Compléments sur les fonctions et fonctions trigonométriques

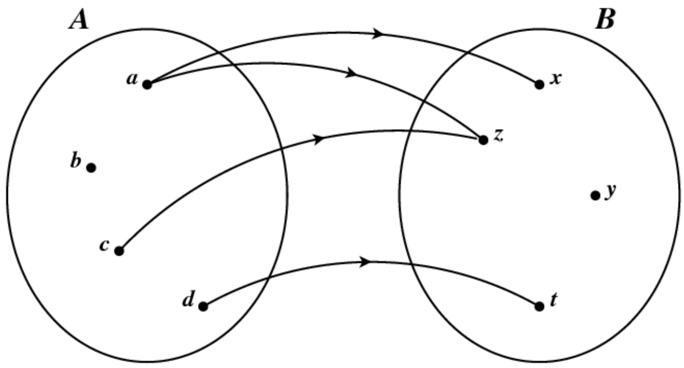
1. La notion de fonction

La consommation d'une voiture est fonction de la vitesse à laquelle on roule, la condition physique d'un athlète est fonction de son assiduité à l'entraînement, la température en montagne est fonction de l'altitude, l'aire d'un rectangle est fonction de sa longueur et de sa largeur, etc.
L'expression « être fonction de », couramment utilisée dans le langage quotidien, évoque l'idée de dépendance : la consommation est fonction de la vitesse signifie que la consommation dépend de la vitesse.
En mathématique, le mot « fonction » a bien sûr des rapports avec le sens commun mais il a une signification plus précise. Voyons cela de plus près.

1.1. Relations et fonctions en général

Soient deux ensembles A et B . Ces ensembles pourraient par exemple représenter respectivement un groupe d'élèves de 5ème A et un groupe d'élèves de 5ème B .

On peut souhaiter établir une correspondance entre ces deux ensembles : par exemple, si la personne a connaît la personne x , nous traçons une flèche sur le schéma déterminant ainsi le couple *(a,x)* .
On procède de la même façon chaque fois qu'une personne de A connaît une personne de B .



Une telle correspondance détermine une **relation** entre les deux ensembles.

Une **relation** d'un ensemble A vers un ensemble B est un ensemble de couples dont l'origine est un élément de A et l'extrémité un élément de B .

Dans le cas de l'exemple ci-dessus, la relation (notons-la « ***r*** ») compte quatre couples :

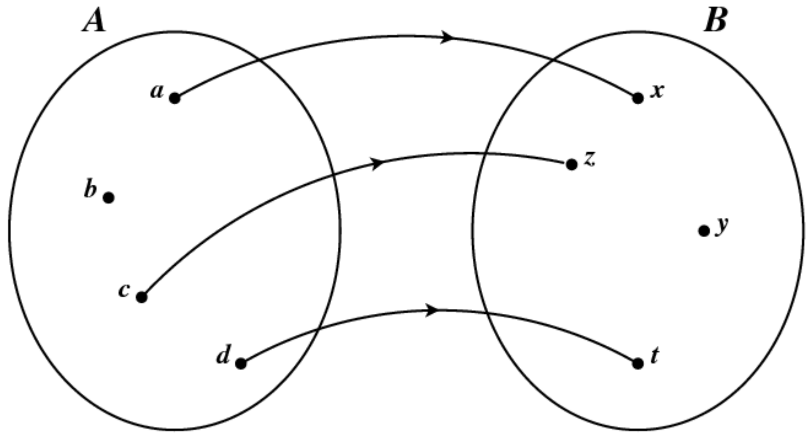
$$r = \{(a,x),(a,z),(c,z),(d,t)\}$$

Sa signification dans ce contexte est : a connaît x , a connaît z , b vient d'arriver et ne connaît encore personne, etc.

Dans ce cours, nous allons nous intéresser à des relations particulières : les **fonctions**.

Une **fonction** d'un ensemble A vers un ensemble B est une relation telle que tout élément de A est l'origine d'un couple au plus.

La relation r que nous venons de voir n'est pas une fonction car l'élément a est l'origine de deux couples (a connaît deux personnes). Par contre, si a ne connaissait pas z par exemple, alors la relation deviendrait une fonction.



Notons f cette fonction. Nous avons : $f = \{(a,x),(c,z),(d,t)\}$.

Une autre façon de noter que a est l'origine d'un couple et x l'extrémité de ce couple est

$$f(a) = x$$

On dit aussi que x est l'**image** de a par la fonction f. Dans le cas de l'exemple, nous avons aussi : $f(c) = z$, $f(d) = t$, $f(b)$ n'existe pas (autrement dit, b n'a pas d'image) et y n'est l'image d'aucun élément de A .

1.2. Fonctions réelles

Dans la suite du cours, nous étudierons les fonctions de **R** dans **R** , c'est-à-dire les fonctions réelles.

Une **fonction réelle** d'une variable réelle est une relation qui à un élément de **R** fait correspondre au plus un élément de **R** .

Par exemple, soit f la fonction qui à tout réel fait correspondre le triple de ce réel. On la note de la façon suivante :

$$f : R \to R : x \to f(x) = 3x$$

Plus brièvement, on note $f(x) = 3x$: c'est la **définition analytique** de la fonction.
Elle permet de déterminer l'image $f(x)$ d'un réel donné. Ainsi, $f(-1) = -3$, $f(2) = 6$, etc.

La « variable réelle » , généralement notée x , dont il est question dans la définition est aussi appelée **« variable indépendante »**.
L'image de x (notée $f(x)$ ou y) varie également mais doit subir la loi de x : c'est une **« variable dépendante de x »** ou **« fonction de x »**.

C'est ici que la notion mathématique de fonction rejoint le sens commun : la valeur de la variable $f(x)$ <u>dépend de</u> celle de x . Cette dépendance est facile à cerner : dans l'exemple précédent, elle est bien déterminée par la formule $f(x) = 3x$.

Dans la réalité, les choses ne sont pas si simples : la consommation d'un véhicule dépend de la vitesse à laquelle on roule mais aussi de la pente de la route, du vent, de la pression des pneus, etc.
La variable « consommation » dépend donc de toute une série d'autres variables et il faudrait une ou plusieurs formules beaucoup plus complexes pour rendre compte de cette réalité !

Dans ce cours nous nous bornerons à étudier des fonctions définies par des formules simples et ne dépendant que d'une seule variable. Dans les problèmes concrets aussi même si de cette façon, nous simplifierons la réalité.

Cette démarche de simplification est courante car l'univers dans lequel nous vivons est très complexe. La mathématique et son langage visent, entre autres, à idéaliser, à simplifier le concret, à dégager l'essentiel : c'est le processus d'**abstraction**.

Notons enfin que dans les problèmes, nous utiliserons souvent des lettres autres que x et $f(x)$ pour désigner les variables. Voici quelques exemples.

- L'aire A d'un carré est fonction de la longueur c du côté : $A(c) = c^2$

- La longueur L d'une barre rectiligne d'aluminium est fonction de la température T (phénomène de dilatation linéaire) :

  $L(T) = 0{,}000238 \,.\, T + 2$ où L est exprimé en mètres et T en degrés Celsius

  longueur de la barre à la température de 0 (°C) : L(0) = 2 (m)
  100 (°C) : L(100) = 2,0238 (m)

- L'aire A d'un triangle est fonction de sa longueur de sa base b et de sa hauteur h (il s'agit ici d'une fonction de deux variables) : $A(b,h) = \dfrac{b.h}{2}$.

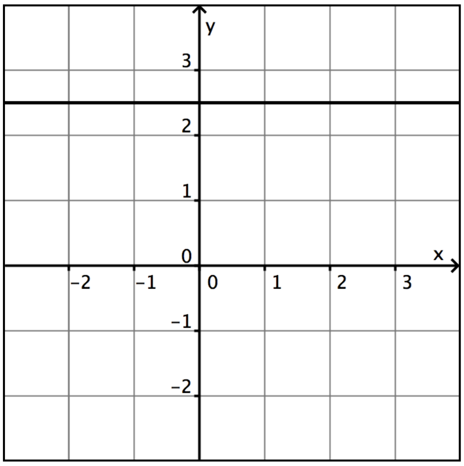
2. Fonctions de référence et définitions importantes

2.1. Fonctions de référence

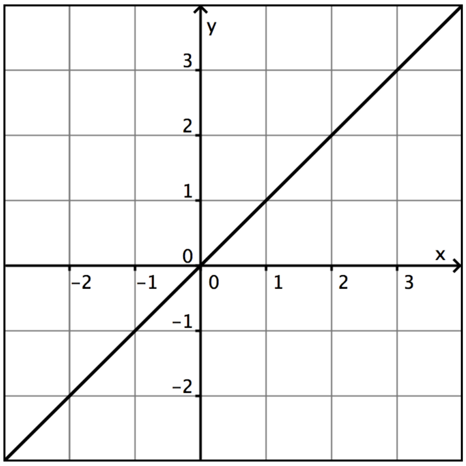
Voici quelques fonctions dites « de référence » qui ont été vues en quatrième (voir documents annexe pour leurs graphiques et propriétés de base).
Nous nous en servirons fréquemment pour illustrer définitions et autres propriétés importantes.

$f(x) = x^2$	$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$f(x) = \sin x$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f(x) = \lvert x \rvert$	$f(x) = \cos x$
$f(x) = x^3$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f(x) = \tan x$

Nous pouvons encore ajouter à cette liste les fonctions constantes $f(x) = k$ (k étant une contante réelle) et la fonction « identique » $f(x) = x$ ...

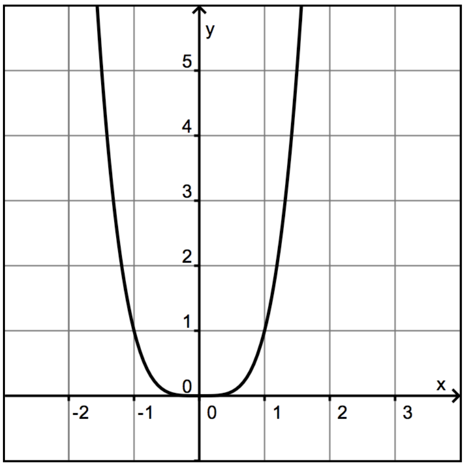


Fonction constante $f(x)= 5/2$

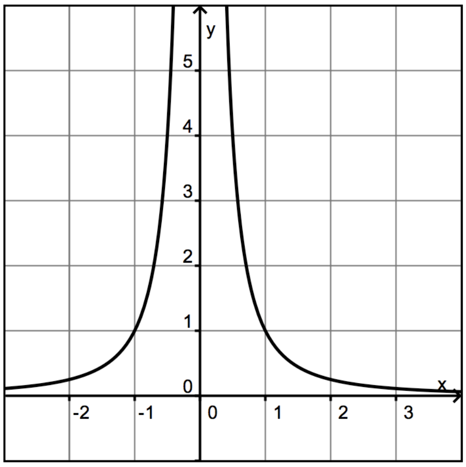


La fonction identique $f(x) = x$

… et encore les fonctions $f(x) = x^4$ et $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.



Fonction puissance $f(x)= x^4$



La fonction carré inverse $f(x) = 1 / x^2$

2.2. Définitions

2.2.1. Domaine de définition

Le **domaine de définition** d'une fonction réelle f est l'ensemble des réels qui possèdent une image par f.

Nous y reviendrons au paragraphe 2.3.

2.2.2. Graphique cartésien

Le **graphique cartésien** d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$.

Un point $P(x,y)$ appartient au graphique cartésien d'un fonction f ssi $y = f(x)$.

$$\boxed{P(x,y) \in G_f \Leftrightarrow y = f(x)}$$

Exemple : le point $(64,4)$ appartient au graphique de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ car $f(64) = \sqrt[3]{64} = 4$.

2.2.3. Racine (zéro) d'une fonction

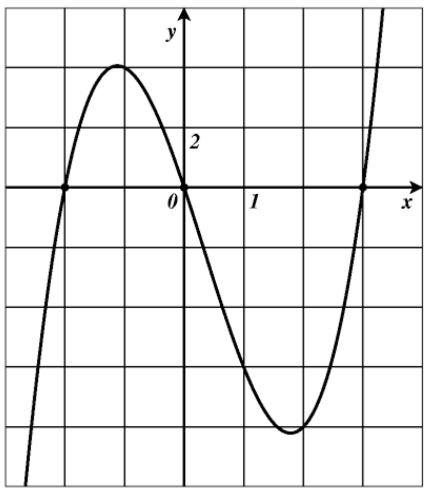
Une **racine** (ou **zéro**) d'une fonction réelle f est un réel dont l'image par f vaut 0 .

Pour déterminer les racines d'une fonction, il faut donc résoudre l'équation $f(x) = 0$.

D'un point de vue graphique, une racine de f est l'abscisse d'un point d'intersection du graphique de f avec l'axe des abscisses.

Exemple : la fonction $f(x) = x \cdot (x-3) \cdot (x+2)$ a comme racines $x = 0$, $x = 3$ et $x = -2$.

En effet : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-3) \cdot (x+2) = 0 \Leftrightarrow (x=0) \vee (x=3) \vee (x=-2)$.



Le graphique de f coupe donc l'axe des abscisses aux points $(0,0)$, $(3,0)$ et $(-2,0)$.

2.2.4. Ordonnée à l'origine

L'**ordonnée à l'origine** d'une fonction réelle f est le réel $f(0)$ (s'il existe).

D'un point de vue graphique, l'ordonnée à l'origine est l'ordonnée du point d'intersection du graphique de f avec l'axe des ordonnées.

2.2.5. Parité d'une fonction

Une fonction réelle f est **paire** si et seulement si un réel et son opposé ont la même image par f.

$$\boxed{f \text{ est paire } \Leftrightarrow \forall x \in \text{dom} f :\ f(-x) = f(x)}$$

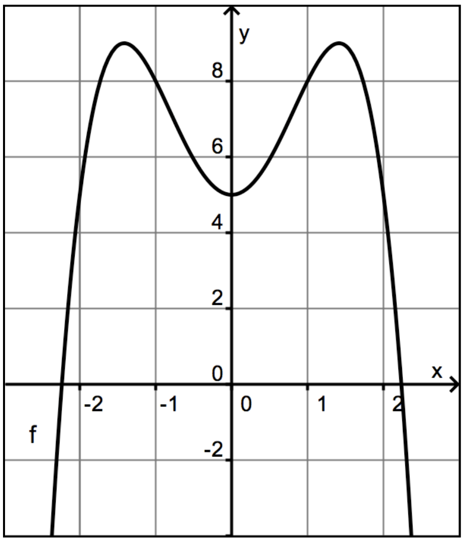
Conséquence graphique : dans un repère orthogonal, le graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Une fonction réelle f est **impaire** si et seulement si un réel et son opposé ont des images opposées par f.

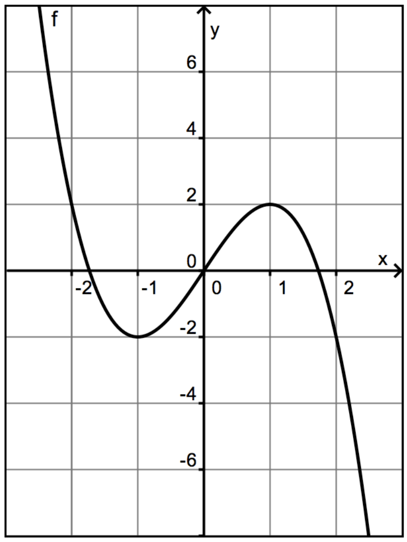
$$\boxed{f \text{ est impaire } \Leftrightarrow \forall x \in \text{dom} f :\ f(-x) = -f(x)}$$

Conséquence graphique : dans un repère orthogonal, le graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine des axes (le point (0,0)).

Exemples



La fonction $f(x) = -x^4 + 4x^2 + 5$ *est paire*



La fonction $f(x) = -x^3 + 3x$ *est impaire*

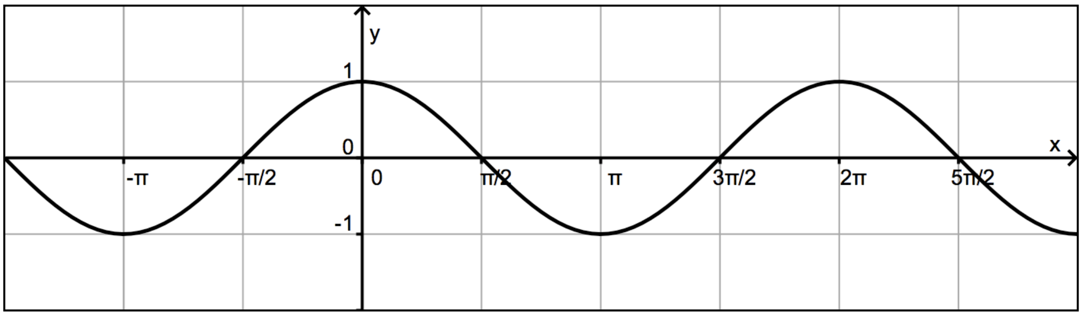
2.2.6. Périodicité d'une fonction

Une fonction f est **périodique** si on peut trouver un réel <u>positif</u> T tel que

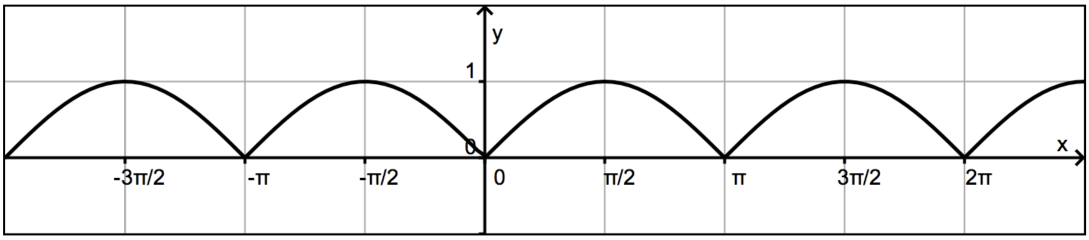
$$\forall\, x \in \operatorname{dom} f \;:\; f(x+T) = f(x)$$

Le plus petit nombre réel positif T, s'il existe, est la **période** de f.

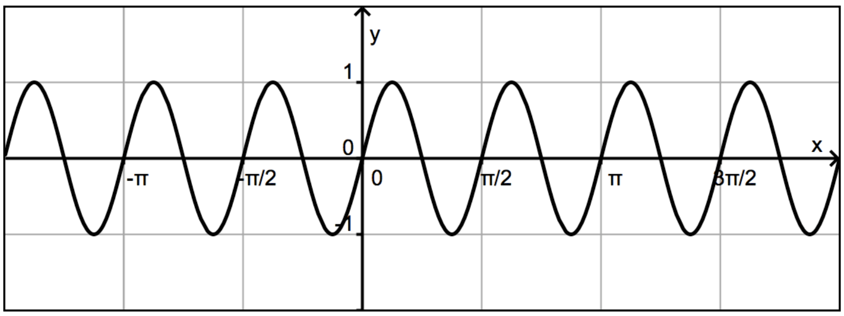
<u>Exemples</u>



$f(x) = \cos x$ est périodique de période 2π



$f(x) = |\sin x|$ est périodique de période π



$f(x) = \sin(4x)$ est périodique de période $\pi/4$

Nous approfondirons la question de la période des fonctions trigonométriques au paragraphe 4 (fonctions trigonométriques).

2.2.7. Variations et extrema d'une fonction (croissance, décroissance, maximum, ...)

Voici enfin les définitions relatives aux variations et aux extrema d'une fonction.

- Une fonction f est **constante** dans un intervalle I si et seulement si quels que soient les réels x_1 et x_2 dans I, on a : $f(x_2) = f(x_1)$.

  f est **constante** dans I $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in I : f(x_1) = f(x_2)$

- Une fonction f est **croissante** dans un intervalle I si et seulement si quels que soient les réels x_1 et x_2 dans I, si $x_2 > x_1$, alors $f(x_2) \geq f(x_1)$.

  f est **croissante** dans I $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in I : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

- Une fonction f est **décroissante** dans un intervalle I si et seulement si quels que soient les réels x_1 et x_2 dans I, si $x_2 > x_1$, alors $f(x_2) \leq f(x_1)$.

  f est **décroissante** dans I $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in I : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

- Une fonction f est **strictement croissante** dans un intervalle I si et seulement si quels que soient les réels x_1 et x_2 dans I, si $x_2 > x_1$, alors $f(x_2) > f(x_1)$.

  f est **strictement croissante** dans I $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in I : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

- Une fonction f est **strictement décroissante** dans un intervalle I si et seulement si quels que soient les réels x_1 et x_2 dans I, si $x_2 > x_1$, alors $f(x_2) < f(x_1)$.

  f est **strictement décroissante** dans I $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in I : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

- Une fonction f admet un **maximum absolu** sur une partie I de son domaine, s'il est possible de trouver un réel x_0 tel que : $\forall x \in \mathrm{I} : f(x_0) \geq f(x)$

  (on dit que $f(x_0)$ est le maximum absolu de f sur I)

- Une fonction f admet un **minimum absolu** sur une partie I de son domaine, s'il est possible de trouver un réel x_0 tel que : $\forall x \in \mathrm{I} : f(x_0) \leq f(x)$

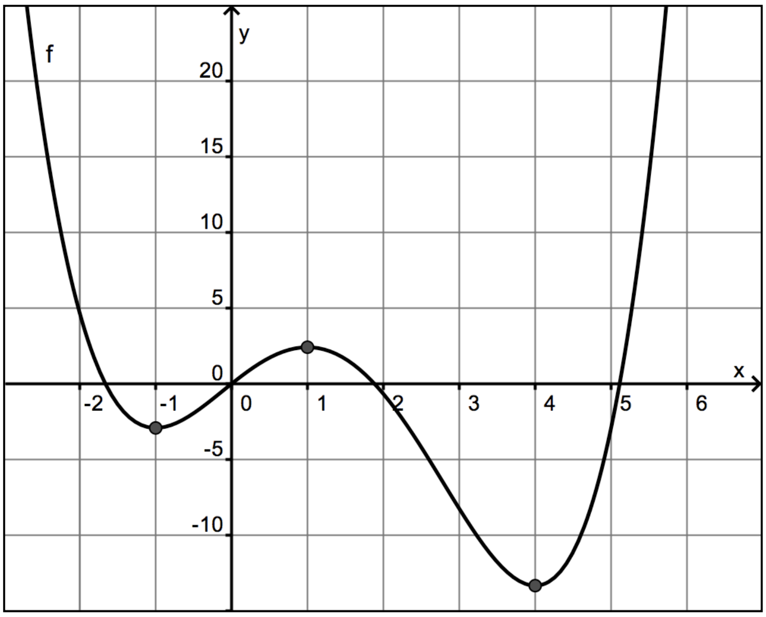
  (on dit que $f(x_0)$ est le minimum absolu de f sur I)

- Une fonction f admet un **maximum local** pour $x = x_0 \in \mathrm{dom} f$, si on peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel que $f(x_0)$ soit un maximum absolu dans $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathrm{dom} f$.

- Une fonction f admet un **minimum local** pour $x = x_0 \in \mathrm{dom} f$, si on peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel que $f(x_0)$ soit un minimum absolu dans $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathrm{dom} f$.

Exemple

Voici le graphique de la fonction $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{4x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+4x$ (dom $f=\mathbf{R}$)



Cette fonction est

- strictement décroissante dans $]-\infty,-1]$
- strictement croissante dans $[-1,1]$
- strictement décroissante dans $[1,4]$
- strictement croissante dans $[4,+\infty[$

(justifier le tout par les définitions)

Cette fonction admet un minimum absolu dans $\mathbf{R}$. En effet, $\forall\, x\in\mathbf{R} : f(4)\leq f(x)$.

Cette fonction admet un minimum local en $x=-1$.
En effet, si nous prenons par exemple $\delta=2$, il est vrai que $f(-1)$ est un minimum absolu dans $[-1-\delta, -1+\delta]=[-3,1]$ puisque $\forall\, x\in[-3,1] : f(-1)\leq f(x)$.

Cette fonction admet en outre un maximum local en $x=1$ (expliquer) mais elle n'admet pas de maximum absolu dans $\mathbf{R}$ (expliquer).

2.2.8. Exercices

1. Soient les fonctions $f(x)=\dfrac{3-2x}{1-x^2}$ et $g(x)=2x^3-x$.

   Pour chacune de ces fonctions :

   a) déterminez le domaine de définition ;

   b) calculez les racines et interprétez graphiquement ;

   c) déterminez l'ordonnée à l'origine et interprétez graphiquement ;

   d) étudiez la parité et interprétez graphiquement.

---

2. Soit la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{3x+1}+\dfrac{\sqrt{2x}}{3-x}$.

   a) Déterminez son domaine de définition.

   b) Le point A de coordonnées (8 , 4.2) appartient-il à G_f ? Justifiez.

   c) Le graphique de f comprend deux points B et C d'ordonnée 1 .
   Utilisez le logiciel GeoGebra pour les trouver.

---

3. Étudiez la parité de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x)=x^4-1$	c) $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$	e) $f(x)=3$
b) $f(x)=2x+x^3$	d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$	f) $f(x)=0$

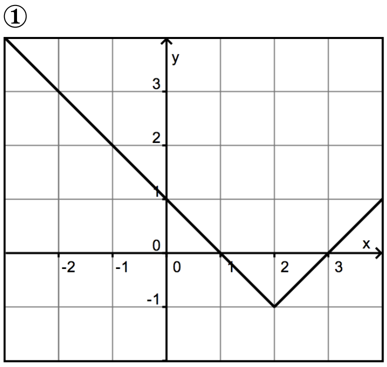
---

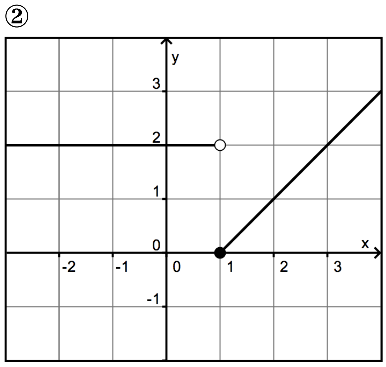
4. La fonction valeur absolue est définie « par morceaux » : $|x|=\begin{cases}-x & si\ \ x<0\\ x & si\ \ x\geq 0\end{cases}$.

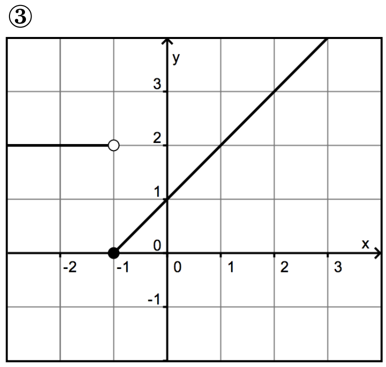
   Voici trois autres fonctions définies par morceaux :

$$g(x)=\begin{cases}2 & si\ \ x<1\\ x-1 & si\ \ x\geq 1\end{cases}\qquad h(x)=\begin{cases}-x+1 & si\ \ x\leq 2\\ x-3 & si\ \ x>2\end{cases}\qquad k(x)=\begin{cases}2 & si\ \ x<-1\\ x+1 & si\ \ x\geq -1\end{cases}$$

   Associez chacune de ces fonctions à un des graphiques ci-dessous.

①


②


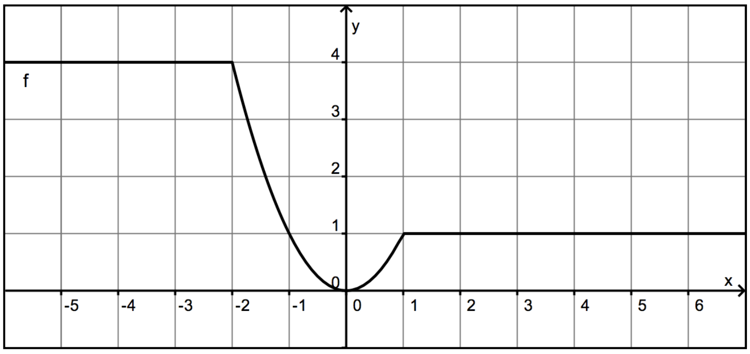
③


5. Représentez la fonction suivante et décrivez ses variations : $f(x) = \begin{cases} -x-2 & si \quad x \le -1 \\ 1 & si \quad x > -1 \end{cases}$.

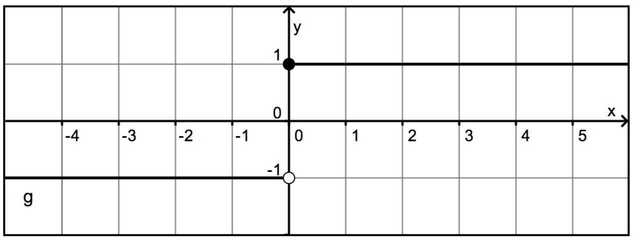
6. Représentez la fonction suivante et décrivez ses variations : $f(x) = \begin{cases} 4 & si \quad x < -2 \\ x^2 & si \quad x \ge -2 \end{cases}$.

7. Déterminez une expression analytique de chacune des fonctions représentées ci-dessous.

①



②



8. Voici une fonction un peu particulière, habituellement notée $E(x)$ et définie comme suit : « quel que soit le nombre réel x, on appelle $E(x)$ le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x ».

   a) Déterminez $E(3)$, $E(3,2)$, $E(3,7)$ et $E(4)$.

   b) Déterminez $E(-2)$, $E(-1,9)$, $E(-1,5)$ et $E(-1)$.

   c) Maintenant que vous avez compris, tracez le graphique de cette fonction dans l'intervalle [- 4 , 4] .

   d) Quelles sont les racines de cette fonction ?

9. Dans sa bibliothèque de fonctions, le logiciel GeoGebra propose la fonction floor(x) [1]. Essayez-la. Reconnaissez-vous cette fonction ?

10. Le logiciel Geogebra propose également la fonction ceil(x) [2]. Après avoir réalisé son graphique à l'écran, donnez une définition précise de cette fonction (inspirez-vous de la définition de E(x) à la question 8).

[1] en anglais, « floor » signifie « plancher »

[2] et « ceil » signifie « plafond »

11. À partir de la fonction $E(x)$, définissons la fonction $f(x) = x - E(x)$.

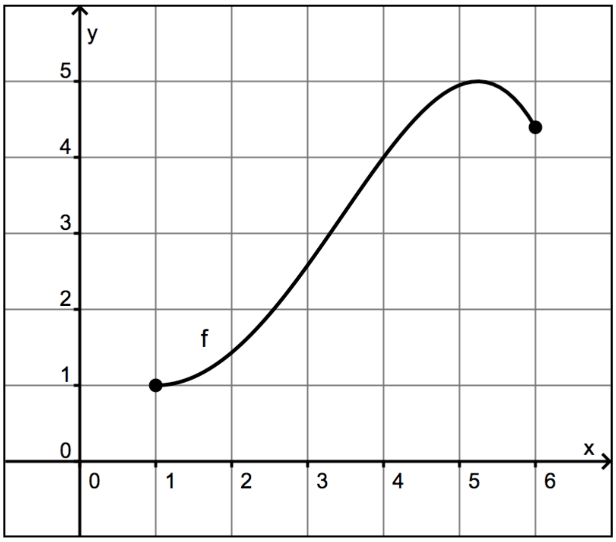
a) Tracez le graphique de cette fonction dans l'intervalle [- 4 , 4] .

b) Quelles sont les racines de cette fonction ?

c) Cette fonction possède une propriété remarquable. Laquelle ? Soyez précis(e).

---

12. Observez le graphique de la fonction f ci-dessous. En vous référant à la définition, expliquez pourquoi il est faux de dire que f est croissante dans l'intervalle $[1, 6]$.



---

13. Montrez que la définition d'une fonction croissante (voir page 8) est équivalente à la définition suivante :

$$f \text{ est croissante dans } [a, b] \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a, b] : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

---

14. En vous inspirant de l'énoncé précédent, donnez une autre version de la définition d'une fonction décroissante dans $[a, b]$.

2.3. Domaine de définition d'une fonction

Exemples

Voici quatre fonctions :

$$f(x) = x^2 - 3x + 12 \qquad g(x) = \frac{1}{x-2} \qquad h(x) = \sqrt{x^2 - 1} \qquad l(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x^2 - 4}$$

Pour chacune de ces fonctions

a) calculer, si possible, les images des réels suivants : - 1 , - 2 , 0 , 1 , 2 et 11 .
Si un problème se pose, expliquez quelle en est la nature.

b) Exprimer à quelle(s) condition(s) il sera possible de calculer l'image d'un réel x .

c) Déterminer le domaine de définition

Méthode de recherche d'un domaine de définition

Déterminer le domaine de définition d'une fonction f revient à déterminer l'ensemble des réels qui possèdent une image par f (voir définition page 5).
En pratique, on recherche souvent les réels qui n'ont pas d'image par f pour les exclure.

En général, pour obtenir le domaine de définition d'une fonction réelle, il faudra rejeter de **R**

a) les réels annulant un dénominateur ;

b) les réels qui donnent un nombre négatif sous une racine carrée ou un radical d'indice pair.

Vocabulaire

Quand il est possible de calculer l'image d'un réel a par une fonction f, on dit que « ***f* est définie en *a*** » ou que « ***a* appartient au domaine de définition de *f*** ».

Quand le calcul de l'image de a est impossible, on dit que « ***f* n'est pas définie en *a*** » ou que « ***a* n'appartient pas au domaine de définition de *f*** ».

Exercices

1. Quelles sont les conditions d'existence des fonctions suivantes ?

a) $f(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$

b) $f(x) = \sqrt{r(x)}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{n(x)}{d(x)}}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{n(x)}}{\sqrt{d(x)}}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{n(x)}}{d(x)}$

f) $f(x) = \dfrac{n(x)}{\sqrt{d(x)}}$

2. Dans chacun des cas suivants, comparer les domaines de définition des fonctions f et g.

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{3x-2}}$ et $g(x)=\sqrt{\dfrac{2x-1}{3x-2}}$

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3-2x}}$ et $g(x)=\sqrt{\dfrac{3x-2}{3-2x}}$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{1-x}}$ et $g(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{1-x}}$

---

3. Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{2x-5}}$

b) $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{(x-2)^3}$

c) $f(x)=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}$

d) $f(x)=3x^2-6x+7$

e) $f(x)=\sqrt{x-1}+\dfrac{3}{4-\sqrt{x-2}}$

f) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-2x}}{x^2-3x}$

f) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x-1}{x^2-9}}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{x}-2\sqrt{x}+x^3$

h) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{10-x^2}}$

i) $f(x)=\dfrac{\sqrt{21+3x}}{3+x}$

j) $f(x)=\dfrac{2x}{5-\dfrac{1}{x}}$

k) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

---

4. Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3x-5}{ax+b}$.

Déterminer les valeurs des paramètres réels a et b pour que les deux conditions suivantes soient satisfaites simultanément :

1°/ f n'est pas définie en x = 2 2°/ le point $(3,4)\in G_f$

---

5. Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x-a}{x^2+bx+b-1}$.

Déterminer les valeurs des paramètres réels a et b pour que les deux conditions suivantes soient satisfaites simultanément :

1°/ $x=2$ est une racine de f

2°/ il y a un et un seul réel pour lequel la fonction f n'est pas définie.

6. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+ax+b}$.

Déterminer les valeurs des paramètres réels a et b pour que les deux conditions suivantes soient satisfaites simultanément :

1°/ l'ordonnée à l'origine de f vaut 3

2°/ la fonction f est définie pour tout réel.

---

7. Inventer une fonction dont on vous donne le domaine de définition.

a) dom f = $\mathbf{R} \setminus \{ 2 , 3 \}$	e) dom f = $]-\infty , 1 [\cup] 2 , +\infty [$
b) dom f = $[4 , +\infty [$	f) dom f = $[1 , 2]$
c) dom f = $]-\infty , 4]$	g) dom f = $[\frac{1}{2} , +\infty [\setminus \{4\}$
d) dom f = $] 4 , +\infty [$	h) dom f = $] -3 , 3 [\setminus \{0\}$

---

3. Transformations de graphiques

3.1. Construire des graphiques

Nous savons qu'il est possible de tracer beaucoup de graphiques de fonctions en manipulant ceux des fonctions de référence.
Les logiciels graphiques actuels étant très performants et faciles à se procurer, cette démarche perd un peu de son intérêt. Cependant, une bonne compréhension des transformations nous sera utile par la suite pour pouvoir effectuer le travail inverse : retrouver l'expression analytique d'une fonction à partir de son graphique.

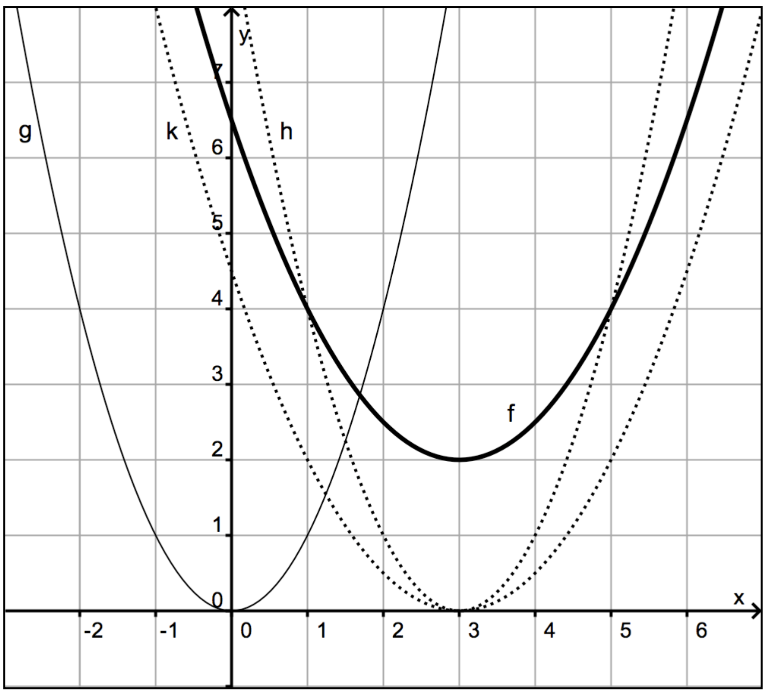
Notre futur objectif sera d'utiliser ces techniques pour tracer des graphiques de fonctions trigonométriques et surtout de retrouver des expressions analytiques de telles fonctions (paragraphe 4).

Revoyons d'abord l'essentiel …

Exemple 1 : construire le graphique de la fonction $f(x)=\frac{1}{2}(x-3)^2+2$.

Nous partons du graphique de la fonction $g(x)=x^2$ et procédons aux transformations suivantes :

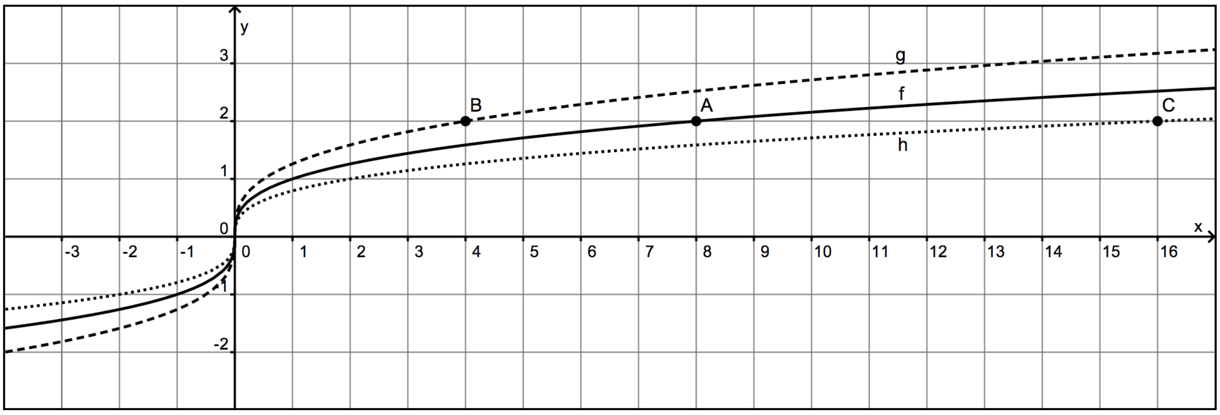
- $h(x)=(x-3)^2$ (translater G_g horizontalement, de 3 unités vers la droite)
- $k(x)=\frac{1}{2}(x-3)^2$ (diviser les ordonnées de G_h par 2)
- $f(x)=\frac{1}{2}(x-3)^2+2$ (translater G_k verticalement, de 2 unités vers le haut)



L'exemple suivant illustre une transformation parfois utilisée pour des fonctions algébriques mais surtout très utile pour les fonctions trigonométriques de type $\sin(kx)$.

Exemple 2 : fonctions de la forme $f(kx)$.

Construire les graphiques des fonctions $m(x) = \sqrt[3]{x}$, $n(x) = \sqrt[3]{2x}$ et $p(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x}$.



Le graphique de g s'obtient en divisant par 2 les abscisses des points du graphique de f.

Expliquons cela à l'aide d'un exemple : la racine cubique de 8 vaut 2 , autrement dit, « l'image de 8 par la fonction f vaut 2 » et le graphique de f passe donc par le point A(8,2) ; pour la fonction g , si l'on veut aussi obtenir 2 comme image, étant donné qu'il y a maintenant $2x$ sous la racine cubique, la moitié de la précédente valeur de x suffit (donc 4) et le graphique de g passe par le point B(4,2) .

On peut justifier de la même façon que le graphique de h s'obtient en divisant par ½ (en multipliant par 2) les abscisses des points du graphique de f.

Remarquons enfin que les fonctions g et h peuvent respectivement s'écrire

$$g(x) = f(2x) \quad \text{et} \quad h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) .$$

Il s'agit donc de fonctions du type $f(kx)$ où k est une constante.

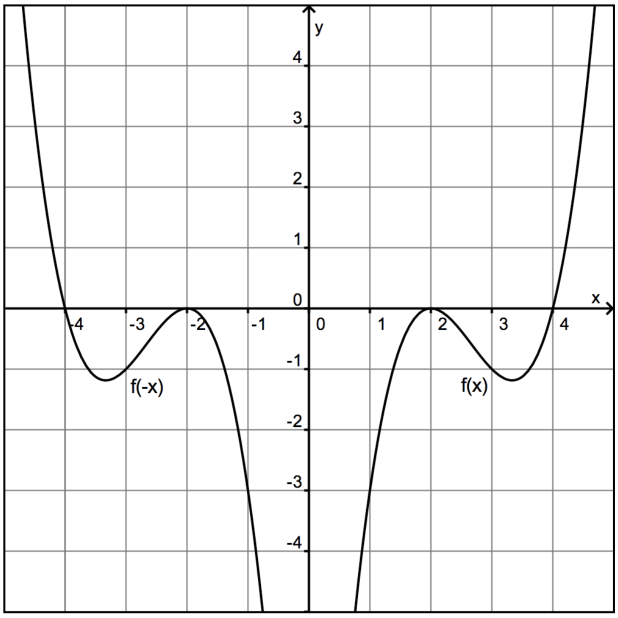
Un cas particulier intéressant est celui où $k = -1$.

Cas particulier : $\boxed{f(-x)}$

Pour obtenir le graphique de $f(-x)$, il faut, selon les observations précédentes, diviser par (-1) les abscisses des points du graphique de f. Le résultat est que le graphique de $f(-x)$ est l'image de celui de $f(x)$ par une symétrie orthogonale d'axe y .

Soit par exemple la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 16$.
Nous avons donc $f(-x) = -x^3 - 8x^2 - 20x - 16$.

Voyez les graphiques de $f(x)$ et $f(-x)$ à la page suivante.



Exemple 3 : valeur absolue d'une fonction.

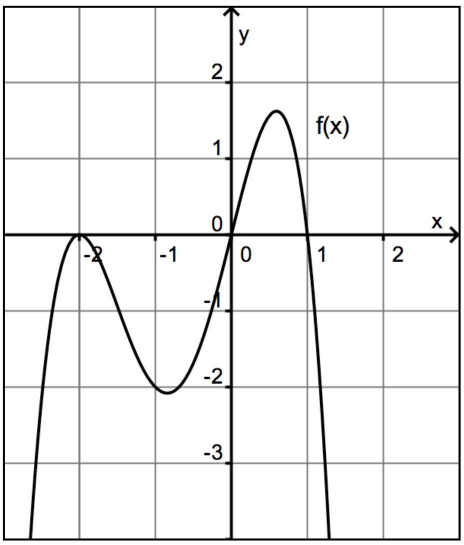
Nous connaissons la définition de la valeur absolue d'un réel x : $|x| = \begin{cases} -x & si \quad x \leq 0 \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$.

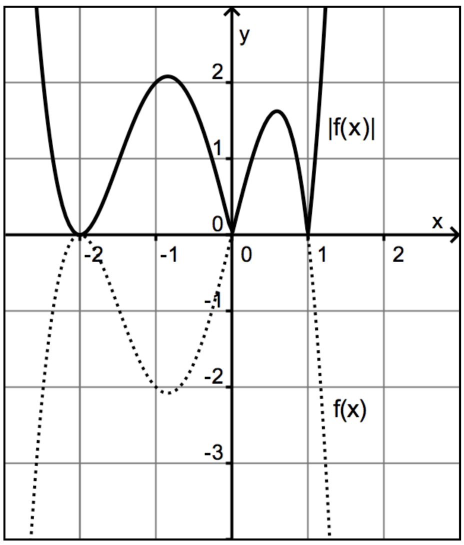
Étant donnée une fonction f, nous pouvons donc définir la fonction « valeur absolue de f » par

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x) & si \quad f(x) \leq 0 \\ f(x) & si \quad f(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Autrement dit, lorsque $f(x)$ est négative, le graphique de $|f|$ est le symétrique de celui de f par rapport à l'axe des abscisses.
Par contre, lorsque $f(x)$ est positive, le graphique de f se confond avec celui de $|f|$.

Pour illustrer cela, voici la fonction $f(x) = x(1-x)(x+2)^2$ (graphique de gauche).
Le graphique de droite montre la fonction $|f|$ (en trait plein) et la fonction f (en pointillés sauf la partie recouverte par $|f|$).





Résumé

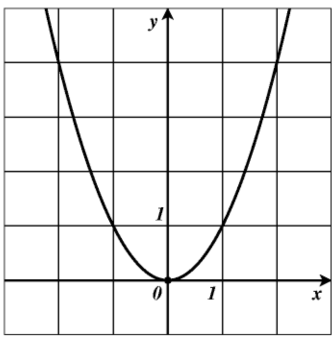
Connaissant le graphique d'une fonction f, on peut construire le graphique de

- $f(x+k)$ en soustrayant k aux abscisses des points du graphique de f
- $f(x)+k$ en ajoutant k aux ordonnées des points du graphique de f
- $k\cdot f(x)$ en multipliant par k les ordonnées du graphique de f
- $f(kx)$ en divisant par k les abscisses des points du graphique de f
- $f(-x)$ en traçant le symétrique du graphique de f par rapport à l'axe des ordonnées
- $|f(x)|$ en conservant le graphique de f, lorsque $f(x)$ est positive, et en traçant le symétrique du graphique de f par rapport à l'axe des abscisses lorsque $f(x)$ est négative

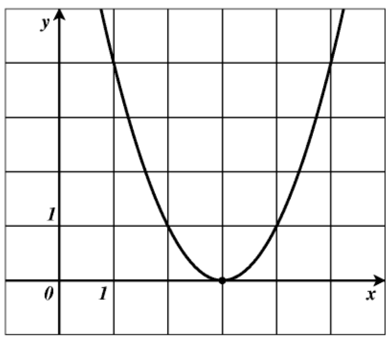
<u>Exercice résolu</u> : construire le graphique de la fonction $f(x)=\left|\frac{1}{2}(x-3)^2-2\right|$.

Cette construction peut être réalisée en cinq étapes.

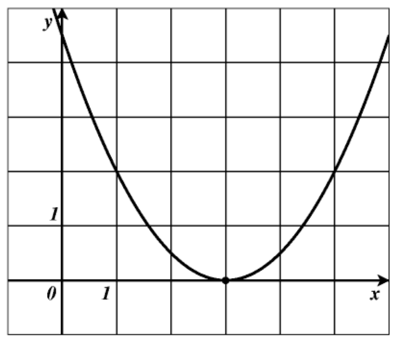
❶ $g(x)=x^2$



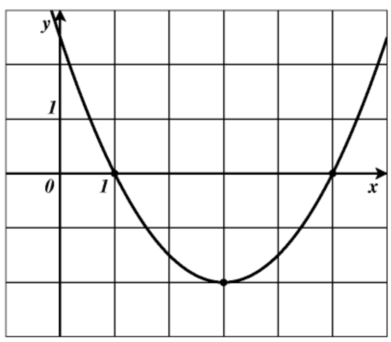
❷ $h(x)=(x-3)^2$



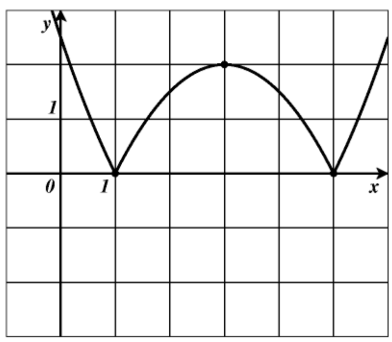
❸ $i(x)=\frac{1}{2}(x-3)^2$



❹ $j(x)=\frac{1}{2}(x-3)^2-2$

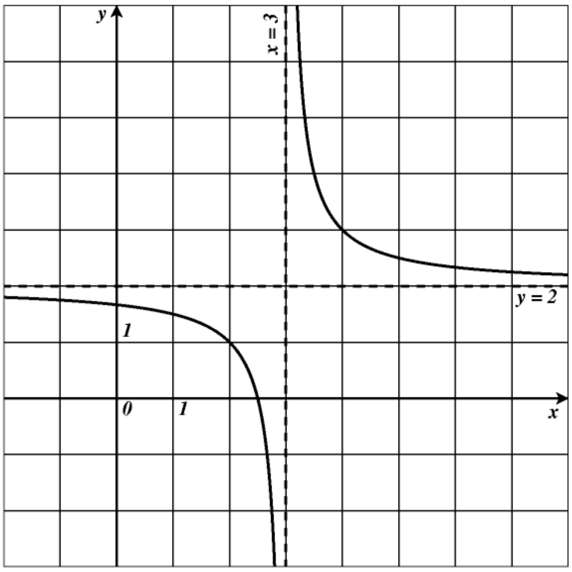


❺ $f(x)=\left|\frac{1}{2}(x-3)^2-2\right|$



3.2. Retrouver une expression analytique à partir d'un graphique

Exercice résolu : déterminer l'expression analytique de la fonction f représentée ci-dessous sachant qu'elle a été obtenue par transformations successives d'une fonction de référence.

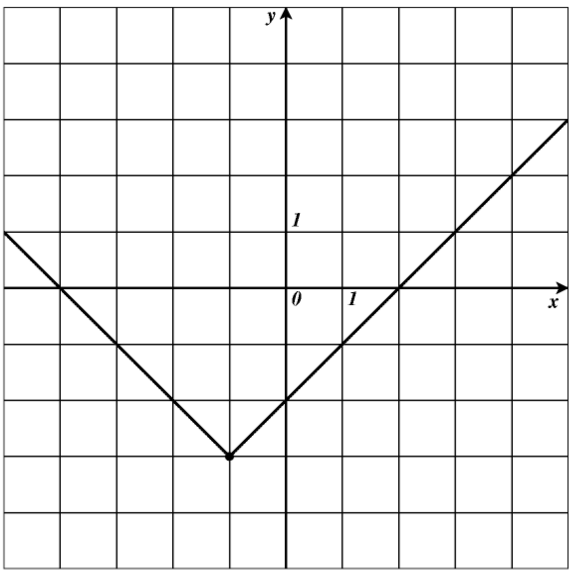


Ce graphique a été obtenu en ajoutant 3 aux abscisses et en ajoutant 2 aux ordonnées des points du graphique de la fonction $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Par conséquent : $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + 2$.

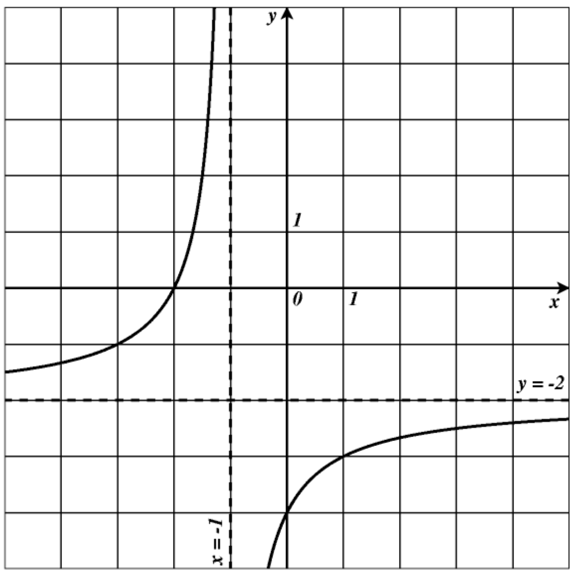
Exercice

Déterminer une expression analytique de chacune des fonctions représentées ci-dessous.

❶



❷



4. Fonctions trigonométriques

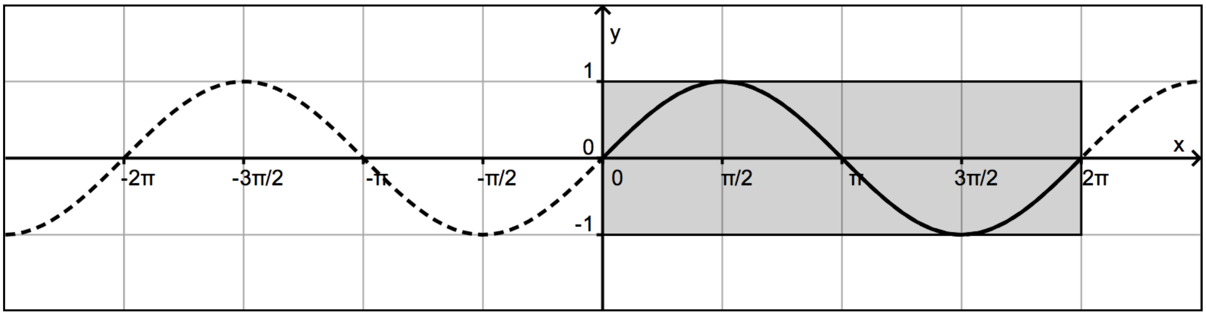
4.1. Fonctions de la forme $f(x) = a \cdot \sin[b(x+c)] + d$ ou $f(x) = a \cdot \cos[b(x+c)] + d$

Les transformations de graphiques que nous venons de voir trouvent une application intéressante dans la représentation de certaines fonctions trigonométriques : celles qui sont de la forme

$$f(x) = a \cdot \sin[b(x+c)] + d \quad (\text{ou} \quad f(x) = a \cdot \cos[b(x+c)] + d\ ).$$

Dans la réalité, celles-ci permettent notamment de modéliser des phénomènes périodiques : ondes sonores, marées, variations saisonnières de températures, etc.

La fonction de référence est évidemment la fonction *sinus*.



Parmi les principales caractéristiques de cette fonction, relevons qu'elle est périodique de période 2π , ce qui permet de représenter un cycle complet dans l'intervalle $[0,2\pi]$, et qu'elle prend des valeurs comprises entre -1 et 1 (son image étant l'intervalle $[-1,1]$).

Pour résumer, nous pourrions dire qu'un cycle complet de la fonction *sinus* peut être représenté dans la *fenêtre* $[0,2\pi] \times [-1,1]$.

Voyons maintenant comment représenter une fonction plus générale, et le rôle joué par les paramètres a, b, c et d .

Exemple 1 : construire le graphique de la fonction $f(x) = 3 \cdot \sin(2x + \frac{\pi}{3}) - 2$.

Transformons d'abord légèrement l'écriture de la fonction : $f(x) = 3 \cdot \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] - 2$.

De cette façon, nous identifions les valeurs des paramètres : $a = 3$, $b = 2$, $c = \frac{\pi}{6}$ et $d = -2$.

Les différentes étapes de la construction pourraient alors être :

❶ $\sin x$

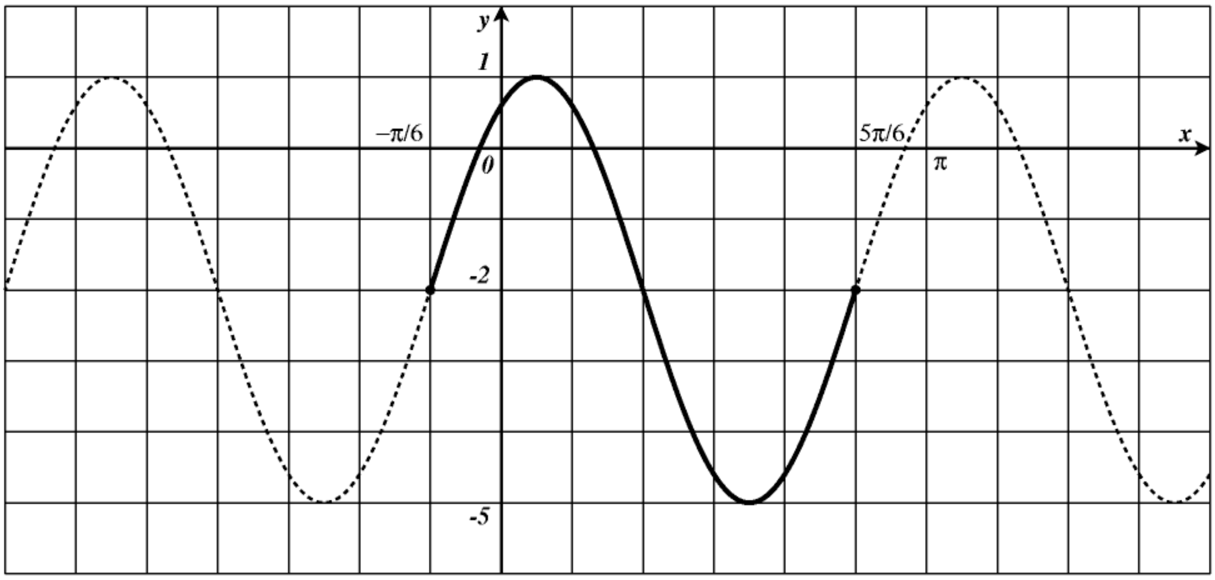
❷ $\sin 2x$ (division des abscisses par 2 , ce qui veut dire que période devient $\frac{2\pi}{2} = \pi$ et qu'un cycle complet de la fonction peut être dessiné dans l'intervalle $[0,\pi]$)

❸ $\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$ (translation horizontale de $\frac{\pi}{6}$ vers la gauche ; un cycle complet de cette fonction peut donc être dessiné dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$)

❹ $3\cdot\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$ (multiplication des ordonnées par 3 ; cette fonction prend donc des valeurs entre -3 et 3)

❺ $3\cdot\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]-2$ (translation verticale de 2 vers le bas ; cette fonction prend donc des valeurs entre -5 et 1)

Tenant compte des résultats ❸ et ❺ , nous voyons que nous pouvons dessiner un cycle complet de cette fonction dans la *fenêtre* $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]\times\left[-5,1\right]$.



Quelques commentaires

- La *valeur moyenne*[3] de cette fonction est la moyenne arithmétique entre sa *valeur minimale* et sa *valeur maximale*. Dans le cas présent : $v_{moy}=\frac{-5+1}{2}=-2$.
- L'*amplitude* de cette fonction est la valeur absolue de la différence entre la valeur moyenne et la valeur maximale (ou minimale). Pour notre exemple, elle vaut 3 .
- Pour le cycle tracé en gras, l'abscisse du maximum est $\frac{\pi}{12}$, tandis que celle du minimum est $\frac{7\pi}{12}$ (expliquer).

[3] La notion de valeur moyenne d'une fonction sera précisée plus tard. Pour la fonction *sinus*, les valeurs varient entre -1 et 1 ; intuitivement, les symétries de son graphique nous amènent à dire que sa valeur moyenne est 0 , un peu comme le niveau moyen d'un lac agité par des vagues très régulières.

Exemple 2 : construire le graphique de la fonction $f(x) = -2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$.

Première façon (ce n'est pas la plus simple)

Comme dans l'exemple 1 , transformons l'expression de f : $f(x) = -2 \cdot \cos\left[\frac{1}{2}.(x+\pi)\right]$.

Nous obtenons ainsi les valeurs des paramètres : $a = -2$, $b = ½$, $c = \pi$ et $d = 0$.

Les différentes étapes de la construction pourraient alors être :

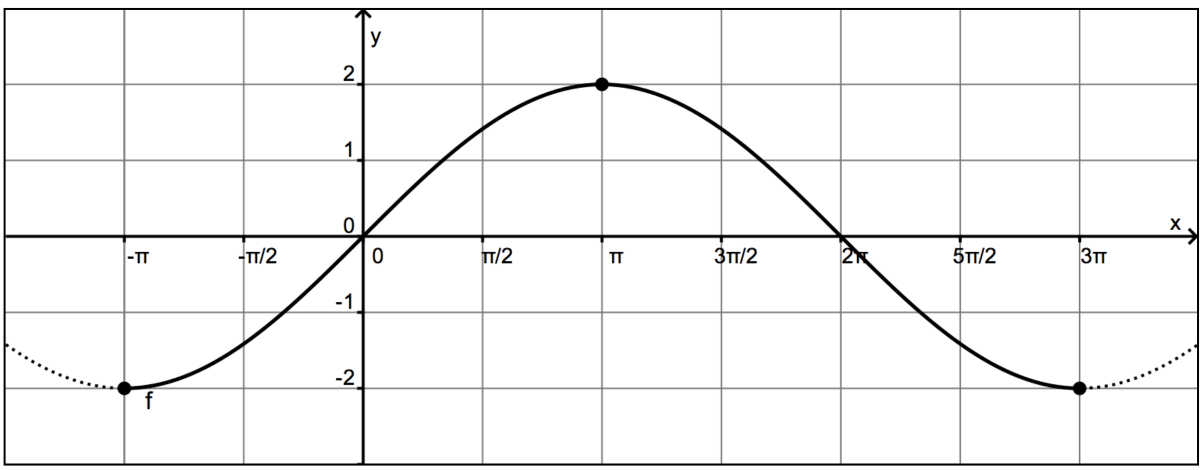
❶ $\cos x$

❷ $\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ (division des abscisses par ½ ; la période devient donc 4π et un cycle de la fonction peut être dessiné dans l'intervalle $[0, 4\pi]$)

❸ $\cos\left[\frac{1}{2}(x+\pi)\right]$ (translation horizontale de π vers la gauche ; un cycle de cette fonction peut donc être dessiné dans l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$)

❹ $-2 \cdot \cos\left[\frac{1}{2}.(x+\pi)\right]$ (multiplication des ordonnées par - 2 ; cette fonction prend donc des valeurs entre -2 et 2)

Tenant compte des résultats ❸ et ❹ , nous pouvons dessiner un cycle de cette fonction dans la *fenêtre* $[-\pi, 3\pi] \times [-2, 2]$ (en nous rappelant que a est négatif !).



Deuxième façon : penser aux angles associés !

En effet, comme $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$, nous pouvons simplifier l'expression de f :

$$f(x) = -2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -2 \cdot \left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) .$$

Maintenant, la façon de tracer le graphique apparaît clairement ! Expliquez.

En général (expliquer)

Pour une fonction de la forme $f(x) = a \cdot \sin\left[b(x+c)\right] + d$ ou $f(x) = a \cdot \cos\left[b(x+c)\right] + d$:

- L'amplitude vaut $|a|$
- La période est $T = \dfrac{2\pi}{|b|}$
- La valeur moyenne est d
- La valeur maximale est $d + |a|$ tandis que la valeur minimale est $d - |a|$
- Un cycle complet de la fonction peut être représenté dans l'intervalle $\left[-c, -c + T\right]$

Exercices

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'amplitude, la période, la valeur moyenne, la valeur maximale et la valeur minimale.
Déterminer un intervalle dans lequel il est possible de dessiner un cycle complet, et la représenter en précisant les abscisses du maximum et du minimum.

a) $f(x) = 4 \cdot \sin\left[2\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)\right] - 3$

b) $f(x) = 3 \cdot \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + 1$

c) $f(x) = 3 - \cos 2x$

d) $f(x) = \left|\sin \dfrac{x}{2}\right|$

e) $f(x) = 2 \cdot \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$

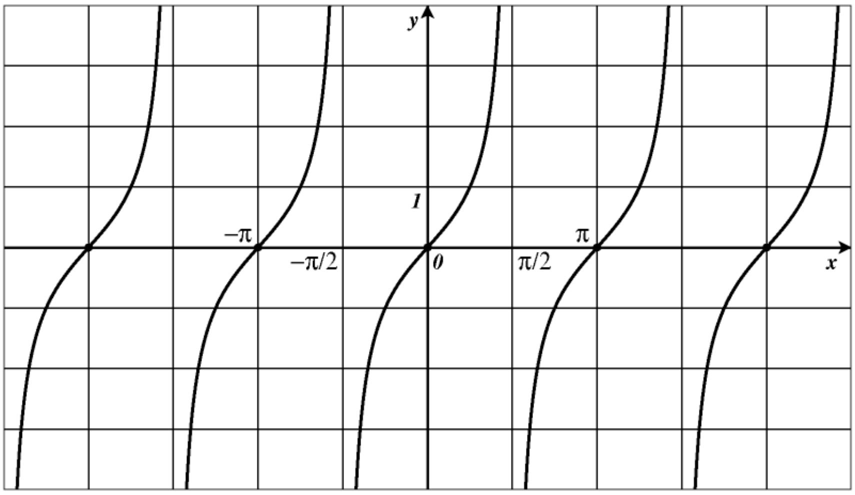
f) $f(x) = -2 \cdot \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) + 1$

g) $f(x) = 50 \cdot \sin 3x + 25$

h) $f(x) = -\left|\sin 3x\right|$

4.2. Fonctions de la forme $f(x) = a \cdot \tan\left[b(x+c)\right] + d$

Pour cette classe de fonctions, les notions de valeurs moyenne, maximale, minimale et d'amplitude n'ont plus de sens : en effet, la fonction de référence *tangente* n'est pas bornée.



Il reste à spécifier la période et dans quel intervalle ouvert (il y a des asymptotes !) il est possible de représenter un cycle complet.

En général (expliquer)

Pour une fonction de la forme $f(x) = a \cdot \tan\left[b(x+c)\right] + d$ ou $f(x) = a \cdot \cot\left[b(x+c)\right] + d$:

- La période est $T = \dfrac{\pi}{|b|}$
- Un cycle complet de la fonction peut être représenté dans l'intervalle $\left]-c, -c+T\right[$

<u>Exercice</u>

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer la période, un intervalle dans lequel il est possible de dessiner un cycle complet, et la représenter en précisant les équations des asymptotes.

a) $f(x) = 2 \cdot \tan 2x$

b) $f(x) = 3 \cdot \tan\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

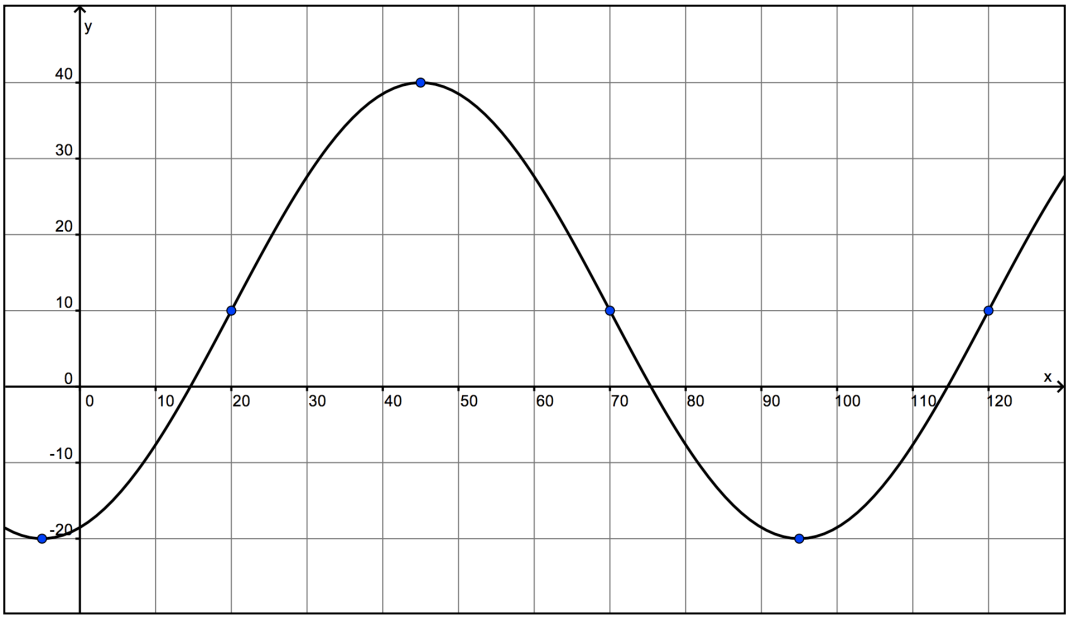
c) $f(x) = \cot\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 1$

d) $f(x) = \tan\left(\pi - \dfrac{x}{2}\right)$

4.3. Déterminer une expression analytique à partir d'un graphique

Les propriétés que nous venons de voir permettent de retrouver l'expression analytique d'une fonction trigonométrique à partir de son graphique.

Exercice résolu : déterminer une expression analytique de la fonction représentée ci-dessous sachant qu'elle est de la forme $f(x) = a \cdot \sin\left[b(x+c)\right] + d$.



- L'amplitude de la fonction est la valeur absolue de la demi différence entre les valeurs extrêmes de la fonction : $a = 30$.
- Nous voyons un cycle dans l'intervalle $\left[20,120\right]$; la fonction a donc pu être obtenue en translatant sinus de 20 unités vers la droite : $c = -20$.
- La période vaut 100 ; donc, $\dfrac{2\pi}{|b|} = 100$; comme $b > 0$, on a : $b = \dfrac{\pi}{50}$.
- La valeur moyenne de la fonction vaut 10 ; donc, $d = 10$.

Finalement : $f(x) = 30 \cdot \sin\left[\dfrac{\pi}{50}(x-20)\right] + 10$.

Remarque : il est bien sûr possible de trouver d'autres expressions analytiques équivalentes à la précédente.

Ainsi, on peut voir un cycle de la fonction $y = -\sin x$ dans l'intervalle $[-30,70]$ et en déduire

que $f(x) = -30 \cdot \sin\left[\dfrac{\pi}{50}(x+30)\right] + 10$.

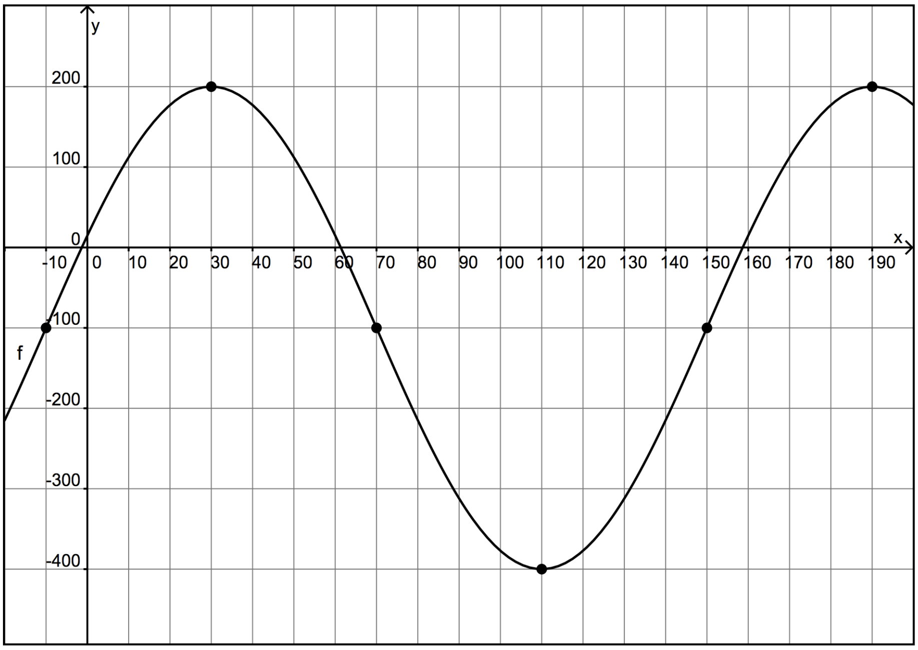
Ou encore, voir un cycle de la fonction $y = \cos x$ dans l'intervalle $[45,145]$ et en déduire

que $f(x) = 30 \cdot \cos\left[\dfrac{\pi}{50}(x-45)\right] + 10$.

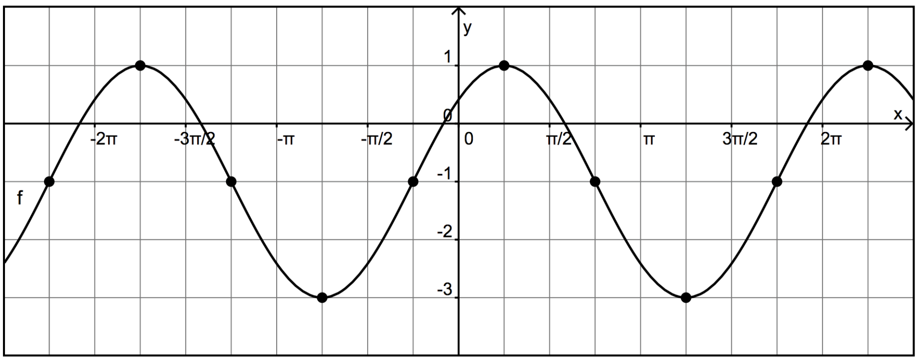
Exercice

Déterminer une expression analytique de chacune des fonctions représentées ci-dessous.

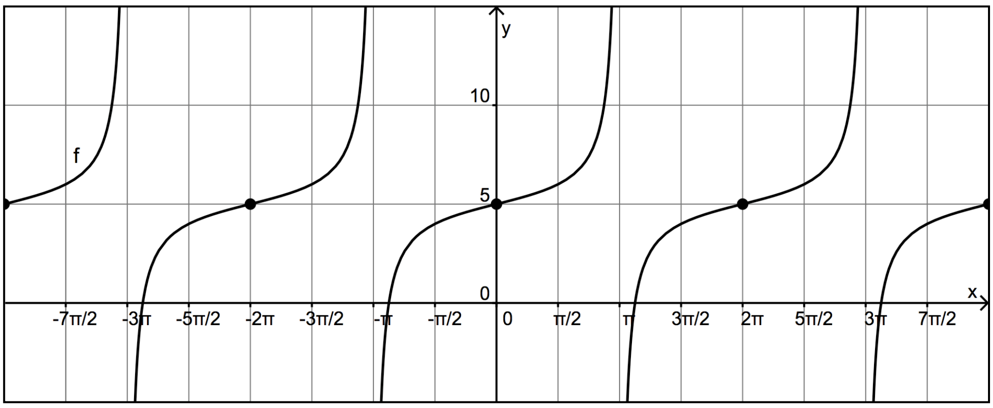
1.



2.



3.



5. Fonctions homographiques

Définition : une fonction homographique est une fonction de la forme $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ où les réels a , b et d sont quelconques tandis que c est un réel non nul.

Si l'on applique certaines transformations au graphique de la fonction « inverse » $\dfrac{1}{x}$, on obtient des fonctions homographiques.

Exemple 1

Multiplier par 2 les ordonnées du graphiques de $\dfrac{1}{x}$; translater le graphique obtenu de 4 unités vers la droite et ensuite de 7 unités vers le haut. On obtient $h(x) = \ldots$?

Voici les fonctions que l'on obtient en respectant l'ordre des transformations donné ci-dessus :

$$\frac{1}{x} \to \frac{2}{x} \to \frac{2}{x-4} \to \frac{2}{x-4}+7$$

Le graphique obtenu est une hyperbole possédant une asymptote verticale (AV ≡ x = 4) et une asymptote horizontale (AH ≡ y = 7).

Transformons l'écriture de la dernière fonction :

$$h(x)=\frac{2}{x-4}+7=\frac{2+7\cdot(x-4)}{x-4}=\frac{7x-26}{x-4}$$

Il s'agit donc bien d'une fonction homographique avec $a=7$, $b=-26$, $c=1$ et $d=-4$.

On peut démontrer que toute fonction homographique peut s'obtenir par de telles transformations du graphique de $\dfrac{1}{x}$. Commençons par un exemple.

Exemple 2

Montrer que l'on peut obtenir le graphique de $h(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$ par transformations du graphique de $\dfrac{1}{x}$.

Transformons l'expression de h : $h(x)=\dfrac{2\cdot(x-2)+7}{x-2}=2+\dfrac{7}{x-2}$.

Nous obtiendrons donc le graphique de $h(x)$ en multipliant par 7 les ordonnées du graphiques de $\dfrac{1}{x}$ et en translatant le graphique ainsi obtenu de 2 unités vers la droite et ensuite de 2 unités vers le haut.

Le graphique de $h(x)$ est une hyperbole possédant une asymptote verticale (AV ≡ x = 2) et une asymptote horizontale (AH ≡ y = 2).

Exercices

1. Expliquer comment obtenir le graphique de chacune des fonctions suivantes à partir de celui de la fonction « inverse ».

a) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+4}$

b) $f(x)=\dfrac{2x+3}{1-x}$

c) $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+3}$

d) $f(x)=\dfrac{5x}{4x-3}$

---

2. Démontrer que toute fonction homographique $h(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ peut s'écrire sous la forme

$$h(x)=m+\frac{n}{px+q}$$

Refaire l'exercice 1 avec le résultat obtenu ici.

---

6. Opérations sur les fonctions

6.1. Égalité de deux fonctions

Définition : deux fonctions f et g sont égales si elles ont le même domaine de définition et si pour tout réel x de leur domaine commun on a $f(x) = g(x)$.

Exemples (à expliquer)

- Les fonctions $f(x) = \sqrt{x^2}$ et $g(x) = |x|$ sont égales
- Les fonctions $f(x) = \sqrt{x^2+2} - 1$ et $g(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2+2}+1}$ sont égales
- Les fonctions $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ et $g(x) = x - 1$ ne sont pas égales

6.2. Définitions des opérations

Soient deux fonctions réelles f et g .

On définit …	La fonction telle que …
$k \cdot f$ avec $k \in R$	$(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$
$f + g$	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$-g$	$(-g)(x) = -g(x)$
$f - g$	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
$\dfrac{1}{g}$	$\left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{g(x)}$
$\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
f^n avec $n \in N_0$	$(f^n)(x) = [f(x)]^n$
$\sqrt[n]{f}$ avec $n \in N_0$	$\left(\sqrt[n]{f}\right)(x) = \sqrt[n]{f(x)}$
$\lvert f \rvert$	$\lvert f \rvert(x) = \lvert f(x) \rvert$
$g \circ f$	$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Exemples

Soient les fonctions $f(x) = \sqrt{x-2}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x-5}$.

Donner l'expression analytique de chacune des fonctions $f+g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ et f^2 .

Réponses

$$(f+g)(x) = \sqrt{x-2} + \frac{1}{x-5}$$

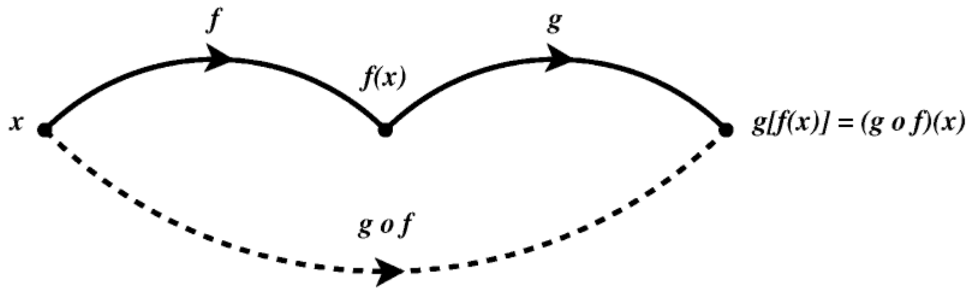
$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x-2} \cdot \frac{1}{x-5}$$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{x-2} \cdot (x-5)$ (notons bien que $dom\left(\dfrac{f}{g}\right) = [2,+\infty[\setminus \{5\}$; pourquoi ?)

$\left(f^2\right)(x) = x-2$ (notons bien que $dom\left(f^2\right) = [2,+\infty[$; pourquoi ?)

6.3. La composée de deux fonctions mérite une attention particulière

Le schéma suivant illustre comment déterminer l'image d'un réel x par la fonction $g \circ f$ (lire « *g* rond *f* » ou encore « *f* suivie de *g* »).



Il faut d'abord déterminer l'image de x par la fonction f, et ensuite déterminer l'image de $f(x)$ par la fonction g .
Notons bien qu'il faut que $x \in \text{dom} f$ et que $f(x) \in \text{dom}\, g$.

Exemple

Soient les fonctions $f(x) = 2x-3$ et $g(x) = \dfrac{1}{x+4}$.

a) Déterminer l'image du réel 5 par $g \circ f$.
b) Déterminer l'image du réel 0 par $f \circ g$.
c) Donner l'expression analytique et le domaine de définition de chacune des fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$.

Réponses

a) $(g \circ f)(5) = g(f(5)) = \dfrac{1}{f(5)+4} = \dfrac{1}{7+4} = \dfrac{1}{11}$

b) $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = 2 \cdot g(0) - 3 = 2 \cdot \dfrac{1}{4} - 3 = \dfrac{1}{2} - 3 = -\dfrac{5}{2}$

c) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \dfrac{1}{f(x)+4} = \dfrac{1}{(2x-3)+4} = \dfrac{1}{2x+1}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \cdot g(x) - 3 = 2 \cdot \dfrac{1}{x+4} - 3$

Exercices

1. Échauffement avant la composée …

On donne les fonctions $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ et ☺$(x) = x^2$.

Déterminer :

a) $g(5t)$	e) $f(3x-4)$
b) $f(2x)$	f) $g(-2u)$
c) $g(a^2)$	g) - 3 . ☺(y)
d) ☺(♥)	h) $g(1-y)+3$

---

2. Composées

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression analytique de chacune des fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$.

a) $f(x) = 3x + 4$ et $g(x) = 2x^2$

b) $f(x) = 1 - 2x$ et $g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et $g(x) = 3x^2 + 1$

d) $f(x) = x^3$ et $g(x) = \sqrt[3]{x}$

e) $f(x) = 3$ et $g(x) = x^2 - 2x + 7$

6.4. Décomposition d'une fonction en fonctions de référence

Il est souvent utile de travailler dans l'autre sens, c'est-à-dire d'exprimer une fonction comme la composée de deux fonctions (ou plus).

Exemple 1

Soit la fonction $h(x) = \sqrt{3x - 2}$.
Nous pouvons écrire $h = g \circ f$ avec $f(x) = 3x - 2$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

Exemple 2

Soit la fonction $i(x) = \dfrac{1}{(2x+5)^2}$.

Nous pouvons écrire $i = h \circ g \circ f$ avec $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

Exercice

Exprimer les fonctions suivantes comme la composée de fonctions de référence.

a) $f(x) = \sqrt{5 - 3x}$

b) $f(x) = (x+2)^3$

c) $f(x) = \cos 3x$

d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

e) $f(x) = \sin^2 x$

f) $f(x) = \sin^2 3x$

g) $f(x) = \sqrt[3]{(2x-5)^2}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\tan^3 2x}$