Analyse combinatoire

Exercice n°7 page 7

a) S'il faut au moins 2 hommes et 2 femmes, le comité de 5 personnes peut compter 3 hommes et 2 femmes **ou** 2 hommes et 3 femmes.

Première possibilité : le comité compte 3 hommes et 2 femmes.

Il peut être formé de $\dfrac{12\times11\times10}{3\,!}\times\dfrac{8\times7}{2\,!}=220\times28=6160$ (ou encore $C_{12}^{3}\times C_{8}^{2}$) .

Seconde possibilité : le comité compte 2 hommes et 3 femmes.

Il peut être formé de $\dfrac{12\times11}{2\,!}\times\dfrac{8\times7\times6}{3\,!}=66\times56=3696$ (ou encore $C_{12}^{2}\times C_{8}^{3}$) .

Il y a donc $6160+3696=9856$ façons de composer ce comité.

b) Solution analogue à celle de (a) , mais il n'y a plus que 10 hommes candidats au lieu de 12.

Il y a $\left(C_{10}^{3}\times C_{8}^{2}\right)+\left(C_{10}^{2}\times C_{8}^{3}\right)=\left(120\times28\right)+\left(45\times56\right)=5880$ façons de constituer le comité.

c) Supposons que Monsieur X fasse partie du comité.
Dans ce cas, il reste 2 hommes à choisir parmi 11 et 2 femmes parmi 7 (puisque Madame Y est partie furieuse) **ou** 1 seul homme parmi 11 et 3 femmes parmi 7 (toujours parce que le comité comprend 3 hommes et 2 femmes **ou** 2 hommes et 3 femmes)

$$\left(C_{11}^{2}\times C_{7}^{2}\right)+\left(C_{11}^{1}\times C_{7}^{3}\right)=\left(55\times21\right)+\left(11\times35\right)=1540 \text{ comités possibles.}$$

Supposons maintenant que Madame Y fasse partie du comité.
Dans ce cas, il y a 3 hommes à choisir parmi 11 (puisque Monsieur X est parti dégoûté) et il reste 1 femme à choisir parmi 7 **ou** 2 hommes parmi 11 et 2 femmes parmi 7 :

$$\left(C_{11}^{3}\times C_{7}^{1}\right)+\left(C_{11}^{2}\times C_{7}^{2}\right)=\left(165\times7\right)+\left(55\times21\right)=2310 \text{ comités possibles.}$$

Nous devons aussi tenir compte des comités ou ni Monsieur X ni Madame Y ne sont présents :

$$\left(C_{11}^{3}\times C_{7}^{2}\right)+\left(C_{11}^{2}\times C_{7}^{3}\right)=\left(165\times21\right)+\left(55\times35\right)=5390 \text{ comités possibles.}$$

Finalement, il y a $1540+2310+5390=9240$ comités possibles si l'on tient compte de l'incompatibilité entre Monsieur X et Madame Y .

Cette solution complètement baroque permet de bien mettre en évidence l'intérêt de la suivante et du passage au complémentaire.
En effet, si nous comptons tous les comités où Monsieur X et Madame Y siègent ensemble, nous arrivons à

$$\left(C_{11}^{2}\times C_{7}^{1}\right)+\left(C_{11}^{1}\times C_{7}^{2}\right)=\left(55\times7\right)+\left(11\times21\right)=616\ .$$

Il y a donc 616 comités « interdits » . Il suffit de les soustraire de la réponse obtenue en (a) :

il y a $9856-616=9240$ comités « autorisés ».

Exercice n°12 page 7

a) J'aurais dû préciser l'énoncé en écrivant que l'étudiant doit répondre à *exactement* 8 questions sur 10, peu importe l'ordre dans lequel il le fait :

$$\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3}{8\,!} = 45 \text{ choix possibles } (\; C_{10}^{8} \;) .$$

Plus simplement, cette réponse correspond aux nombres de façons de choisir les deux questions auxquelles il ne répondra pas : $\frac{10\times 9}{2\,!} = 45 \;\; (\; C_{10}^{2} \;)$.

Si vous avez interprété l'énoncé dans le sens où l'étudiant doit répondre à au moins 8 questions sur 10 , la réponse est : $C_{10}^{8} + C_{10}^{9} + C_{10}^{10} = 45 + 10 + 1 = 56$.

Pour la suite, revenons à *exactement* 8 questions.

b) S'il doit répondre aux 3 premières questions, il lui reste à répondre à exactement 5 questions sur les 7 restantes :

$$\frac{7\times 6\times 5\times 4\times 3}{5\,!} = 21 \text{ choix possibles } (\; C_{7}^{5} \;) .$$

c) Première possibilité : il répond à exactement 4 des 5 premières questions.
Il peut le faire de $C_5^4 = C_5^1 = 5$ façons.

Il lui reste ensuite à répondre à exactement 4 questions sur les 5 dernières : il peut de nouveau le faire de 5 façons.
Il y a ainsi 5 x 5 = 25 choix possibles.

Seconde possibilité : il répond aux 5 premières questions.
Il ne peut évidemment le faire que de $C_5^5 = 1$ façon.

Il lui reste ensuite à répondre à exactement 3 questions sur les 5 restantes.

Il peut le faire de $C_5^3 = \frac{5\times 4\times 3}{3\,!} = 10$ façons.

Il y a ainsi 1 x 10 = 10 choix possibles.

Finalement, il a 25 + 10 = 35 façons de choisir s'il doit répondre à au moins 4 des 5 premières questions.