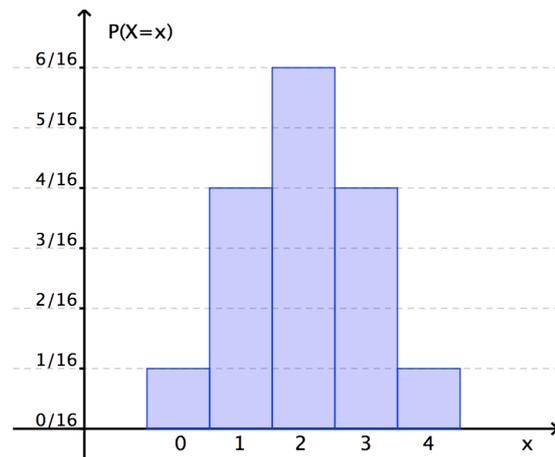


Page 3

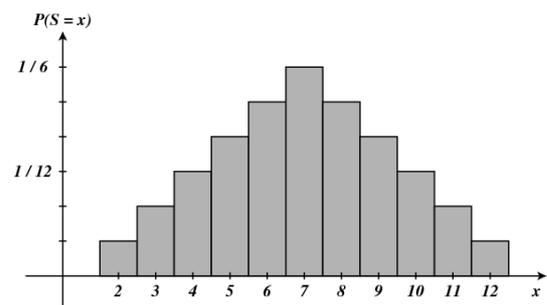
Une pièce de monnaie est lancée quatre fois de suite. Le nombre de fois que « face » apparaît au cours de cette expérience est une variable aléatoire X .
Déterminez la loi de probabilité de X et représentez-la graphiquement.

x	$P(X = x)$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
1	$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$
2	$6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$
3	$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$
4	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$



Page 4

Une expérience aléatoire consiste à jeter deux dés et à observer la somme des résultats obtenus (variable aléatoire S).
Le graphique est celui de la loi de probabilité de S .



Déterminer :

a) $P(S = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

b) $P(S \geq 8) = \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

$$P(S < 8) = 1 - P(S \geq 8) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

c) $P(S \geq 4) = 1 - P(S < 4) = 1 - P(S \leq 3) = 1 - \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36}\right) = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$

d) C'est $k = 3$ car $P(S \leq 3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{12} < 0,1$ alors que $P(S \leq 4) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{1}{6} > 0,1$.

L'organisateur d'une loterie propose un gros lot d'une valeur de 800 euros, un second lot d'une valeur de 300 euros et des lots de consolation d'une valeur de 20 euros chacun. La probabilité de gagner le gros lot vaut 0,001 ; celle de gagner le second lot vaut 0,005 et celle d'avoir un lot de consolation vaut 0,01 .

- a) La somme que débourse l'organisateur est une variable aléatoire X . Quelles sont toutes les valeurs possibles de X ? Calculer l'espérance mathématique de X .
- b) Quel doit être le prix minimal d'un billet de tombola pour que l'organisateur ne soit pas perdant ?

a) $X = 0, 20, 300, 800$.

$$E(X) = P(X = 0) \cdot 0 + P(X = 20) \cdot 20 + P(X = 300) \cdot 300 + P(X = 800) \cdot 800$$

$$= 0,984 \cdot 0 + 0,01 \cdot 20 + 0,005 \cdot 300 + 0,001 \cdot 800 = 2,5$$

- b) Le prix minimal d'un billet doit donc être de 2,50 € .

Dans un jeu de « pile » ou « face », on gagne 1 euro si l'on obtient « pile » et on perd 2 euros si l'on obtient « face ». Soit X la variable aléatoire « gain réalisé lors d'une partie ». Déterminer sa loi de probabilité ainsi que son espérance mathématique.

Les valeurs possibles de X sont 1 et -2 . On a $P(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(X = -2) = \frac{1}{2}$.

Donc : $E(X) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-2) = -\frac{1}{2}$.

Le jeu est défavorable au joueur avec une perte moyenne de 0,50 € par partie.

- a) On lance un dé. Soit X la variable aléatoire « nombre de points sur la face supérieure du dé ». Calculer $E(X)$: $E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$.

- b) On lance deux dés. Soit S la variable aléatoire « somme des points sur les faces supérieures des dés ». Calculer $E(S)$. Revoyez le problème du lancer de deux dés pour trouver la probabilité pour chacune des sommes (visibles également sur le graphique de la page 1).

$$E(S) = \frac{1}{36} \cdot 2 + \frac{2}{36} \cdot 3 + \frac{3}{36} \cdot 4 + \frac{4}{36} \cdot 5 + \frac{5}{36} \cdot 6 + \frac{6}{36} \cdot 7 + \frac{5}{36} \cdot 8 + \frac{4}{36} \cdot 9 + \frac{3}{36} \cdot 10 + \frac{2}{36} \cdot 11 + \frac{1}{36} \cdot 12 = \frac{252}{36} = 7$$

- c) Ce résultat est-il visible sur le diagramme représentant la loi de probabilité de S ? (voir page 1)
- Oui, car le graphique est parfaitement symétrique autour de $S = 7$, la moyenne arithmétique de 2 et 12 est 7, celle de 3 et 11 est 7, etc.
- d) Comparer les résultats (a) et (b). Surprenant ? Quelle est l'espérance mathématique de la somme des points si l'on lance trois dés ?

Ce n'est pas surprenant car les dés sont indépendants l'un de l'autre. L'un donne en moyenne $\frac{7}{2}$ et l'autre aussi. La somme des deux résultats vaut donc 7 en moyenne. Avec trois dés, l'espérance mathématique de la somme des points est de $21/2 = 10,5$.

La probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon vaut environ 0,515 ; la probabilité que le bébé soit une fille vaut donc environ 0,485 .

- a) Soit X la variable aléatoire « nombre de filles dans une famille de 5 enfants ». Déterminer la distribution de probabilité de X .
- b) Un certain jour, quinze bébés naissent à La Louvière. Quelle est la probabilité qu'il y ait 10 filles parmi eux ?
- c) Quelle est la probabilité d'obtenir la composition de famille de la photo ?



a)

x	$P(X = x)$
0	$(0,515)^5 \approx 0,0362$
1	$C_5^1 \cdot 0,485 \cdot (0,515)^4 \approx 0,1706$
2	$C_5^2 \cdot (0,485)^2 \cdot (0,515)^3 \approx 0,3213$
3	$C_5^3 \cdot (0,485)^3 \cdot (0,515)^2 \approx 0,3026$
4	$C_5^4 \cdot (0,485)^4 \cdot 0,515 \approx 0,1425$
5	$(0,485)^5 \approx 0,0268$

b) $P(X = 10) = C_{15}^{10} \cdot (0,485)^{10} \cdot (0,515)^5 \approx 0,0783$.

c) Dans l'ordre de la photo : $(0,485)^5 \cdot (0,515)^6 \approx 0,0005$.

Pour avoir une fratrie composée de 5 filles et 6 garçons : $C_{11}^5 \cdot (0,485)^5 \cdot (0,515)^6 \approx 0,2313$.

Dans un jeu de 52 cartes, il y a quatre « couleurs » : cœur, carreau, trèfle et pique (♥, ♦, ♣ et ♠). Chaque couleur compte treize cartes. On extrait successivement 4 cartes du jeu (tirage avec remise). Soit X la variable aléatoire « nombre de coeurs obtenus ». Déterminer la distribution de probabilités de X .

x	$P(X = x)$
0	$(0,75)^4 \approx 0,3164$
1	$C_4^1 \cdot 0,25 \cdot (0,75)^3 \approx 0,4219$
2	$C_4^2 \cdot (0,25)^2 \cdot (0,75)^2 \approx 0,2109$
3	$C_4^3 \cdot (0,25)^3 \cdot 0,75 \approx 0,0469$
4	$(0,25)^4 \approx 0,0039$

Page 13 (suite)

Un test comporte six questions à choix multiples.
Il y a trois choix possibles pour chaque question avec une seule bonne réponse dans chaque cas.
Un étudiant décide de répondre au hasard à chaque question.

- a) Quelle est la probabilité qu'il obtienne exactement trois bonnes réponses ?
- b) Quelle est la probabilité qu'il n'obtienne aucune bonne réponse ?

Soit X la variable aléatoire « nombre de bonnes réponses obtenues ».

- a) $P(X = 3) = C_6^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 0,2195$
- b) $P(X = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 0,0878$

On lance un dé bien équilibré dix fois de suite.

- a) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois le « 6 » ?
- b) Quelle est la probabilité de n'obtenir aucun « 6 » ?

Soit X la variable aléatoire « nombre de 6 obtenus ».

- a) $P(X = 3) = C_{10}^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0,1550$
- b) $P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0,1615$

Page 16

On estime qu'un candidat sur six réussit l'examen pratique de conduite automobile au premier essai. Ce mercredi après-midi, 17 candidats se présentent pour la première fois.
Quelle est la probabilité pour que plus de trois d'entre eux réussissent ?

Soit X la variable aléatoire « nombre de candidats qui réussissent ».

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) \stackrel{\text{tables}}{=}_{n=17 \quad p=1/6} 1 - 0,6887 = 0,3113 .$$

En examinant un grand lot de blocs de fromage, l'inspection sanitaire conclut que 1% des blocs contiennent un taux trop élevé de dioxine. Un supermarché ayant acheté 100 blocs de ce fromage, quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas plus de 5 blocs contaminés ?

Soit X la variable aléatoire « nombre de blocs contaminés ».

$$P(X \leq 5) \stackrel{\text{tables}}{=}_{n=100 \quad p=0,01} 0,9995 .$$