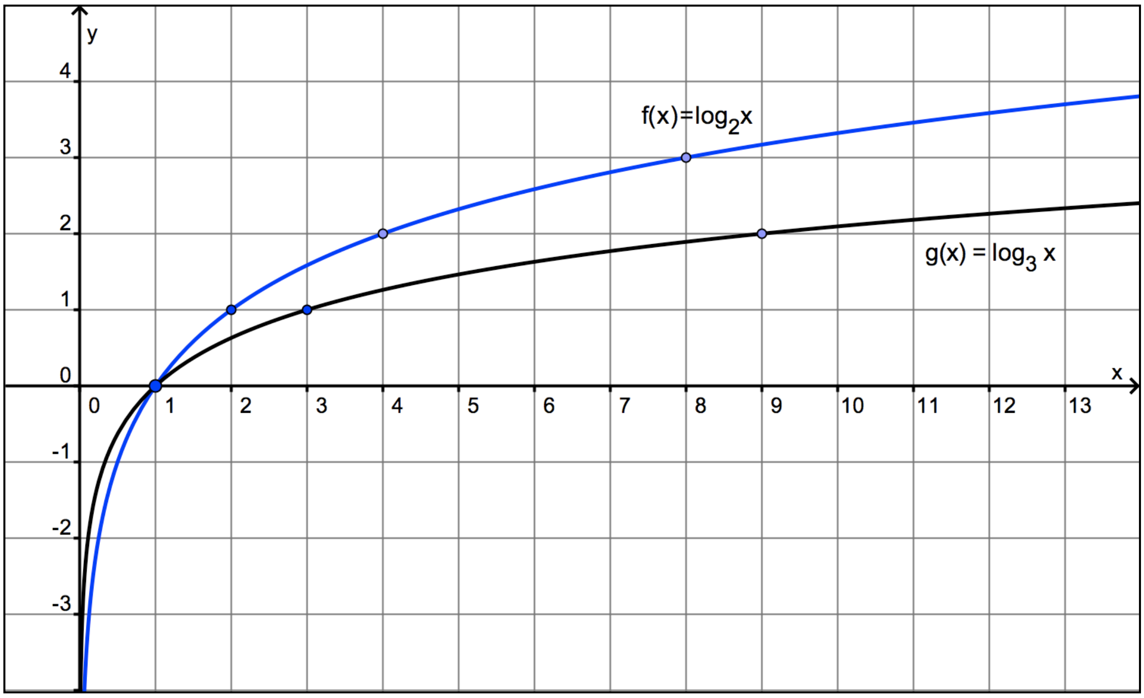
a) $\log_2 19$ b) $\log_3 \left(\dfrac{1}{6}\right)$ c) $\log_{0,5} 3$ d) $\log_{0,5} 0{,}8$

5. Fonctions logarithmiques

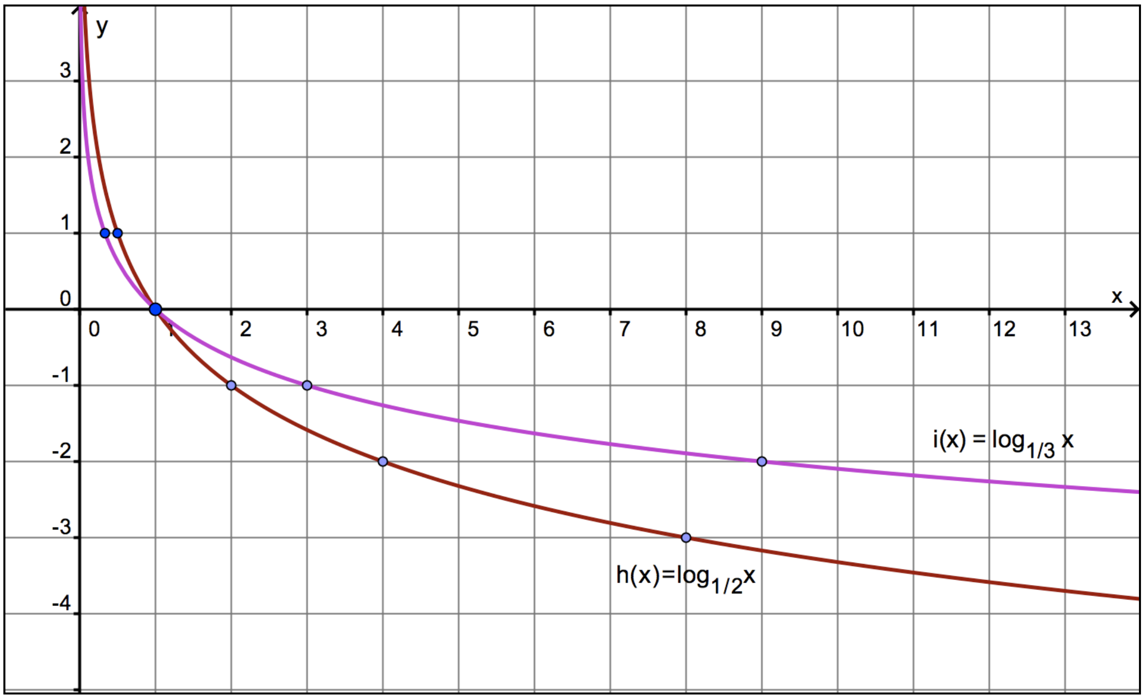
Définition : une fonction logarithmique est une fonction définie par $f(x) = \log_a x$ où a est un nombre réel strictement positif différent de 1 , appelé *base* du logarithme.

Exemples (à comparer avec les fonctions exponentielles présentées à la page 6).

$$f(x) = \log_2 x \quad \text{et} \quad g(x) = \log_3 x$$



$$h(x) = \log_{1/2} x \quad \text{et} \quad i(x) = \log_{1/3} x$$



Propriétés

Soit une fonction logarithmique $f(x) = \log_a x$.

- Son domaine de définition est l'ensemble $\mathbb{R}_0^+$ (en effet, seuls les nombres strictement positifs possèdent un logarithme ; voir explication page 14).
- Son ensemble des images est $\mathbb{R}$.
- Son graphique comprend toujours les points $(1,0)$ et $(a,1)$.
- Lorsque $a > 1$: la fonction est strictement croissante dans $\mathbb{R}_0^+$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$; on a aussi $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ (asymptote verticale $x = 0$).
- Lorsque $0 < a < 1$: la fonction est strictement décroissante dans $\mathbb{R}_0^+$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$; on a aussi $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$ (asymptote verticale $x = 0$).

Lien entre fonctions logarithmiques et exponentielles

Soit $a \in R_0^+ \setminus \{ 1 \}$. La fonction logarithmique de base a et la fonction exponentielle de base a sont des fonctions *réciproques* l'une de l'autre.

Voici une façon de le vérifier. Soit la fonction $f(x) = \log_a x$.

La définition d'un logarithme et nos connaissances sur les fonctions réciproques nous permettent d'écrire :

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = a^y \ .$$

Et donc $f^{-1}(x) = a^x$.

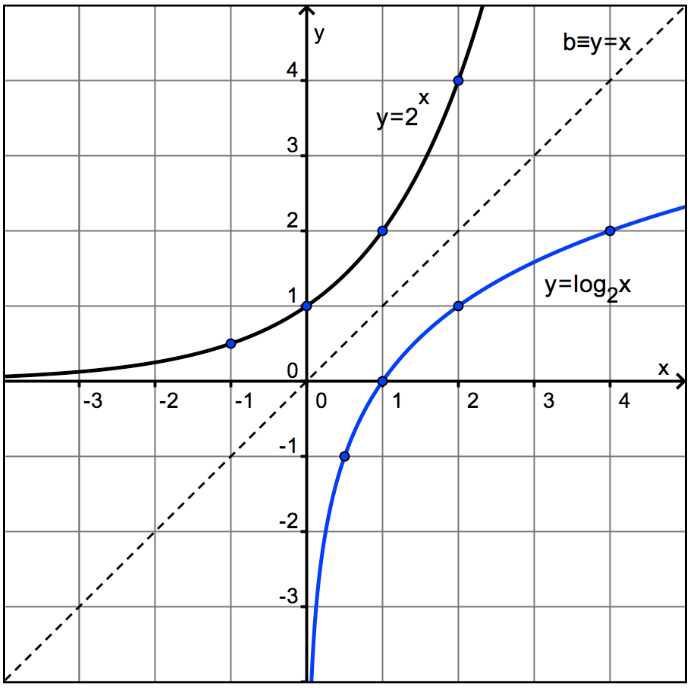
Par conséquent, les graphiques de

$f(x) = \log_a x$ et de $f^{-1}(x) = a^x$

sont symétriques par rapport à la bissectrice du premier quadrant.

Cette propriété est illustrée ci-contre par les graphiques des fonctions

$f(x) = \log_2 x$ et de $f^{-1}(x) = 2^x$.

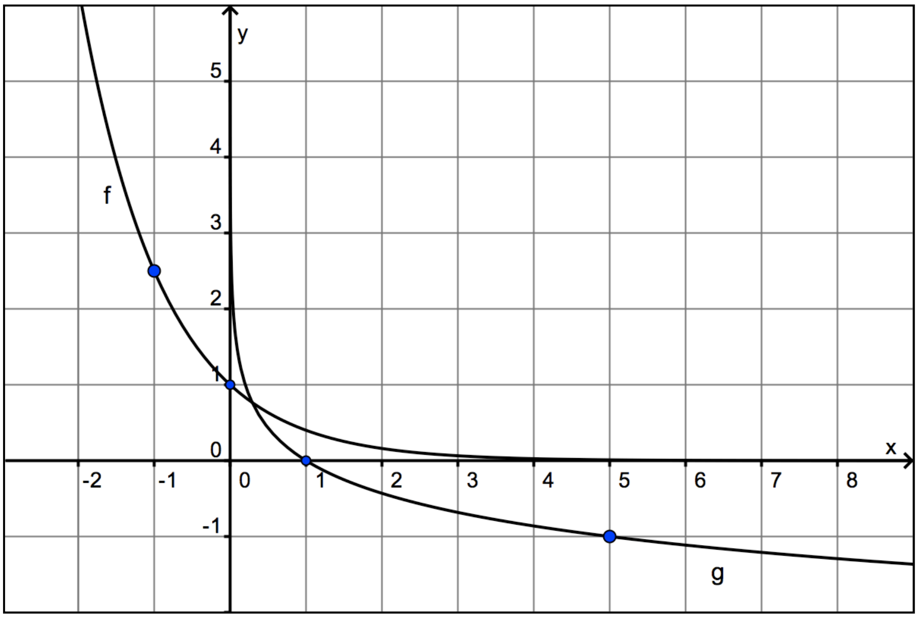


Notons encore que :

- si $f(x) = \log x$, alors $f^{-1}(x) = 10^x$
- si $f(x) = \ln x$, alors $f^{-1}(x) = e^x$

Exercices

1. Voici deux fonctions f et g. Laquelle est exponentielle et laquelle est logarithmique ? Déterminez l'expression analytique de chacune.



---

2. Le graphique d'une fonction logarithmique comprend le point $\left(\dfrac{25}{2}\ ,\ 2\right)$.

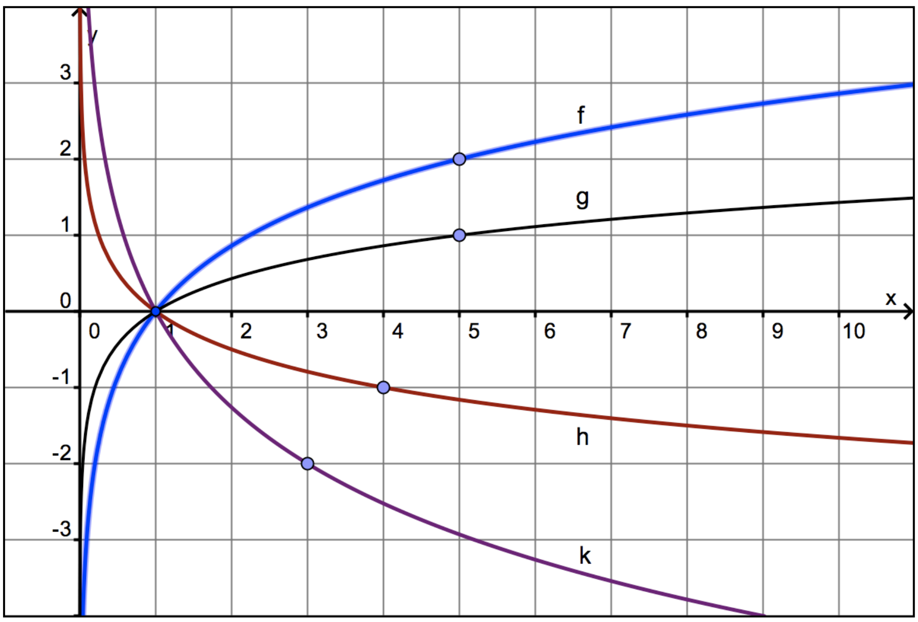
   Donnez une expression analytique de cette fonction.

---

3. Voici les fonctions logarithmiques

$$f(x) = \log_a x\ ,\quad g(x) = \log_b x\ ,\quad h(x) = \log_c x \ \text{ et }\ k(x) = \log_d x\ .$$

   Classez a, b, c, d et 1 dans un ordre croissant.



6. Équations exponentielles et logarithmiques

Les équations exponentielles, où l'inconnue intervient comme exposant, et les équations logarithmiques, où l'inconnue intervient dans l'expression d'un logarithme, apparaissent fréquemment dans les problèmes concernant les croissances exponentielles.

Voici quelques exemples.

Exemple 1 : résoudre l'équation $2000 = 500 \,.\, (1{,}05)^x$.

$$2000 = 500 \,.\, (1{,}05)^x \iff 4 = 1{,}05^x \iff x = \log_{1,05} 4 = \frac{\log 4}{\log 1{,}05} \approx 28{,}4134$$

Exemple 2 : résoudre l'équation $4 \,.\, 3^{4x} = 36$.

$$4 \,.\, 3^{4x} = 36 \iff 3^{4x} = 9 \iff 3^{4x} = 3^2 \iff 4x = 2 \iff x = 2$$

Exemple 3 : résoudre l'équation $3 \,.\, \log_4(2 - x) = 6$.

Avant de résoudre une équation logarithmique, il convient de poser des conditions d'existence.
Dans ce cas-ci : $2 - x > 0 \iff x < 2$.

$$3 \,.\, \log_4(2 - x) = 6 \iff \log_4(2 - x) = 2 \iff 2 - x = 4^2 \iff x = -14$$

La solution satisfait à la condition.

Exemple 4 : résoudre l'équation $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$.

Conditions d'existence : $(x > 0) \wedge (x - 2 > 0) \iff x > 2$.

$$\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3 \iff \log_2(x.(x - 2)) = 3 \iff x^2 - 2x = 2^3 \iff x^2 - 2x - 8 = 0$$

Cette équation du second degré admet les solutions $x = -2$ et $x = 4$, dont seule la seconde est acceptable. **S** = { 4 }

Exercices

1. Résolvez les équations suivantes sans utiliser la calculatrice.

a) $2^x = 64$

b) $3^x = \sqrt{3}$

c) $2^x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x = \dfrac{4}{3}$

e) $3^x = \sqrt[3]{9}$

f) $2^x = 2 \,.\, \sqrt[5]{16}$

g) $3^x = 9^{x+1}$

h) $4^x = \sqrt{32}$

i) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^x = \dfrac{16}{9}$

j) $27 \,.\, 2^x = 8 \,.\, 3^x$

---

2. Résolvez les équations suivantes en utilisant la calculatrice.

a) $10^x = 43{,}125$

b) $3^{-2x} = 5$

c) $145^x - 3451 = 0$

d) $0{,}421^x = 73{,}55$

---

3. Résolvez les équations suivantes. Si la solution n'est pas immédiate, donnez-la sous forme de logarithme népérien, et ensuite donnez-en une approximation au dix-millième près.

a) $e^x - 2 = 0$

b) $3 - 2 \,.\, e^x = 0$

c) $\left(e^x - 1\right) . \left(3e^x - 1\right) = 0$

d) $e^{2x} - e = 0$

e) $e^x + 3 = 0$

f) $x \,.\, e^{3x} - 2x = 0$

---

4. Résolvez les équations logarithmiques suivantes après avoir précisé les conditions d'existence.

a) $2 \,.\, \log_3 x = 18$

b) $\log_3(x - 5) - 2 = 0$

c) $3 \,.\, \log x = 6$

d) $\ln x - 4 = 0$

e) $2 \,.\, \ln x + 1 = 0$

f) $3 \,.\, \ln x = \ln 8$

g) $\log_x 9 = 2$

h) $4 \,.\, \log x - 2 = 0$

i) $x \,.\, \ln x - x = 0$

j) $\log_2(2x + 3) = 4$

5. Résolvez les équations logarithmiques suivantes après avoir précisé les conditions d'existence.

a) $\log x - \log 4 + \log 5 = \log 25$

b) $\log(x+7) + \log 3 = \log 6$

c) $2.\log_2(x-2) = \log_2(3x-8)$

d) $2.\log(x-5) = \log 5 + \log(5-x)$

e) $\log x + \log(11-x) = \log(2x^2)$

f) $\log_3 x + \log_3(3-x) = \log_3 7$

g) $\log_3(x+2) + 1 = \log_3(x^2+4x)$

h) $\log(x-5) + \log(x-2) = 1$

i) $3.\ln x - \ln 64 = 0$

j) $2.\ln x + \ln 2x = 1$

---

6. Résolvez les inéquations exponentielles et logarithmiques suivantes après avoir précisé les éventuelles conditions d'existence.
Aidez-vous d'un graphique : il est en effet important de savoir si l'on travaille avec une fonction croissante ou décroissante.

a) $2^x < 8$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 8$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4$

d) $3^x < \frac{1}{9}$

e) $e^x > 1$

f) $2^x > 10$

g) $(0{,}1)^x > 1000$

h) $\log_2 x > 3$

i) $\log x < 0$

j) $\log_{0,5} x < -1$

k) $\ln x > 2$

l) $\ln x < -2$

---

7. Une population de bactéries compte 2500 individus au début d'une observation.
Sachant que cette population croît de 4% par heure, dans combien d'heures y aura-t-il 4000 bactéries ?

---

8. Un sapin augmente sa taille de 10% chaque année.
Combien d'années lui faut-il pour doubler sa taille ? Et pour tripler sa taille ?

---

9. La population d'une ville varie de manière exponentielle. On sait qu'en 2004 elle était de 135 426 habitants et qu'en 2005 elle était de 137 229 habitants.
Si la croissance continue au même rythme, en quelle année cette population dépassera-t-elle 200 000 habitants ?

---

10. La pression atmosphérique, en hectopascals (hPa), à une altitude de h mètres au-dessus du niveau de la mer est approximativement donnée par la formule

$$P(h) = 1014 . e^{-0{,}000127 . h}.$$

a) Que vaut la pression atmosphérique au niveau de la mer ?

b) Que vaut la pression atmosphérique à 1000 (m) d'altitude ?

c) A quelle altitude la pression n'est-elle plus que de 692 (hPa) ?

11. En 1975, on dénombrait 800 millions d'habitants en Chine et 600 millions en Inde.
La population augmentait au rythme de 1,7% par année en Chine et de 2,2% par année en Inde. On prévoyait alors, si ces tendances se maintenaient, que les populations respectives des deux pays, t années après 1975, seraient données (en millions d'habitants) par les formules suivantes :

Chine : $C(t) = 800 \, . \, e^{0{,}017 \, . \, t}$ **Inde** : $I(t) = 600 \, . \, e^{0{,}022 \, . \, t}$

a) Quel aurait dû être l'écart entre les populations de ces deux pays en 2000 ?

b) Quel devrait être l'écart actuel entre ces deux populations ?
Comparez avec les données officielles (de l'ONU par exemple).

c) En quelle année y aurait-il autant d'Indiens que de Chinois ? Commentez.

d) Quelles formules auriez-vous utilisées pour décrire l'évolution des populations Indienne et Chinoise ? Sont-elles équivalentes à celles qui sont fournies ci-dessus ?

Dans l'exercice précédent, la croissance des populations est décrite au moyen d'exponentielles de base « e » . La base « e » est d'ailleurs de loin la plus utilisée en sciences pour une raison que nous allons bientôt découvrir.

La lettre « e » a été adoptée en l'honneur du mathématicien suisse Leonhard EULER (1707 - 1783). Il fut un des scientifiques les plus brillants du 18e siècle et fit la preuve de ses talents dans de nombreux domaines, contribuant notamment à l'essor de l'analyse et de la physique mathématiques.

Il introduisit bon nombre de notations encore utilisées actuellement, organisa l'analyse autour du concept fondamental de fonction et fut le premier à noter $f(x)$ l'image de x par f.

Vous connaissez sans doute la droite d'EULER dans un triangle, ou la relation d'EULER pour les polyèdres réguliers convexes, mais sans doute ne connaissez-vous pas encore la formule suivante, connue sous le nom d'identité d'EULER :

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \, .$$

Cette relation fut qualifiée de « formule la plus remarquable des mathématiques » par le physicien Richard FEYNMAN (1918-1988) . À votre avis, pourquoi ?

7. Dérivées des fonctions exponentielles et logarithmiques

7.1. Dérivée d'une fonction du type $f(x) = a^x$

Dans le cours de 5^e , nous avons vu que $f'(u)$, le nombre dérivé d'une fonction f en un réel u , est défini par

$$f'(u) = \lim_{x \to u} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} .$$

Il est utile de se rappeler que ce nombre correspond à la pente de la tangente au graphique de f en son point de coordonnées $\left(u, f(u)\right)$.

Calculons maintenant le nombre dérivé en u de la fonction $f(x) = a^x$.

$$\begin{aligned} f'(u) &= \lim_{x \to u} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \\ &= \lim_{x \to u} \frac{a^x - a^u}{x - u} \\ &= \lim_{x \to u} \frac{a^u . \left(a^{x-u} - 1\right)}{x - u} && \text{(mise en évidence de } a^u \text{)} \\ &= a^u . \lim_{x \to u} \frac{a^{x-u} - 1}{x - u} && \text{(car } a^u \text{ est une constante)} \end{aligned}$$

Afin d'alléger l'écriture, posons $x - u = t$; lorsque x tend vers u , la différence $x - u$ tend vers 0 et donc t tend vers 0 . De plus, comme a^u n'est autre que $f(u)$, nous pouvons enfin écrire :

$$f'(u) = f(u) . \lim_{t \to 0} \frac{a^t - 1}{t}$$

Nous admettrons que la limite existe. Sa valeur ne dépend que de a , base de l'exponentielle.

Déterminons cette limite dans un cas particulier, par exemple pour $f(x) = 2^x$.
Le résultat obtenu ci-dessus s'écrit :

$$f'(u) = 2^u . \lim_{t \to 0} \frac{2^t - 1}{t}$$

Incapables de déterminer cette limite dans l'état actuel de nos connaissances mathématiques, nous sommes obligés de recourir à la calculatrice :

t	$\lim_{t \to 0} \frac{2^t - 1}{t}$
0,1	0,71773
0,01	0,69556
0,001	0,69339
0,0001	0,69317
0,00001	0,69315

Ce processus peut bien sûr être poursuivi aussi loin que l'on veut. À ce stade, nous pouvons écrire :

$$f'(u) \approx 0{,}69315 \; . \; f(u) \; .$$

Ce résultat étant valable en tout réel u où la fonction f est dérivable, nous pouvons en déduire une expression de la fonction dérivée de $f(x) = 2^x$: $f'(x) \approx 0{,}69315 \; . \; f(x)$.

Ce qui peut aussi s'écrire

$$\boxed{\left(2^x\right)' \approx 0{,}69315 \; . \; 2^x}$$

Nous sommes donc en présence d'une situation nouvelle : la fonction dérivée est « simplement » une fonction *multiple* de la fonction de départ.
C'est d'ailleurs le cas pour toute fonction exponentielle $f(x) = a^x$!

Exercice

En partant de $f'(u) \; = \; f(u) \; . \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{a^t - 1}{t}$ et en évaluant la limite à l'aide de la calculatrice,

déterminez la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3^x$

b) $f(x) = 10^x$

c) $f(x) = \left(1{,}5\right)^x$

d) $f(x) = \left(0{,}5\right)^x$

7.2. Une fonction exponentielle particulière

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que certaines fonctions exponentielles prennent, en tout réel, des valeurs *supérieures* à leur fonction dérivée.
C'est le cas de $f(x) = \left(1{,}5\right)^x$ et de $f(x) = 2^x$.

D'autres prennent des valeurs *inférieures* à leur fonction dérivée.
C'est le cas de $f(x) = 3^x$ et de $f(x) = 10^x$.

Une question vient naturellement à l'esprit : existe-t-il une fonction exponentielle qui soit *égale* à sa fonction dérivée ?

Si tel est le cas, il faut que dans l'égalité $f'(u) \; = \; f(u) \; . \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{a^t - 1}{t}$ la limite soit égale à 1 !

Partons maintenant à la recherche d'une base a telle que $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{a^t - 1}{t} = 1$.

Nous savons que si $a = 2$, cette limite est *inférieure* à 1 et vaut environ 0,69315 .
Par contre, si $a = 3$, elle vaut est *supérieure* à 1 et vaut environ 1,09861 .

Il est donc logique de prendre une base comprise entre 2 et 3 .

1° Essayons $a = 2{,}5$

Évaluant $\lim\limits_{t \to 0} \frac{(2{,}5)^t - 1}{t}$ à l'aide de la calculatrice, nous trouvons environ 0,91629 .

Comme ce résultat est inférieur à 1 , prenons une base entre 2,5 et 3 .

2° Essayons $a = 2{,}75$

…

Exercice

Poursuivez le processus entamé ci-dessus afin de cerner de plus en plus précisément la base de la fonction exponentielle qui est égale à sa dérivée.

Une autre approche (raisonnement « non standard »)

Nous cherchons une base a telle que $\lim\limits_{t \to 0} \frac{a^t - 1}{t} = 1$.

C'est-à-dire une base a telle que, si t ≈ 0 :

$$\frac{a^t - 1}{t} \approx 1$$

$$a^t - 1 \approx t$$

$$a^t \approx 1 + t$$

$$a \approx (1 + t)^{\frac{1}{t}} \qquad (*)$$

La base cherchée est ainsi donnée par $\lim\limits_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}}$. Avec $t = 0{,}0001$ nous trouvons 2,7181459 …

Et oui, nous retrouvons le nombre « e » !

$$\boxed{e = \lim_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}}}$$

Afin d'obtenir une variante de la définition du nombre « e » , posons $\frac{1}{t} = n$.

L'égalité (*) s'écrit alors : $a \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Si $t \approx 0$ et positif, alors n sera très grand. Nous retrouvons la définition vue à la page 12.

$$\boxed{e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

7.3. Dérivées des fonctions exponentielles

Le paragraphe précédent nous fournit la première formule.

$$\boxed{\left(e^x\right)' = e^x \qquad (1)}$$

En vertu de la règle de dérivation des fonctions composées, nous obtenons ensuite

$$\boxed{\left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)}.u'(x) \qquad (2)}$$

Par exemple, si $f(x) = e^{3x^2-1}$, alors : $f'(x) = e^{3x^2-1}.\left(3x^2-1\right)' = 6x.e^{3x^2-1}$.

Voyons maintenant la dérivée de $f(x) = a^x$.

$$\boxed{\left(a^x\right)' = a^x.\ln a \qquad (3)}$$

Preuve

Voici d'abord une formule utile, parfois appelée « changement de base d'exponentielle » :

$$\boxed{a^x = e^{x.\ln a}}$$

Elle se vérifie aisément : $e^{x.\ln a} = \left(e^{\ln a}\right)^x = \left(e^{\log_e a}\right)^x = a^x$.

Cette relation va nous permettre de dériver a^x en utilisant la formule (2) .

Nous avons successivement : $a^x = e^{x.\ln a}$

$$\left(a^x\right)' = \left(e^{x.\ln a}\right)'$$

$$\left(a^x\right)' = e^{x.\ln a}.\left(x.\ln a\right)'$$

$$\left(a^x\right)' = e^{x.\ln a}.\ln a$$

$$\left(a^x\right)' = a^x.\ln a$$

Enfin, la règle de dérivation des fonctions composées, nous donne

$$\boxed{\left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)}.u'(x).\ln a \qquad (4)}$$

Par exemple, si $f(x) = 2^{5x^3+x}$, alors : $f'(x) = 2^{5x^3+x}.\left(5x^3+x\right)' = \left(15x^2+1\right).\ 2^{5x^3+x}$.

7.4. Dérivées des fonctions logarithmiques

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (5)$$

Preuve

Les fonctions e^x et $\ln x$ étant réciproques l'une de l'autre (voir page 18), nous avons : $e^{\ln x} = x$.

Dérivons cette égalité membre à membre, en utilisant la formule (2) pour le membre de gauche :

$$\left(e^{\ln x}\right)' = (x)' \;\Leftrightarrow\; e^{\ln x}.(\ln x)' = 1 \;\Leftrightarrow\; x.(\ln x)' = 1 \;\Leftrightarrow\; (\ln x)' = \frac{1}{x} .$$

La règle de dérivation des fonctions composées permet d'obtenir :

$$(\ln u(x))' = \frac{1}{u(x)}.u'(x) \qquad (6)$$

Par exemple, si $f(x) = \ln(3x-2)$, alors $f'(x) = \dfrac{1}{3x-2}.(3x-2)' = \dfrac{3}{3x-2}$.

Voyons le cas d'une fonction logarithme de base quelconque.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x.\ln a} \qquad (7)$$

Preuve

La formule de changement de base de logarithme permet d'écrire : $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

La dérivée s'obtient facilement en tenant compte du fait que $\ln a$ est une constante :

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}.(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}.\frac{1}{x} = \frac{1}{x.\ln a}$$

Et enfin

$$(\log_a u(x))' = \frac{1}{u(x).\ln a}.u'(x) \qquad (8)$$

Par exemple : $\left(\log_2 \sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x}.\ln 2}.\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x}.\ln 2}.\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x.\ln 2}$.

Exercices

1. Déterminez la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = e^{-3x}$

b) $f(x) = e^{x} . x$

c) $f(x) = \dfrac{e^{x}}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

e) $f(x) = \ln(1-4x)$

f) $f(x) = \ln(\ln x)$

g) $f(x) = \dfrac{x^{3}}{\ln x}$

h) $f(x) = x^{2} . e^{-x}$

i) $f(x) = \dfrac{1}{1-\ln x}$

j) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

---

2. Soit la fonction $f(x) = 1 + 2e^{x} - 3x$.

a) Sur quel intervalle f est-elle strictement croissante ?

b) En quel point de G_f la tangente est-elle parallèle à la droite $d \equiv 3x - y - 5 = 0$?

---

3. Calculez $f'(0)$ sachant que $f(x) = e^{x} . g(x)$, $g(0) = 2$ et $g'(0) = 5$.

---

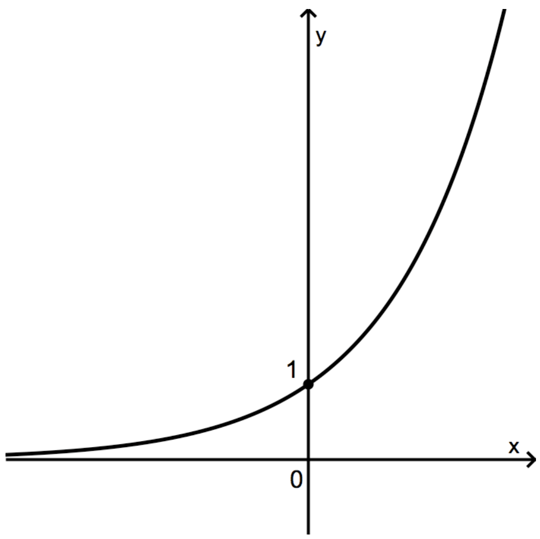
4. En quel point le graphique de la fonction $f(x) = \left[\ln(x+4)\right]^{2}$ admet-il une tangente horizontale ?

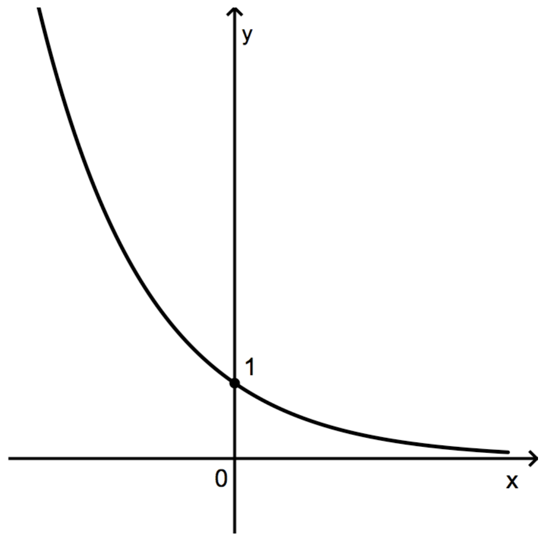
---

8. Limites des fonctions exponentielles et logarithmiques

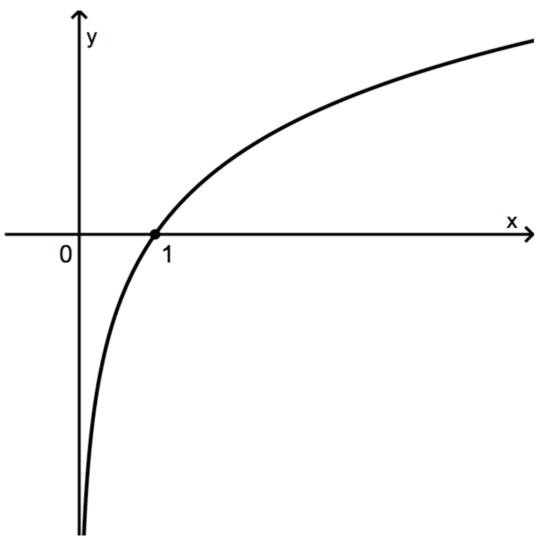
8.1. Limites de fonctions de référence

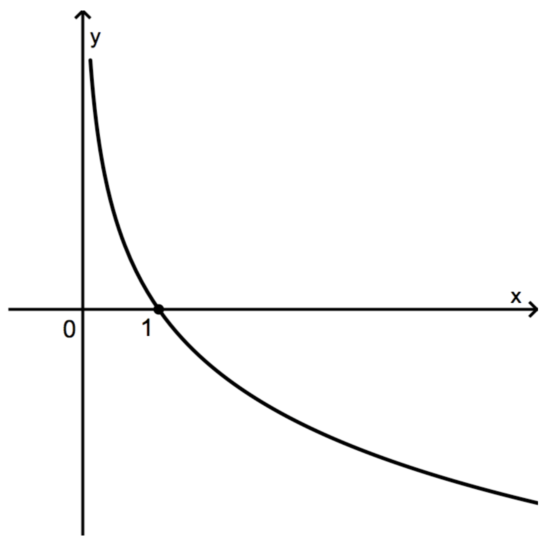
En observant les graphiques des fonctions exponentielles et des fonctions logarithmes, nous avions déjà déterminé certaines limites. Elles nous servirons de base pour la suite.

<table>
<tr><th colspan="2">Fonctions exponentielles</th></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a <1$</td></tr>
<tr><td>


$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
</td><td>


$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Fonctions logarithmiques</th></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>


$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$
</td><td>


$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$
</td></tr>
</table>

Exercices

1. Déterminez rapidement les limites suivantes à l'aide des limites de référence (voir page 30).

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3^x$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_{0,5} x$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0,2)^x$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_{0,9} x$

---

2. Déterminez les limites suivantes. Détaillez votre raisonnement.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x . e^x\right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{\ln x}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 - x)$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x^2}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln \dfrac{1}{x^2}$

Certaines limites présentent des cas d'indétermination qui résistent aux techniques vues en cinquième. La règle dite de L'HOSPITAL peut alors être utile (page suivante).

8.2. La règle de L'HOSPITAL-BERNOULLI

Si f et g sont deux fonctions telles que

- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ présente un cas d'indétermination du type $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$;
- il existe un intervalle ouvert comprenant a sur lequel

  1° f et g sont dérivables ;

  2° f' et g' ne sont ni simultanément nulles, ni simultanément infinies, sauf éventuellement en a ;

  3° $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (elle est réelle ou infinie)

alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exemple 1 : calculez $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$.

Nous sommes en présence d'un cas d'indétermination « 0 / 0 » et nous pouvons donc appliquer la règle de L'HOSPITAL-BERNOULLI :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9} \overset{RHB}{=} \lim_{x \to 3} \frac{\left(x^2 - 4x + 3\right)'}{\left(x^2 - 9\right)'} = \lim_{x \to 3} \frac{2x - 4}{2x} = \frac{1}{3}$$

Ce n'est pas tant pour ce genre de limite que nous avons besoin de la règle de L'HOSPITAL-BERNOULLI (car nous savions déjà comment nous y prendre en 5^e : en factorisant numérateur et dénominateur), mais bien pour des limites de fonctions exponentielles, logarithmiques ou trigonométriques.

Exemple 2 : calculez $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\ln x}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{RHB}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty$$

Exemple 3 : calculez $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{0}{0} \overset{RHB}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1} = \sin 0 = 0$$

Exercice

Calculez les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$

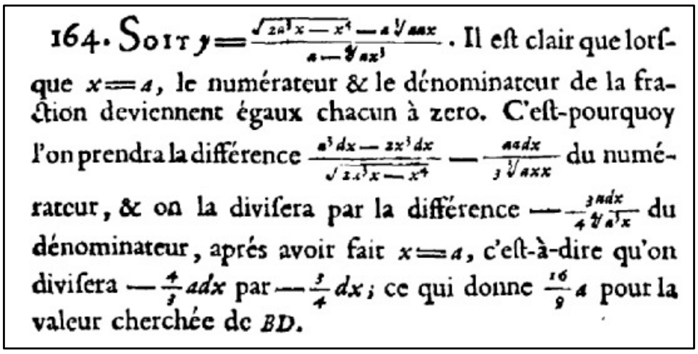
f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x . e^{-x}\right)$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \left(x . \ln x\right)$

C'est en 1696 que le marquis Guillaume de L'HOSPITAL publia « Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes », le premier traité de calcul différentiel en français.

Il y présente l'exemple suivant pour illustrer la règle qui porte son nom :



164. SOIT $y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$. Il eſt clair que lorſque $x = a$, le numérateur & le dénominateur de la fraction deviennent égaux chacun à zero. C'eſt-pourquoy l'on prendra la différence $\frac{a^3dx - 2x^3dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{aadx}{3\sqrt[3]{axx}}$ du numérateur, & on la diviſera par la différence $-\frac{3adx}{4\sqrt[4]{a^3x}}$ du dénominateur, aprés avoir fait $x = a$, c'eſt-à-dire qu'on diviſera $-\frac{4}{3}adx$ par $-\frac{3}{4}dx$; ce qui donne $\frac{16}{9}a$ pour la valeur cherchée de BD.

Source : gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France.

En clair, il s'agit de calculer $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$ *(avec $a > 0$). Essayez !*

Il est probable que le véritable auteur de la règle soit le mathématicien suisse Jean BERNOULLI, mais un accord entre les deux hommes autorisait le marquis à utiliser les résultats de son confrère.

Guillaume de L'HOSPITAL
(1661-1704)

Jean BERNOULLI
(1667-1748)

9. Études de fonctions exponentielles et logarithmiques

1. Etudiez complètement les fonctions suivantes : domaine de définition, asymptotes, variations et concavité. Ensuite, réalisez leur représentation graphique.

   a) $f(x) = e^{-x^2}$

   b) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

   c) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

   d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

   e) $f(x) = x \, . \ln x$

   f) $f(x) = x \, . \, e^x$

   g) $f(x) = \dfrac{\ln\left(1 + x^2\right)}{x}$

   h) $f(x) = x^2 \, . \, e^x$

---

2. Déterminez toutes les asymptotes au graphique de la fonction $f(x) = e^{\frac{2x-3}{x+2}}$.

---

3. Déterminez toutes les asymptotes au graphique de la fonction $f(x) = x + e^x$.

---

4. La fonction suivante, appelée *fonction logistique*, décrit l'évolution d'une colonie de protozoaires du type *Paramecium caudata*. La variable t représente le nombre de jours tandis que $P(t)$ représente le nombre d'individus de la population.

$$P(t) = \frac{105}{1 + 34 \, . \, e^{-1{,}1244 \, . \, t}}$$

   a) Quel est le nombre de microbes au début de l'observation ?

   b) Quel est le nombre de microbes après dix jours ? Après cent jours ?

   c) Montrez que cette population va croître au cours du temps.

   d) Cette population ne dépassera pas un certain « plafond ». Pourquoi ?

   e) Déterminez après combien de jours le taux d'accroissement de la population sera maximal.

---

5. Voici une autre fonction logistique, décrivant cette fois la hauteur atteinte par un arbre en fonction du temps (exprimé en années) :

$$P(t) = \frac{120}{1 + 200 \, . \, e^{-0{,}2 \, . \, t}}$$

   a) Quelle était la hauteur initiale de l'arbre ?

   b) Quelle sera la hauteur de l'arbre dans dix ans ? Dans vingt ans ?

   c) Quelle hauteur l'arbre ne pourra-t-il dépasser ?

6. Lorsqu'un corps de masse m est lâché avec une vitesse initiale nulle dans l'air, il est soumis à la force de pesanteur, à des forces de frottement et à la poussée d'ARCHIMÈDE. Si on néglige cette dernière en raison de sa faible influence, on peut montrer que la vitesse du corps en fonction du temps est donnée par la relation suivante :

$$v(t) = \frac{mg}{k} \cdot \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

a) Calculez l'accélération du corps en fonction du temps. Pour rappel, dans cette situation de chute verticale, nous avons $a(t) = v'(t)$. Interprétez le résultat.

b) Montrez que la vitesse du corps tend vers une vitesse limite.

c) Déterminez l'équation de la tangente à l'origine au graphique de $v(t)$.

d) En vous aidant de la tangente trouvée en (c) , tracez l'allure générale du graphique de la vitesse en fonction du temps.

e) On observe la chute d'une balle de ping-pong de masse $2{,}7$ (g) , avec un coefficient de frottement $k = 5{,}4 \,.\, 10^{-3}$ (kg / s) .

En prenant $g \approx 9{,}81\ (m / s^2)$, calculez :

1° la vitesse limite de la balle ;

2° le temps nécessaire pour que la vitesse de la balle se situe à moins de 10^{-3} de sa vitesse limite.

f) Un parachutiste et son équipement totalisent une masse de 100 (kg) . Si, bras et jambes étendus, le coefficient de frottement est $k = 17{,}5$ (kg / s) , calculez :

1° la vitesse limite atteinte en chute libre par ce parachutiste ;

2° après combien de temps il atteindre $99\ \%$ de la vitesse limite.

Source : Paul MILAN, cours de Terminale S, www.lyceedadultes.fr