GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE DANS L'ESPACE

Le premier objectif de ce cours de géométrie dans l'espace est de développer et d'exercer votre faculté à voir dans l'espace et à réaliser des représentations planes de situations spatiales.

D'abord, vous allez étudier les règles fondamentales relatives aux droites et aux plans ainsi que les différentes positions relatives possibles de ces objets.

Les représentations sur un support plan d'objets à trois dimensions pouvant donner lieu à des illusions, vous apprendrez à les déceler et à en éviter les pièges.

Après une petite incursion dans le domaine artistique, vous étudierez les propriétés concernant le parallélisme de droites et de plans.

Ensuite, une importante partie du cours sera consacrée aux constructions. Celles-ci seront réalisées en *perspective cavalière* : des droites parallèles dans la réalité le seront aussi dans les dessins (notons déjà que des droites sécantes dans la réalité le seront aussi dans nos représentations, mais que l'inverse ne sera pas nécessairement vrai).
Vous apprendrez notamment à construire, selon des règles précises, le point de percée d'une droite dans un plan, la droite d'intersection de deux plans et des sections planes de solides.

La dernière partie sera consacrée à l'étude des propriétés de perpendicularité et d'orthogonalité.

Au travers de ce cours, nous poursuivrons un autre objectif important : l'apprentissage de la démonstration.

Dès que les régles fondamentales de géométrie de l'espace auront été énoncées, vous aurez déjà les outils pour prouver si deux droites sont sécantes, si des segments se coupent en leur milieu, si trois plans contiennent une même droite, etc. Parfois, il sera nécessaire de vous rappeler - ou de découvrir - des propriétés de géométrie plane. En effet, celles-ci restent toujours d'application dès que l'on travaille dans un certain plan de l'espace !

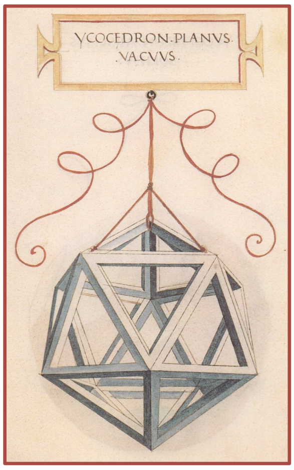
Les chapitres concernant le parallélisme et l'orthogonalité fourniront encore beaucoup d'occasions de démontrer : prouver, en utilisant les critères adéquats, l'éventuel parallélisme d'une droite et d'un plan, ou la perpendicularité de deux plans, etc.

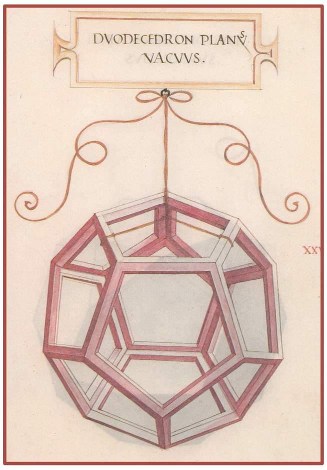
Quelques théorèmes célèbres seront démontrés (dont ceux de DESARGUES et de THALÈS).

Pour profiter pleinement de cette partie de votre cours de mathématique, quelque peu différente des autres car ne comportant pas (ou très peu) de calculs, veillez à ce que vos connaissances théoriques soient parfaites, exercez-vous au dessin, et faites travaillez votre bon sens, votre imagination et votre logique !

A. Vandenbruaene

(Mai 2016, version provisoire)





« La philosophie est écrite dans ce très vaste livre qui est éternellement ouvert devant nos yeux - je veux dire l'Univers - mais on ne peut le lire avant d'avoir appris la langue et s'être familiarisé avec les caractères dans lesquels elle est écrite. Elle est écrite en langue mathématique et ses lettres sont des triangles, des cercles et d'autres figures géométriques, moyens sans lesquels il est humainement impossible de comprendre un seul mot, sans lesquels on erre en vain dans un obscur labyrinthe. »

GALILÉE, *Il Saggiatore*, 1623

« (…) tu sais aussi qu'ils se servent de figures visibles et qu'ils raisonnent sur ces figures, quoique ce ne soit point à elles qu'ils pensent mais à d'autres auxquelles celles-ci ressemblent. Par exemple, c'est du carré en soi, de la diagonale en soi qu'ils raisonnent, et non de la diagonale telle qu'ils la tracent, et il faut en dire autant de toutes les autres figures. Toutes ces figures qu'ils modèlent ou dessinent, qui portent des ombres et produisent des images dans l'eau, ils les emploient comme si c'était aussi des images, pour arriver à voir ces objets supérieurs qu'on n'aperçoit que par la pensée. »

PLATON (428-347 av. J.-C.), *La République*, livre VI

1. Points, droites et plans

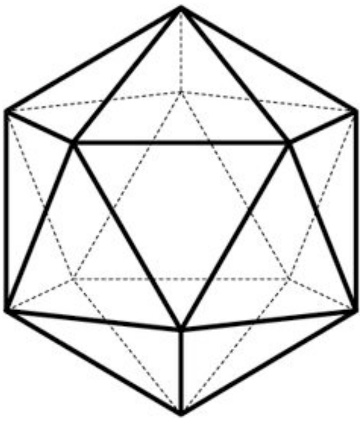
Quelques questions …

Notre étude de la géométrie de l'espace nous amènera tout naturellement à considérer des solides. Parmi ceux-ci, les polyèdres(*) *nous serons particulièrement utiles : leurs sommets, leurs arêtes et leurs faces nous permettront de visualiser des points, des droites et des plans.*

1. On appelle *icosaèdre* un polyèdre à vingt faces. Les faces d'un *icosaèdre régulier*, comme celui qui est représenté ci-dessous, sont des triangles équilatéraux isométriques.

   a) Connaissant le nombre de faces, expliquez comment *calculer* le nombre d'arêtes (il ne s'agit pas de passer son temps à les compter toutes !).

   b) Calculez ensuite le nombre de sommets.

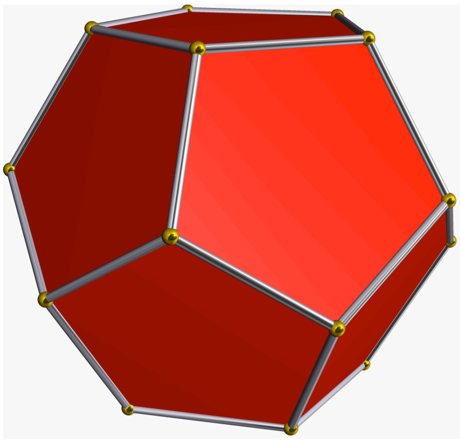


2. Les faces du polyèdre représenté ci-dessous sont des pentagones réguliers isométriques.

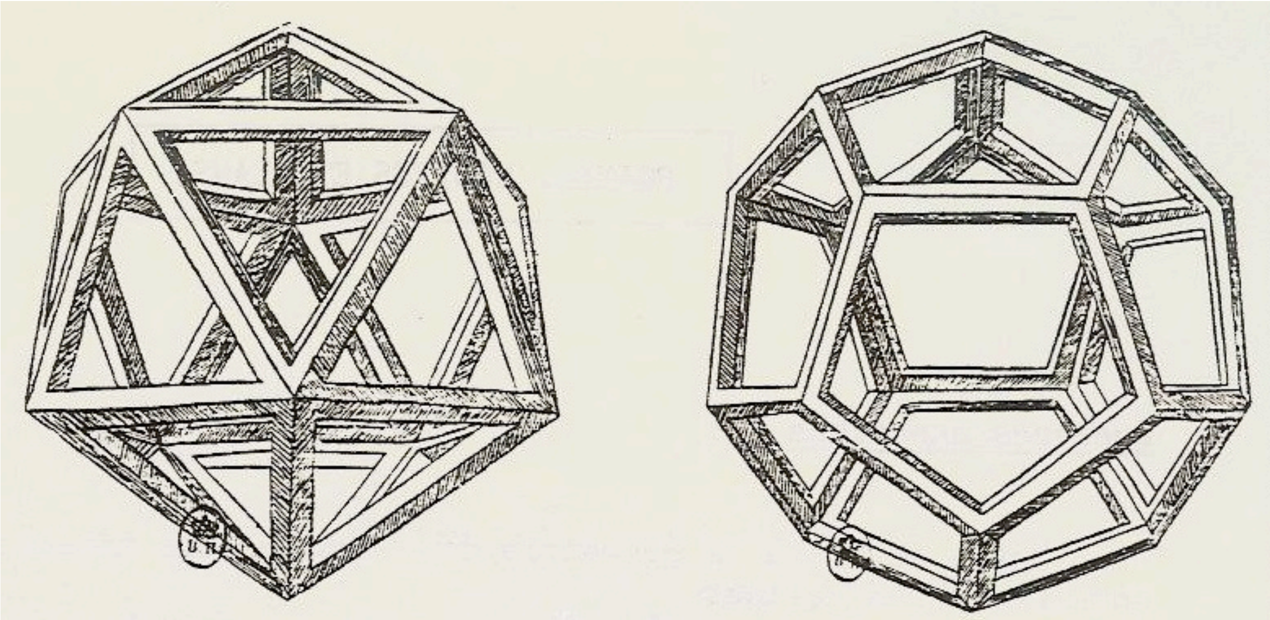
   a) Combien y en a-t-il ?

   b) Expliquez comment *calculer* le nombre d'arêtes et le nombre de sommets.

   c) Comment ce polyèdre s'appelle-t-il ?



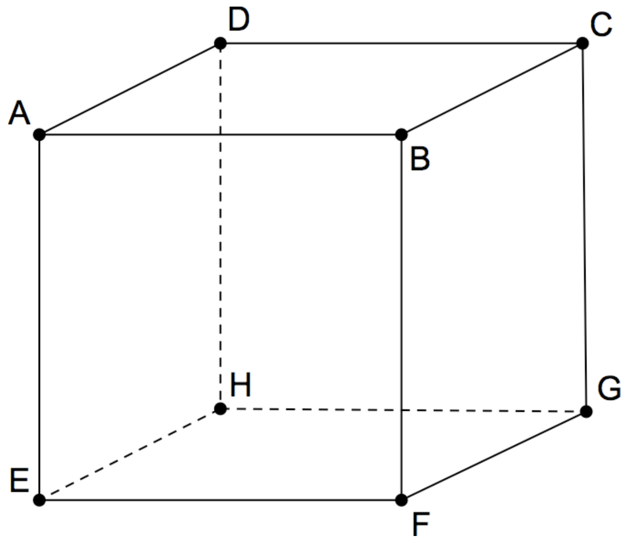
(*) Solide limité de toutes parts par des polygones plans.



Dessins réalisés par Léonard de VINCI pour « De divina proportione » , ouvrage écrit par Luca PACIOLI, entre 1496 et 1498, et publié pour la première fois à Venise en 1509.

« Dodécaèdres d'escalade » (Bergues, France)

Nous utiliserons souvent un polyèdre très familier : le cube (ou *hexaèdre régulier* !).



Répondez aux questions suivantes et référez-vous au cube pour donner des exemples.

3. Combien de points faut-il pour déterminer une droite ? Et un plan ? Exemples ?

4. Si une droite et un plan ont deux points distincts en commun, que pouvez-vous en conclure ? Exemples ?

5. Deux droites distinctes sont-elles toujours dans un même plan ? Exemples ?

6. Deux droites parallèles et distinctes sont-elles toujours dans un même plan ? Exemples ?

7. Une droite est un ensemble de points. En adoptant ce point de vue ensembliste, déterminez les intersections suivantes : $AD \cap GH$ et $AD \cap FG$.

8. Deux droites de l'espace n'ayant aucun point commun sont-elles nécessairement parallèles ?

Deux droites qui ne sont pas parallèles, et qui pourtant n'ont aucun point commun sont dites « gauches » (on dit aussi « droites qui se croisent »).

9. Comment définiriez-vous des droites parallèles ? Et des droites gauches ?

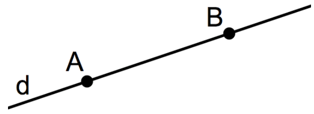
10. En observant le cube, déterminez toutes les positions relatives possibles dans l'espace
    a) de deux droites ;
    b) d'une droite et d'un plan ;
    c) de deux plans.

    Dans chaque cas, donnez un exemple et précisez l'intersection.

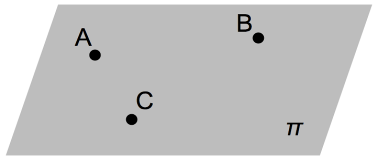
2. Définitions et énoncés de base

2.1. Règles fondamentales

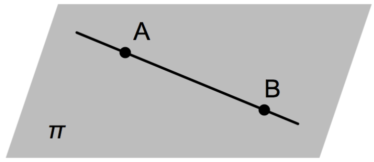
R1 Deux points déterminent une seule droite.



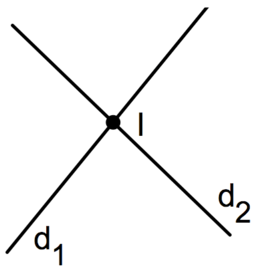
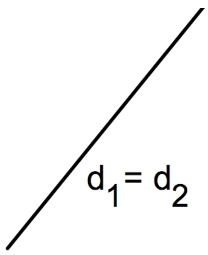
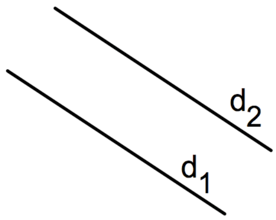
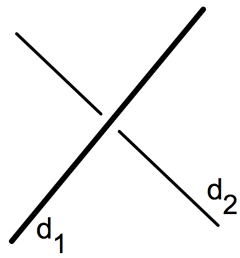
R2 Trois points non alignés déterminent un seul plan (détermination principale d'un plan).



R3 Une droite comprenant deux points d'un plan est incluse dans ce plan.



2.2. Positions relatives de deux droites

Coplanaires			Non coplanaires
	Parallèles		
			
Sécantes	Confondues	Parallèles distinctes	Gauches
$d_1 \cap d_2 = \{I\}$	$d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2$	$d_1 \cap d_2 = \varnothing$	$d_1 \cap d_2 = \varnothing$

Voici deux définitions :

D1 Deux droites sont dites **parallèles** si

1° elles sont contenues dans un même plan ET
2° elles n'ont aucun point commun ou sont confondues

D2 Deux droites sont dites **gauches** si elles n'ont aucun point commun ET si elles ne sont pas contenues dans un même plan (c'est-à-dire qu'il n'existe aucun plan contenant simultanément ces deux droites).

Nous admettrons la règle suivante :

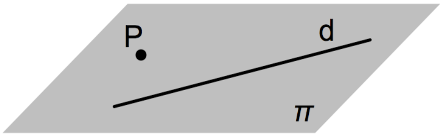
R4 (axiome d'Euclide dans l'espace)

Il existe une seule droite comprenant un point donné et parallèle à une droite donnée.

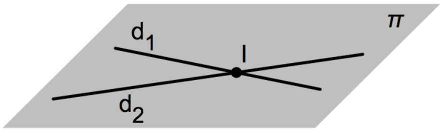
Après la règle 2 (détermination principale d'un plan), voici d'autres façons de déterminer un plan.

<u>Déterminations secondaires d'un plan</u>

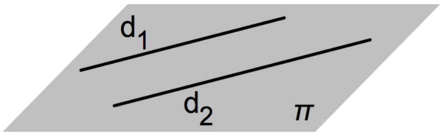
R7 Une droite et un point extérieur à cette droite déterminent un seul plan.



R8 Deux droites sécantes déterminent un seul plan.



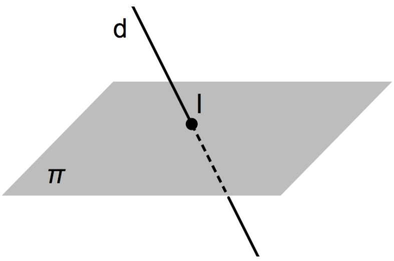
R9 Deux droites parallèles et distinctes déterminent un seul plan.

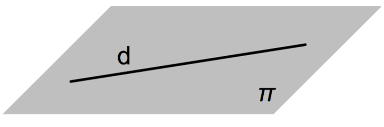


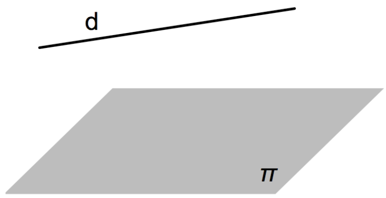
Une variante de la règle 8 nous sera utile :

R10 Deux droites non parallèles incluses dans un même plan sont sécantes.

2.3. Positions relatives d'une droite et d'un plan

<table>
<tr><td rowspan="2">


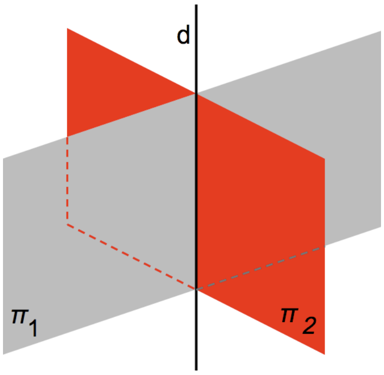
SÉCANTS
(la droite perce le plan)
$d \cap \pi = \{I\}$</td><td colspan="2">PARALLÈLES</td></tr>
<tr><td>


DROITE INCLUSE
DANS LE PLAN
$d \cap \pi = d$</td><td>


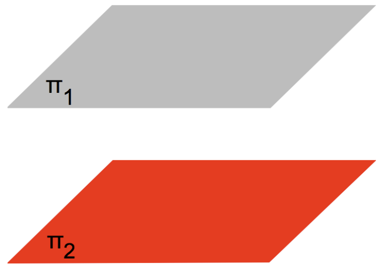
PARALLÈLES ET DISJOINTS
$d \cap \pi = \varnothing$</td></tr>
</table>

D3 Une droite est dite parallèle à un plan si elle est contenue dans ce plan, ou si elle n'a aucun point commun avec ce plan.

2.4. POSITIONS RELATIVES DE DEUX PLANS

<table>
<tr><td rowspan="2">

SÉCANTS
$\pi_1 \cap \pi_2 = d$</td><td colspan="2">PARALLÈLES</td></tr>
<tr><td>

CONFONDUS
$\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1 = \pi_2$</td><td>

PARALLÈLES DISTINCTS
$\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$</td></tr>
</table>

D4 Deux plans sont dits parallèles s'ils n'ont aucun point commun ou s'ils sont confondus.

R5 L'intersection de deux plans sécants est une droite.

Nous admetrons encore l'axiome d'EUCLIDE relatif aux plans :

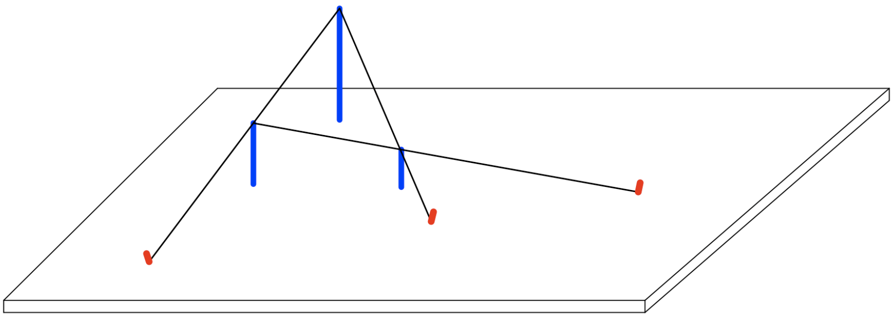
R6 Il existe un seul plan comprenant un point donné et parallèle à un plan donné.

2.5. Exercices

1. Quel est le plus grand nombre de plans que peuvent déterminer six points de l'espace ?

2. Combien de régions de l'espace deux plans peuvent-ils déterminer ? Et trois plans ? Illustrez tous les cas possibles !

3. Plantez verticalement trois bâtonnets de hauteurs différentes dans une plaque de frigolite. Par les sommets de deux bâtonnets, faites passer une ficelle, tendez-la et fixez-la dans la plaque à l'aide d'une punaise. Placez ainsi trois ficelles.

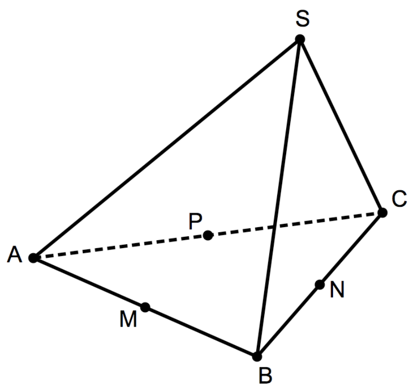


   a) Si votre construction est bien réalisée, les trois punaises doivent être alignées ! Expliquez cela à l'aide des propriétés connues.

   b) Que devient la droite reliant les punaises si l'on raccourcit chaque bâtonnet d'une même longueur ?

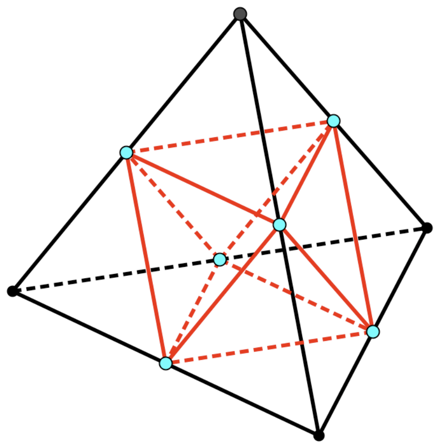
4. Soit un tétraèdre quelconque $SABC$ et soient les points M, N et P, milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

   Démontrez que les plans SAN, SBP et SCM contiennent une même droite.



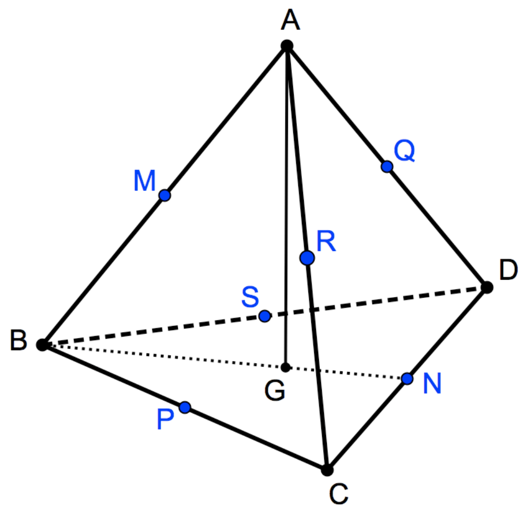
5. Un tétraèdre régulier possède quatre faces qui sont des triangles équilatéraux isométriques.

   Démontrez que les milieux des côtés d'un tétraèdre régulier sont les sommets d'un octaèdre régulier (c'est-à-dire d'un polyèdre régulier ayant huit faces qui sont d'autres triangles équilatéraux isométriques).



6. Démontrez que, dans un tétraèdre régulier d'arête a, les centres de gravité de chacune des faces sont les sommets d'un tétraèdre régulier. Déterminez ensuite la mesure de l'arête de ce tétraèdre en fonction de a.

7. Soient le tétraèdre $ABCD$ et les points M, N, P, Q, R et S les milieux des arêtes, et G le centre de gravité de la face BCD.



a) Démontrez que MN et AG sont deux droites sécantes.

b)
- Comparez les aires des triangles AMN et AGN à l'aire du triangle ABN.
- Comparez les aires des triangles AGN et BMN et en déduire que MN et AG se coupent aux ¾ de $[AG]$ à partir de A.
- En complétant le parallélogramme dont trois sommets sont M, A et N, démontrez que AG coupe $[MN]$ en son milieu.

c) De manière analogue, démontrez que PQ et AN se coupent au milieu de $[PQ]$ et aux ¾ de $[AN]$ en son milieu.

d) En déduire que les segments dont les extrémités sont les milieux des arêtes deux à deux gauches se coupent en leur milieu et que leur point commun est aux ¾ de chacun des segments dont les extrémités sont un sommet et le centre de gravité de la face opposée.

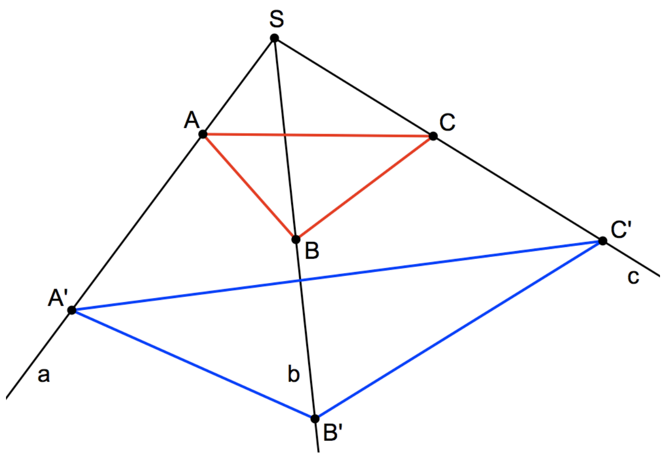
2.6. LE THÉORÈME DE DESARGUES

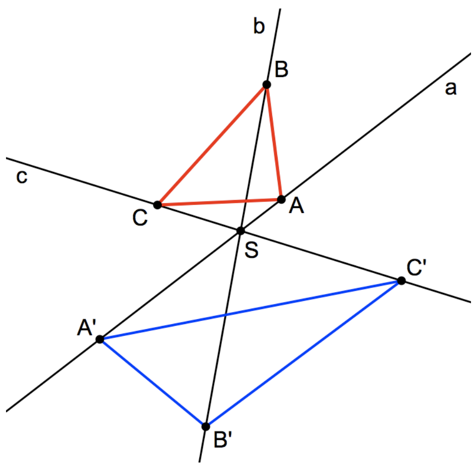
Girard DESARGUES (1591 - 1661) est un géomètre, architecte et ingénieur militaire français. Après des études d'architecture, il devient conseiller du Cardinal de RICHELIEU et du gouvernement français. On pense notamment qu'il participa au siège de LA ROCHELLE en 1627.

En géométrie, DESARGUES s'intéresse à la perspective et aux propriétés qui sont invariantes par changement de plan d'incidence. Il peut être considéré comme le père de la géométrie projective.

Son théorème concerne des triangles homologiques, c'est-à-dire des triangles dont les sommets appartiennent deux à deux à trois droites concourantes.

Dans chacune des deux figures suivantes, les triangles ABC et $A'B'C'$ sont homologiques car les droites $a = AA'$, $b = BB'$ et $c = CC'$ concourent au point S.





Envisageons d'abord le cas où les droites a, b et c ne sont pas coplanaires.

Propriété préliminaire

Les droites qui contiennent deux côtés homologues de deux triangles homologiques sont soit sécantes, soit parallèles.

<u>Démonstration</u>

Les droites a et b étant sécantes au point S, elles déterminent un plan. Ce plan contient les points A, A', B et B' et il contient donc aussi les droites AB et $A'B'$. Ces droites étant coplanaires, elles sont donc sécantes ou parallèles.

On prouve de la même façon que les droites AC et $A'C'$ sont sécantes ou parallèles, et que les droites BC et $B'C'$ sont sécantes ou parallèles.

Théorème de DESARGUES

Si les droites qui contiennent les côtés homologues de deux triangles homologiques sont deux à deux sécantes, les trois points d'intersection sont alignés.

Premier cas : les droites a, b et c ne sont pas coplanaires.

<u>Hypothèse</u>

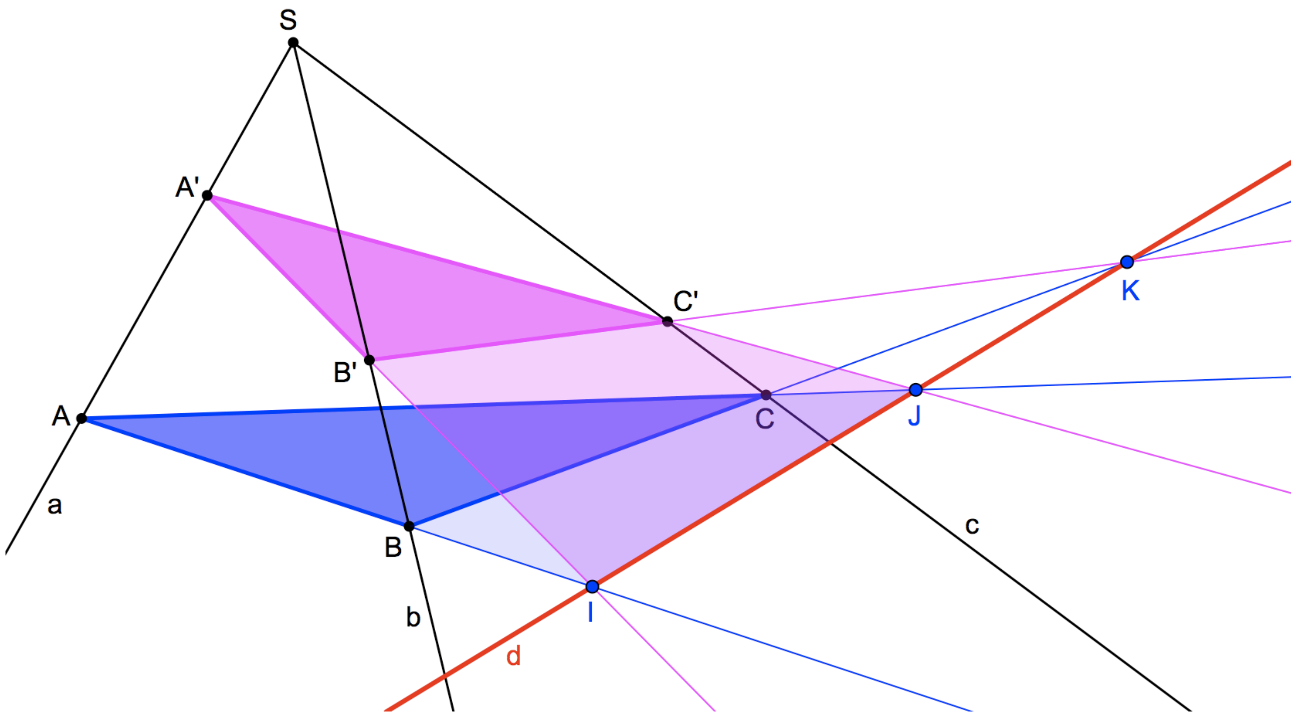
- Triangles homologiques ABC et $A'B'C'$ ($AA' \cap BB' = AA' \cap CC' = BB' \cap CC' = \{S\}$).
- $AB \cap A'B' = \{I\}$, $AC \cap A'C' = \{J\}$ et $BC \cap B'C' = \{K\}$.

<u>Thèse</u>

Les points I, J et K sont alignés.

<u>Démonstration</u>

Les triangles donnés déterminent deux plans $\alpha = ABC$ et $\beta = A'B'C'$. Ces plans sont sécants en vertu de la deuxième hypothèse. Soit d leur droite d'intersection : $\alpha \cap \beta = d$.
Les droites AB et $A'B'$ étant contenues respectivement dans a et dans b , leur point d'intersection I appartient à la fois à α et à β . Donc : $I \in \alpha \cap \beta$, c'est-à-dire $I \in d$.
Le même raisonnement pour les droites AC et $A'C'$ permet de conclure que $J \in d$.
Et enfin, le même raisonnnement pour les droites BC et $B'C'$ permet de conclure que $K \in d$.
Finalement, les points I, J et K sont alignés car ils appartiennent tous trois à d .



Deuxième cas : les droites a, b et c sont coplanaires.

Démonstration : exercice.

Indications

- Représentez deux triangles homologiques coplanaires ABC et A'B'C'.
- Construisez les points I, J et K tels que $AB \cap A'B' = \{I\}$, $AC \cap A'C' = \{J\}$ et $BC \cap B'C' = \{K\}$.
- Vérifiez l'alignement de I, J et K sur une droite d.
- Pour la démonstration, considérez un point S extérieur au plan contenant les deux triangles.

Réciproque du théorème de DESARGUES

Deux triangles tels que les droites qui contiennent les côtés se coupent deux à deux en trois points alignés sont tels que les trois droites comprenant les sommets homologues sont concourantes.

Démonstration : exercice.

3. ILLUSIONS

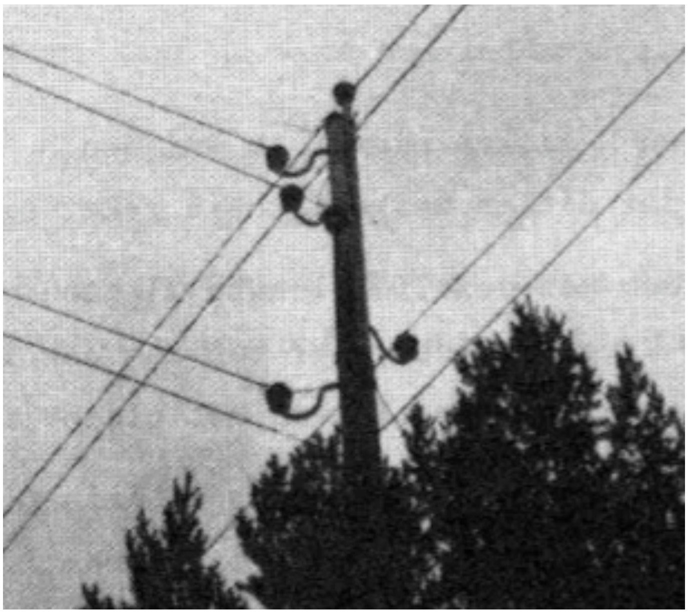
« Le sens de la vue est le plus illusoire »

BUFFON

Naturaliste français (1707 - 1788), auteur de l'*Histoire naturelle*

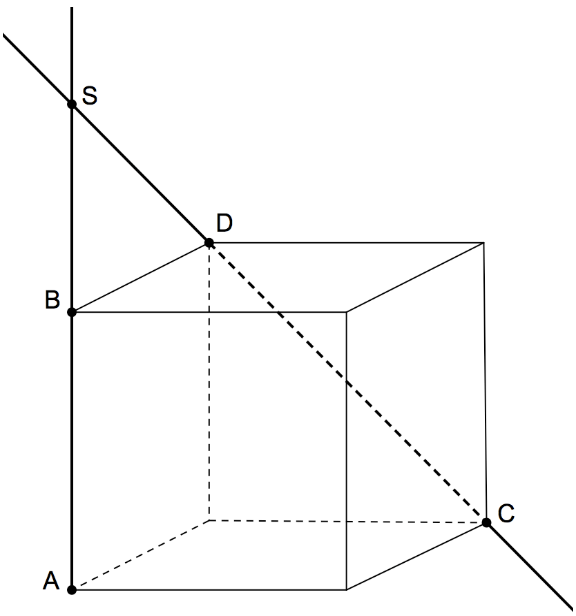
3.1. DES PIÈGES À ÉVITER …

1. Certains fils électriques que l'on voit sur cette photo délimitent un petit quadrilatère.
   Est-ce bien vrai ? Expliquez.

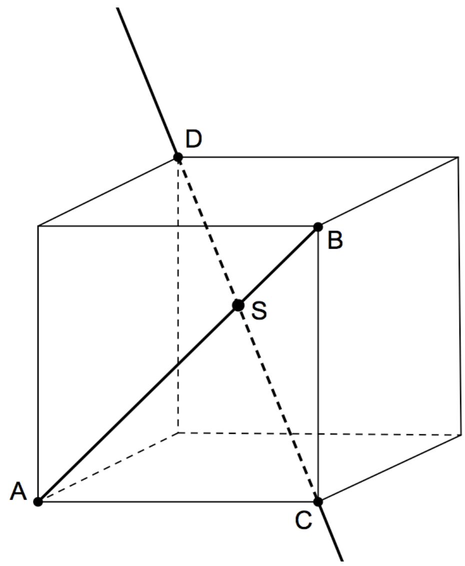


2. Dans chacune des situations suivantes, les lettres A, B, C et D désignent un sommet ou un point d'une arête d'un cube. La droite AB rencontre-t-elle la droite CD, ou n'est-ce qu'une illusion ? Justifiez votre réponse.

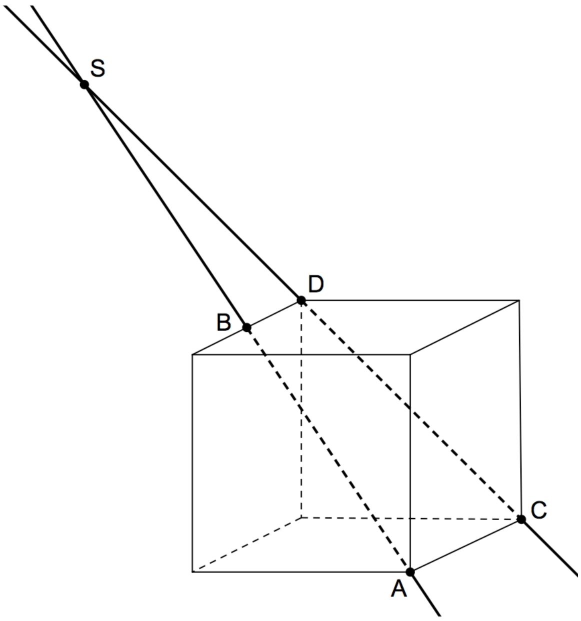
①

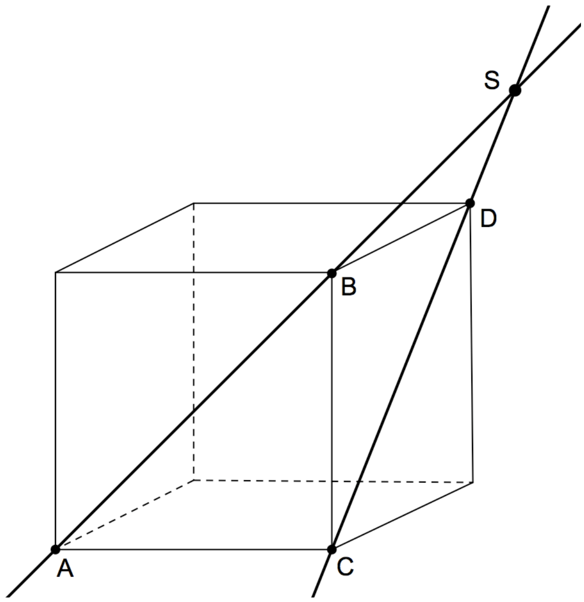


②



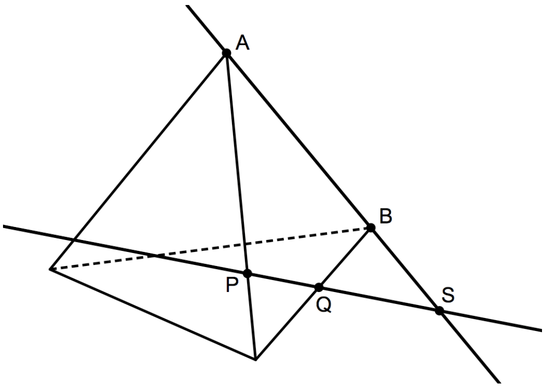
③ ④



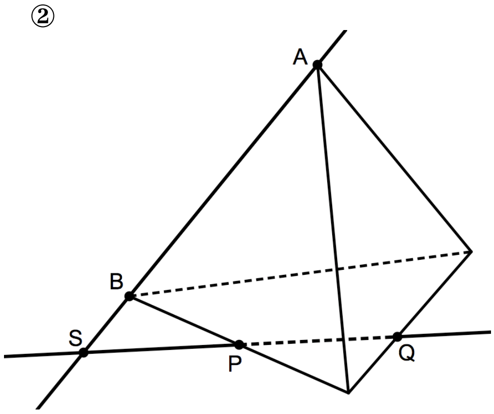


3. Mêmes problèmes avec des tétraèdres. Les points A et B sont deux sommets du solide, tandis que les points P et Q appartiennent à l'une de ses arêtes.

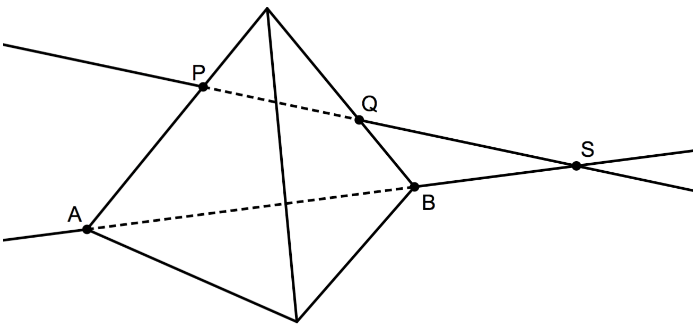
①



②



③

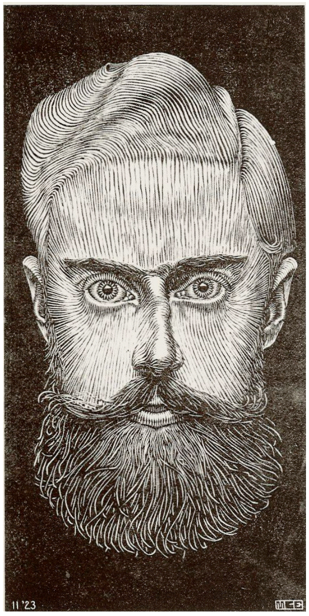


3.2. L'ILLUSION DANS L'ART

La représentation plane d'objets tridimensionnels peut donner lieu à des illusions. Par exemple, des droites parallèles ou gauches dans la réalité semblent parfois se rencontrer sur une photo ou sur un dessin.

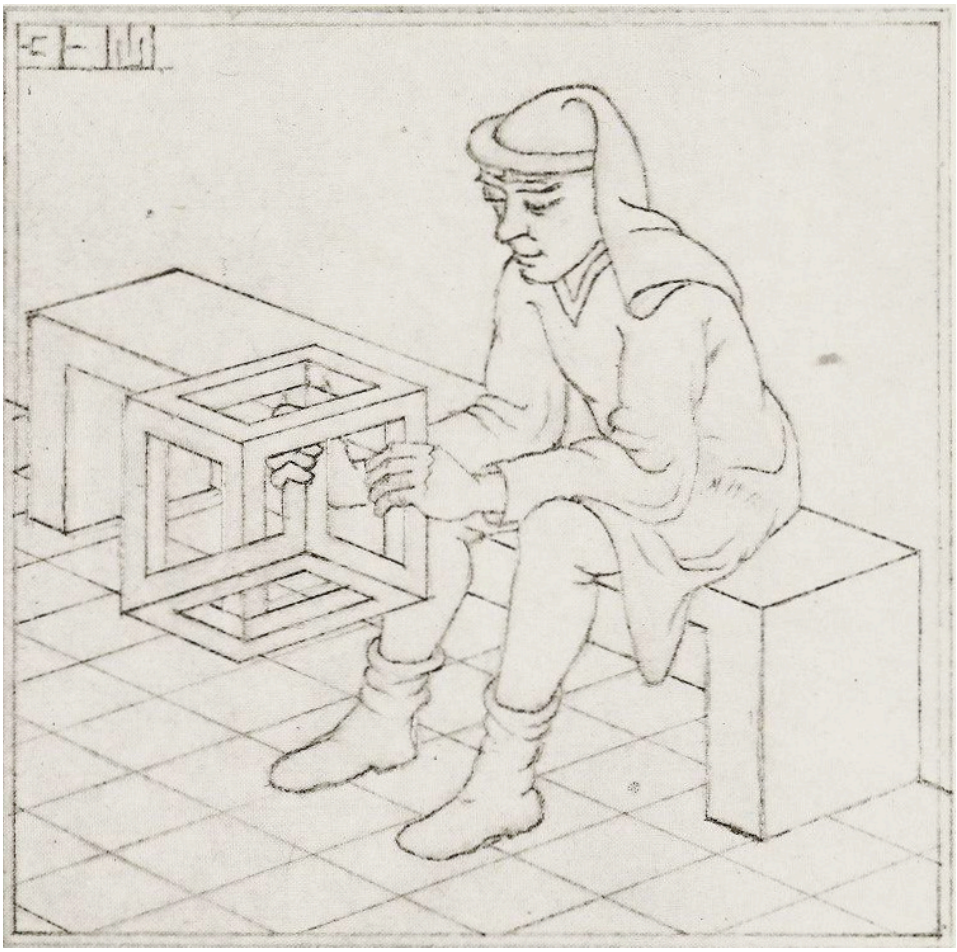
L'artiste hollandais Maurits Cornelis ESCHER (1898 - 1972) a très habilement exploité ces confusions dans bon nombre de dessins, gravures et peintures.

Découvrons ci-dessous quelques-une de ses œuvres.

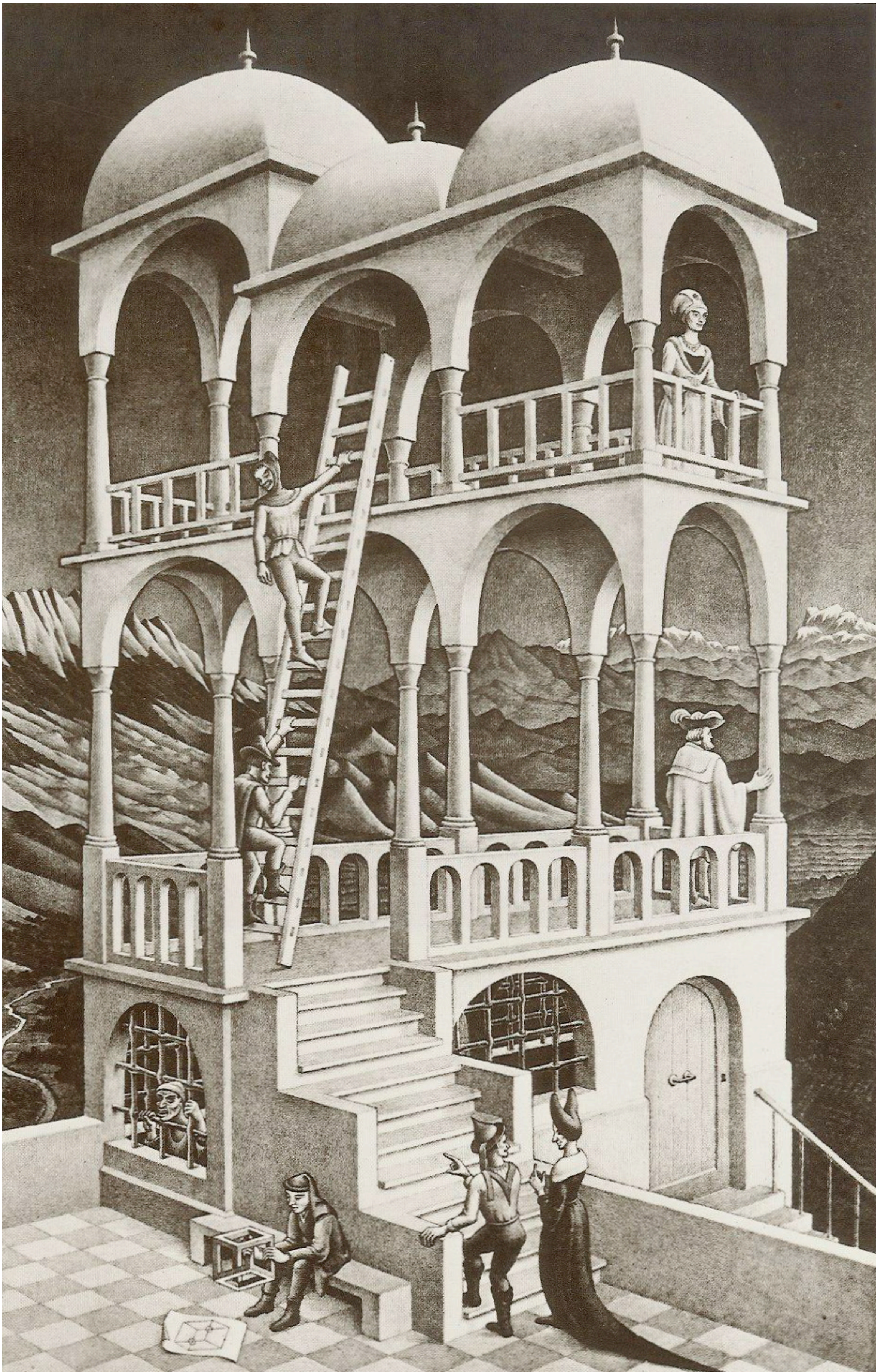


M. C. ESCHER, *Autoportrait*, xylogravure, 1923

1. Le personnage représenté ci-dessous tient dans ses mains un cube (?) . Qu'y a-t-il de changé par rapport à la façon habituelle de représenter un cube ? Voyez aussi la gravure « Belvédère » à la page suivante. Expliquez ce qu'a fait l'artiste pour créer l'illusion.

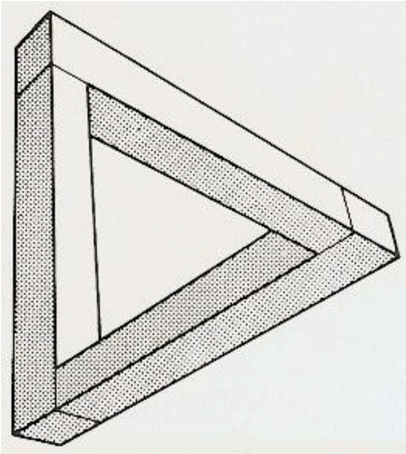


Étude pour la lithographie « Belvédère » (1958)

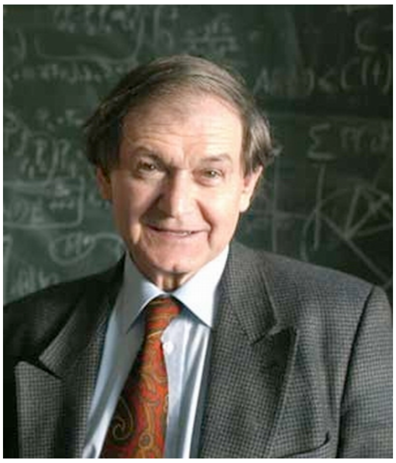


« Belvédère » (1958)

2. L'objet représenté ci-dessous à droite est connu sous le nom de triangle de PENROSE.
   D'un point de vue géométrique, quest-ce-qui cloche ici ?

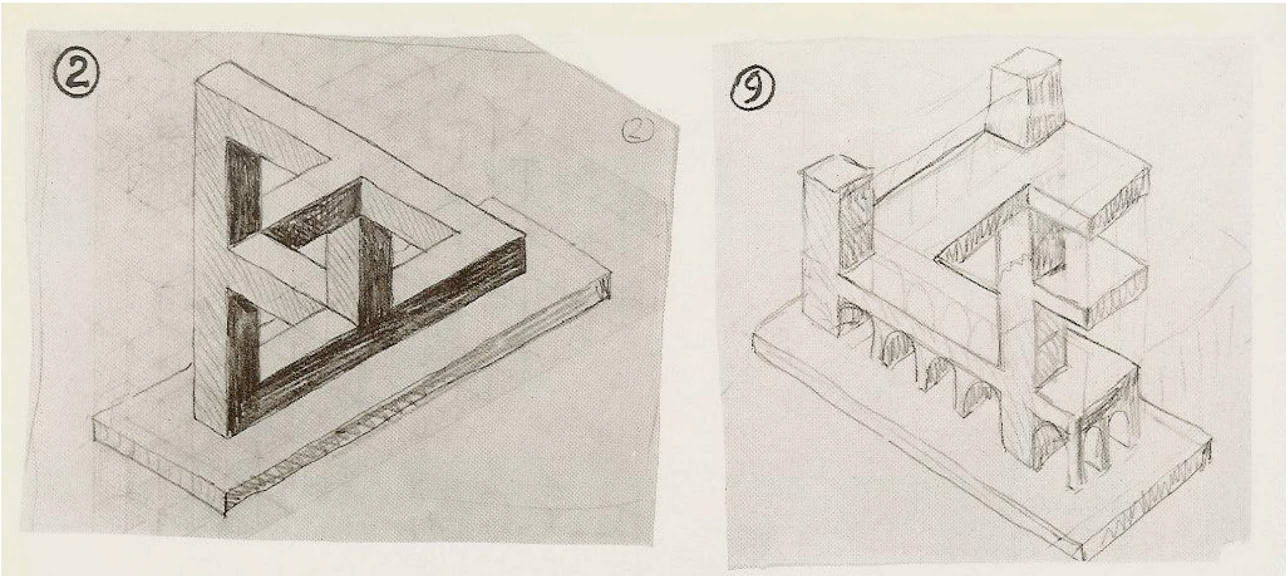


Le triangle « impossible »

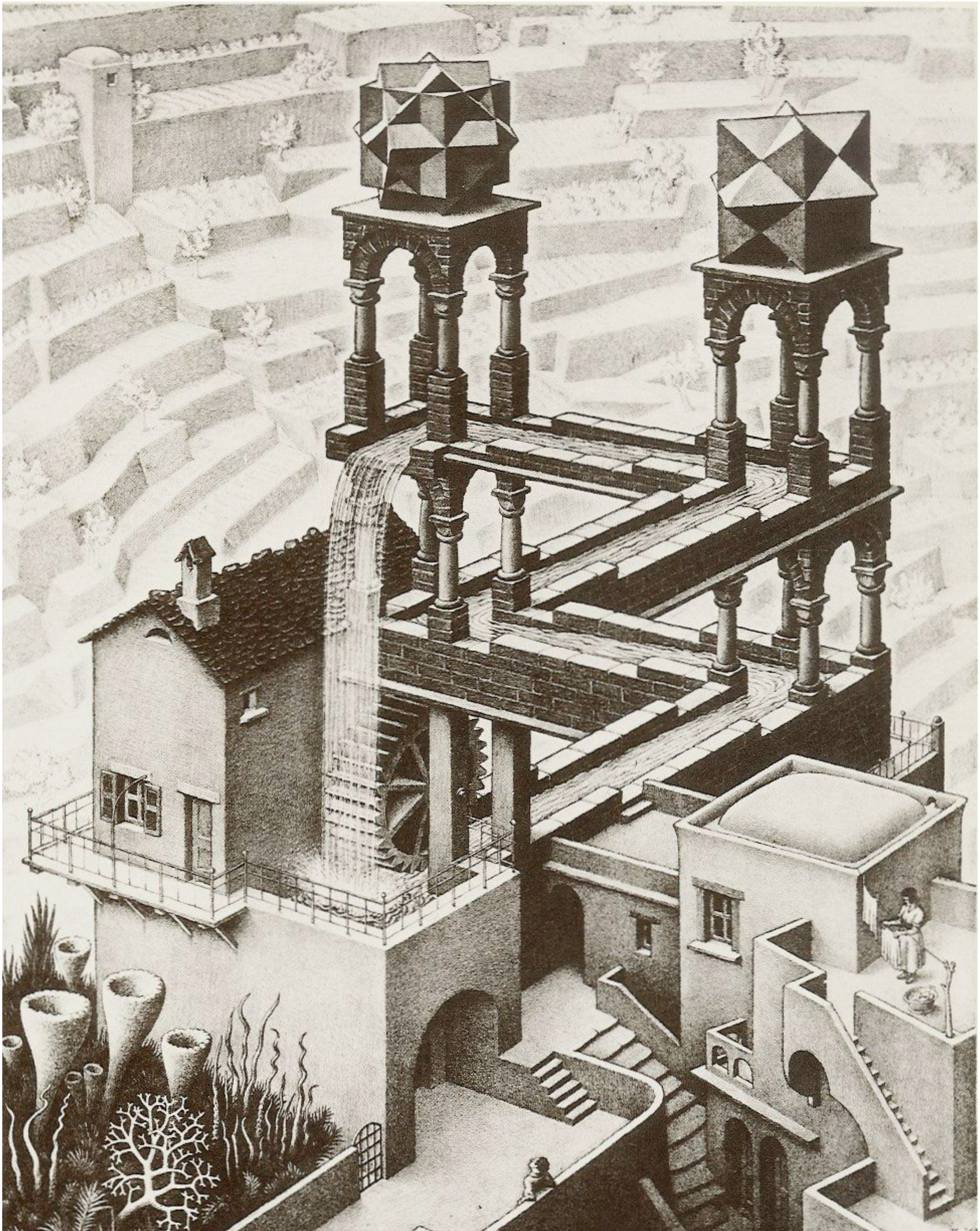


Roger PENROSE en 2007. Né en 1931, ce mathématicien et physicien britannique est l'auteur de nombreux travaux en astrophysique et en cosmologie, et d'ouvrages scientifiques pour le grand public. Il s'interroge notamment sur le lien entre conscience de la réalité et physique quantique.

3. Pour composer la gravure « Mouvement perpétuel » , ESCHER a repris l'idée de PENROSE. Comparez les dessins préparatoires (surtout le ②) avec la gravure elle-même (page suivante).



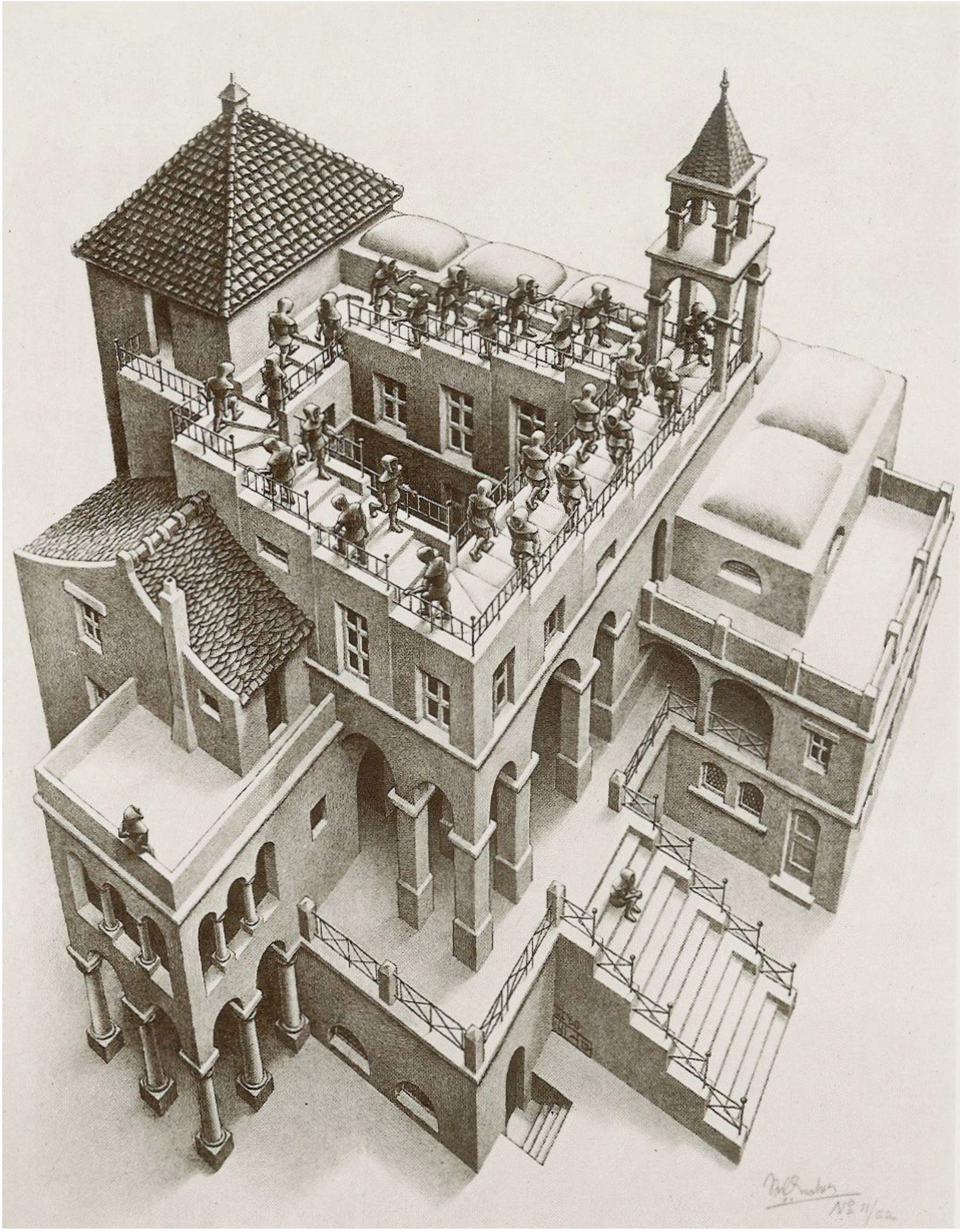
Études pour la lithographie « Mouvement perpétuel » (1961)



« Mouvement perpétuel » (1961)

4. Dans le même ordre d’idées que le triangle impossible, voici une drôle de construction !
Il s’agit encore d’une lithographie de M. C. ESCHER.

Expliquez ce qui vous semble bizarre …



« Montée et descente » (1960)

4. PARALLÉLISME

4.1. QUELQUES QUESTIONS POUR ABORDER LE PARALLÉLISME…

Justifiez et illustrez vos réponses !

1. Vrai ou faux ?
   a) Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.
   b) Deux droites parallèles à un même plan sont parallèles entre elles.
   c) Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.

2. On donne une droite d contenue dans un plan π. Pour chacune des affirmations suivantes, dites si elle est vraie ou fausse.
   a) toute droite gauche avec d est parallèle à π ;
   b) toute droite parallèle à d est parallèle à π.

3. Existe-il des droites parallèles à deux plans sécants ? Si oui, précisez votre réponse.

4. Deux droites d_1 et d_2 sont contenues dans un plan π. Une droite d_3, qui n'est pas contenue dans π, coupe d_1 et est parallèle à d_2. Si c'est possible, représentez cette situation.

5. On donne un plan π et un point P extérieur à π. Combien y a-t-il de droites comprenant P et parallèles à π ? Si l'on réunit toutes ces droites, qu'obtient-on ?

6. On donne une droite d et un point P extérieur à d. Combien y a-t-il de plans comprenant P et parallèles à d ? Donnez une caractéristique commune à tous ces plans.

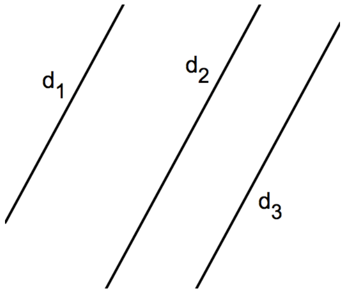
7. Vrai ou faux ?
   a) Si deux droites sont parallèles, un plan parallèle à l'une peut être sécant à l'autre.
   b) Si deux plans sont parallèles, toute droite incluse dans l'un est parallèle à toute droite incluse dans l'autre.
   c) Si deux plans sont parallèles, toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

8. Deux plans parallèles en coupent un troisième. Que pouvez-vous dire des droites d'intersection ?

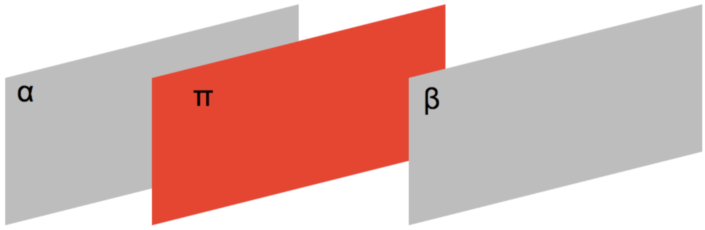
9. On donne deux plans π_1 et π_2. Pour chacune des affirmations suivantes, dites si elle est vraie ou fausse.
   a) Si π_1 contient une droite parallèle à π_2, alors π_1 est parallèle à π_2.
   b) Si π_1 contient deux droites parallèles à π_2, alors π_1 est parallèle à π_2.
   c) Si π_1 contient deux droites sécantes, chacune d'elles étant parallèle à π_2, alors π_1 est parallèle à π_2.

4.2. PROPRIÉTÉS CONCERNANT LE PARALLÉLISME

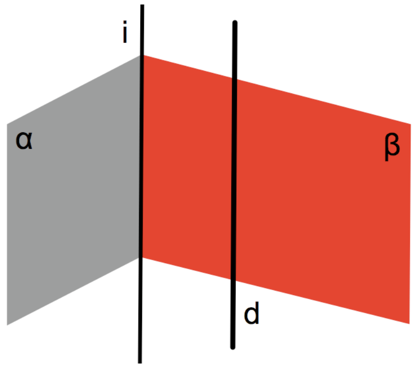
PA-1 Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.



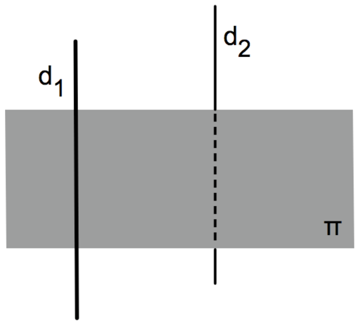
PA-2 Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.



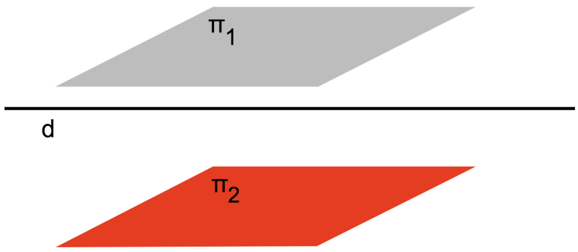
PA-3 Toute droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur intersection.



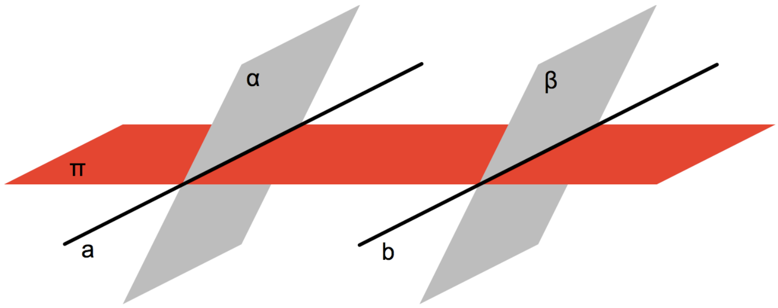
PA-4 Si deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre.



PA-5 Si deux plans sont parallèles, toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre.



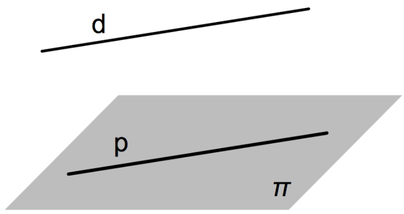
PA-6 Les intersections de deux plans parallèles par un troisième plan qui coupe les deux premiers sont deux droites parallèles.



4.3. Critères de parallélisme

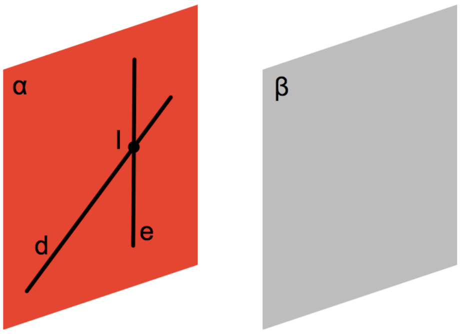
Critère de parallélisme d'une droite et d'un plan

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si cette droite est parallèle à une droite contenue dans ce plan.



Critère de parallélisme de deux plans

Deux plans sont parallèles si et seulement si l'un contient deux droites sécantes parallèles à l'autre.

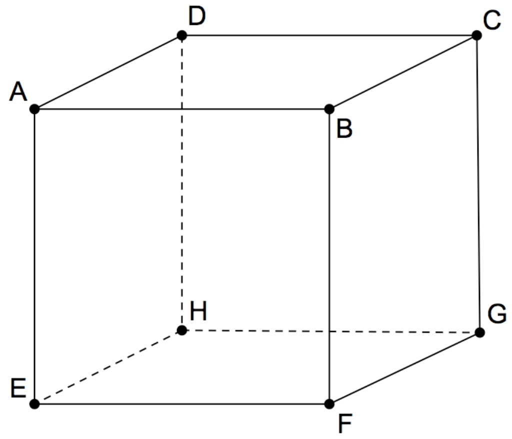


4.4. EXERCICES

1. Soit le cube ABCDEFGH.

   a) Déterminez quatre droites comprenant le point F et parallèles au plan DEH. Justifiez.

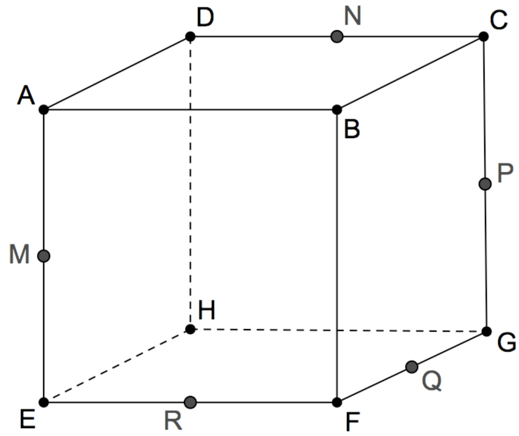
   b) Déterminez trois plans comprenant le point F et parallèles à la droite ED. Justifiez.



2. Dans le cube représenté ci-contre, les points M, N, P, Q et R sont les milieux des arêtes auxquelles ils appartiennent.

   a) Démontrez que MN est parallèle à PR.

   b) Démontrez que NR est parallèle à PQ.



3. Soit un parallélogramme ABCD de centre O. Soit un point quelconque P et Q son symétrique par rapport à O.

   a) Démontrez que PA est parallèle à QC.

   b) Démontrez que les plans PAB et QCD sont parallèles.

4. Soient deux plans sécants α et β. Démontrez que si a et b sont deux droites parallèles incluses respectivement dans α et β, alors la droite d'intersection des deux plans est parallèle aux droites a et b (cette propriété est connue sous le nom de **théorème du toit**).

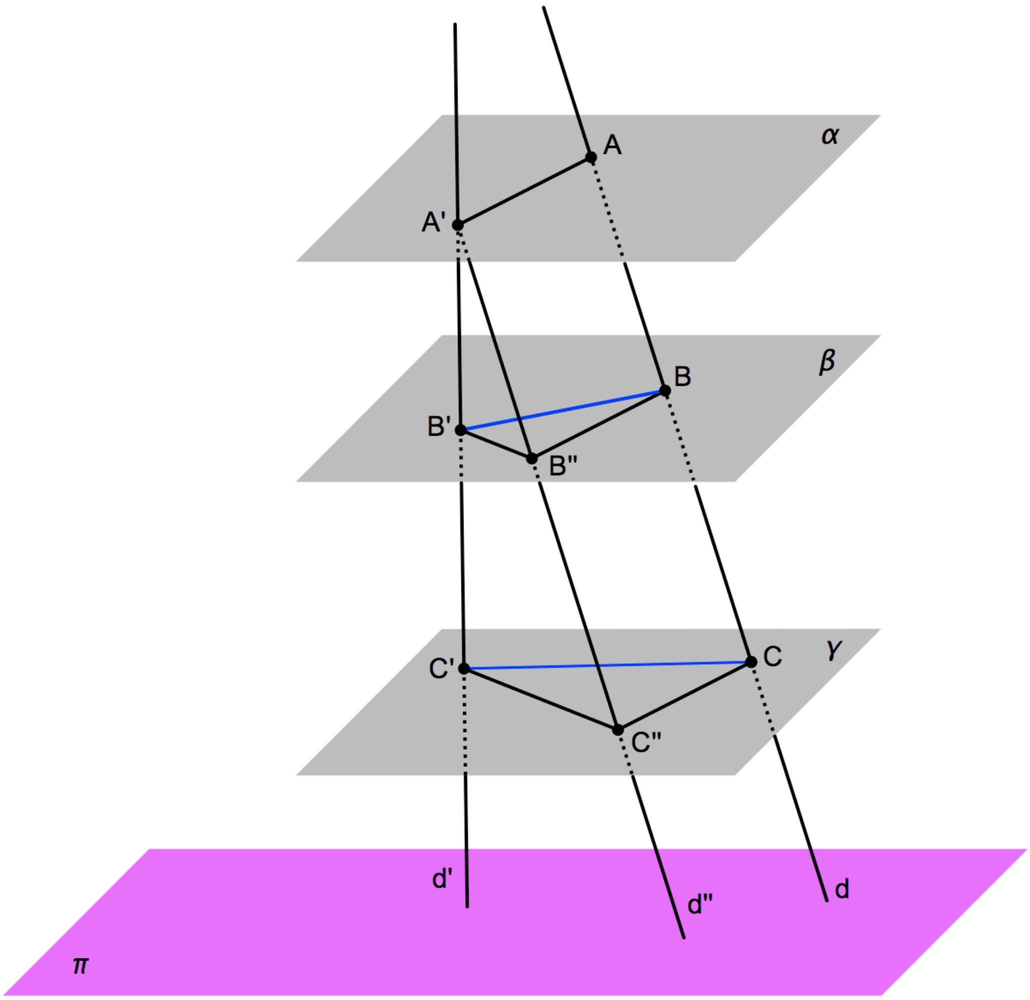
5. Démontrez que les segments joignant les milieux des arêtes gauches d'un tétraèdre se coupent en leur milieu.

4.5. Le théorème de Thalès

Considérons un plan π et deux droites d et d' qui ne sont pas parallèles à π.

Soient trois points A, B et C de la droite d. Projetons ces points sur la droite d', parallèlement au plan π : nous obtenons les points A', B' et C' (notons bien que les droites AA', BB' et CC' ne sont pas nécessairement parallèles entre elles, mais qu'elles sont toutes trois parallèles à π).

Ensuite, considérons les plans α, β et γ, parallèles au plan π, et comprenant respectivement les points A, B et C. Ces plans coupent la droite d' en A', B' et C'.



Théorème de Thalès

Toute projection d'une droite sur une droite parallèlement à un plan conserve le rapport des longueurs de deux segment.

Nous allons démontrer que $\dfrac{|A'C'|}{|A'B'|} = \dfrac{|AC|}{|AB|}$.

Démonstration

Soit d'' la droite parallèle à d et comprenant A'. La droite d'' coupe les plans β et γ respectivement en B'' et C''.

Les droites parallèles d et d'' déterminent un plan. Celui-ci coupe les plans parallèles α et β suivant deux droites parallèles (propriété PA-6) : $AA' \mathbin{//} BB''$.
Le quadrilatère $AA'B''B$ est donc un parallélogramme et nous en déduisons que $|A'B''| = |AB|$ (1).
Par un raisonnement analogue, nous trouvons que $|A'C''| = |AC|$ (2).

Considérons maintenant les droites sécantes d' et d''. Elles déterminent un plan qui coupe les plans parallèles β et γ suivant deux droites parallèles $B'B''$ et $C'C''$ (propriété PA-6).
Appliquons le théorème de THALÈS dans le plan $d'd''$: $\dfrac{|A'C'|}{|A'B'|} = \dfrac{|A'C''|}{|A'B''|}$.

Tenant compte des égalités (1) et (2), nous obtenons bien $\dfrac{|A'C'|}{|A'B'|} = \dfrac{|AC|}{|AB|}$.

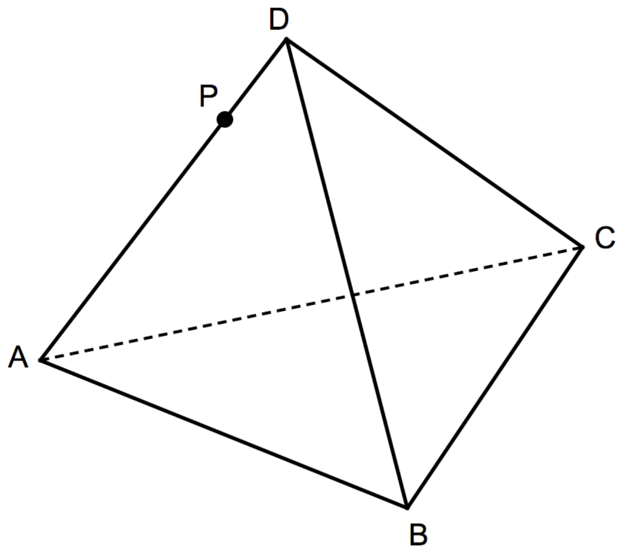
Exercice

Soit le tétraèdre $ABCD$ et le point P de $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AP} = \dfrac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AD}$.

a) Représentez le plan π comprenant P et parallèle aux droites AC et BD.

b) Le plan π coupe les droites AB, CD et BC respectivement en Q, R et S.

- $\dfrac{|AQ|}{|AB|}$
- $\dfrac{|CR|}{|DR|}$
- $\dfrac{|BS|}{|BC|}$



5. CONSTRUCTIONS DANS L'ESPACE

- Construire le point de percée d'une droite dans un plan
- Construire la droite d'intersection de deux plans
- Construire la section d'un solide par un plan

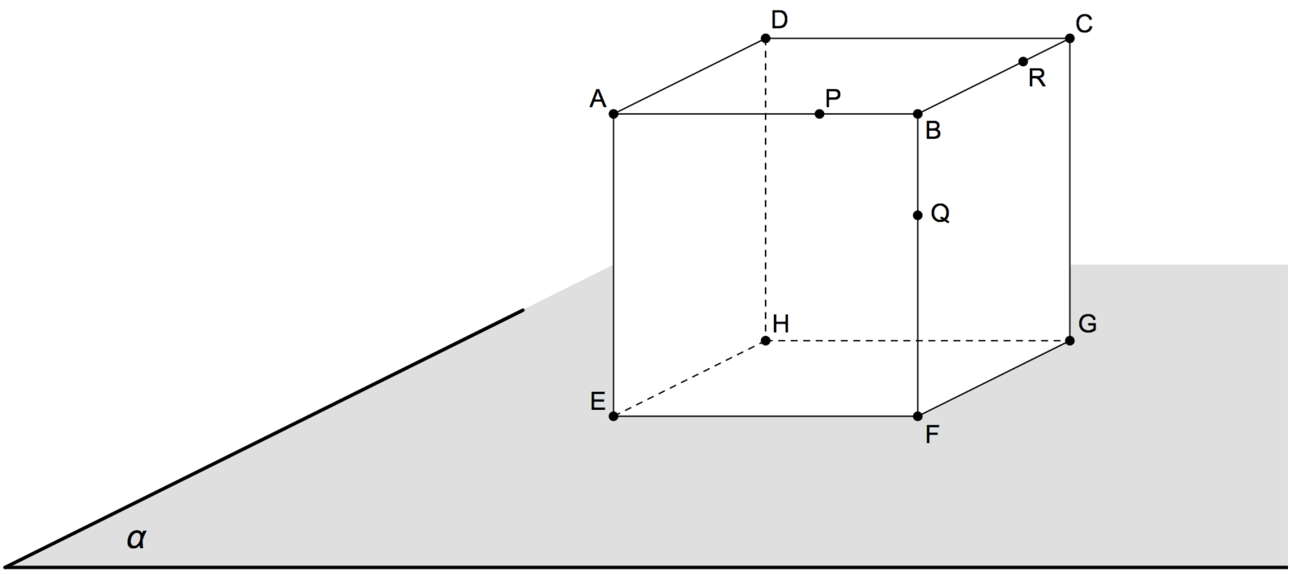
… Voilà le genre de problèmes que nous allons traiter maintenant.

Pour réaliser et justifier nos constructions, nous devrons utiliser des propriétés connues (il faudra penser aux règles fondamentales concernant les points, droites et plans, les positions relatives et le paralléllisme).
Toutes les représentations planes des formes spatiales que nous allons utiliser seront réalisées en projections parallèles (*perspective cavalière*). De cette façon, des droites parallèles (ou sécantes) dans la réalité, seront aussi parallèles (ou sécantes) sur le dessin. Il ne restera plus qu'à se méfier des illusions créées par les droites gauches !

5.1. POINT DE PERCÉE D'UNE DROITE DANS UN PLAN

Voici d'emblée quelques problèmes. Nous décrirons une procédure plus tard.

1. Voici le cube $ABCDEFGH$ posé sur le plan $\alpha = EFG$.
   On donne encore trois points P, Q et R tels que $P \in [AB]$, $Q \in [BF]$ et $R \in [BC]$.



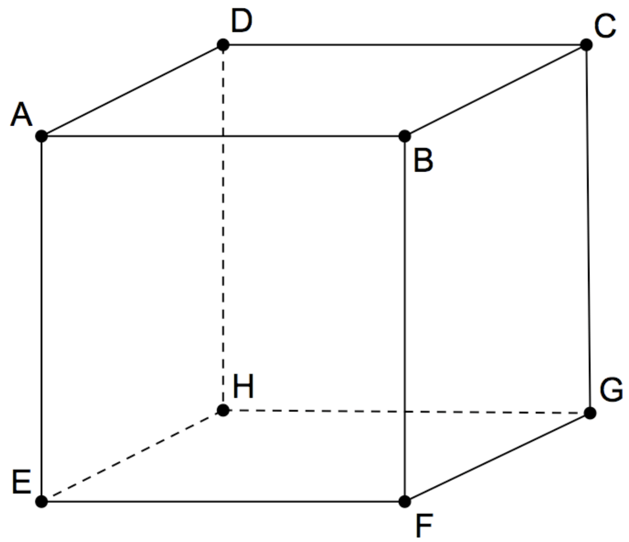
a) Construisez le point de percée de la droite PQ dans le plan α.

b) Construisez le point de percée de la droite QR dans le plan α.

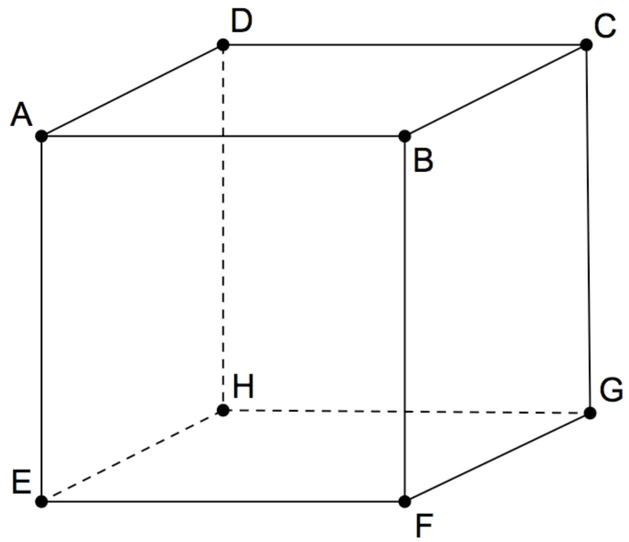
c) Déduisez-en la droite d'intersection des plans PQR et α. Construisez-la.

2. Dans le cube, appelons « plan diagonal » un plan tel que $CDEF$.

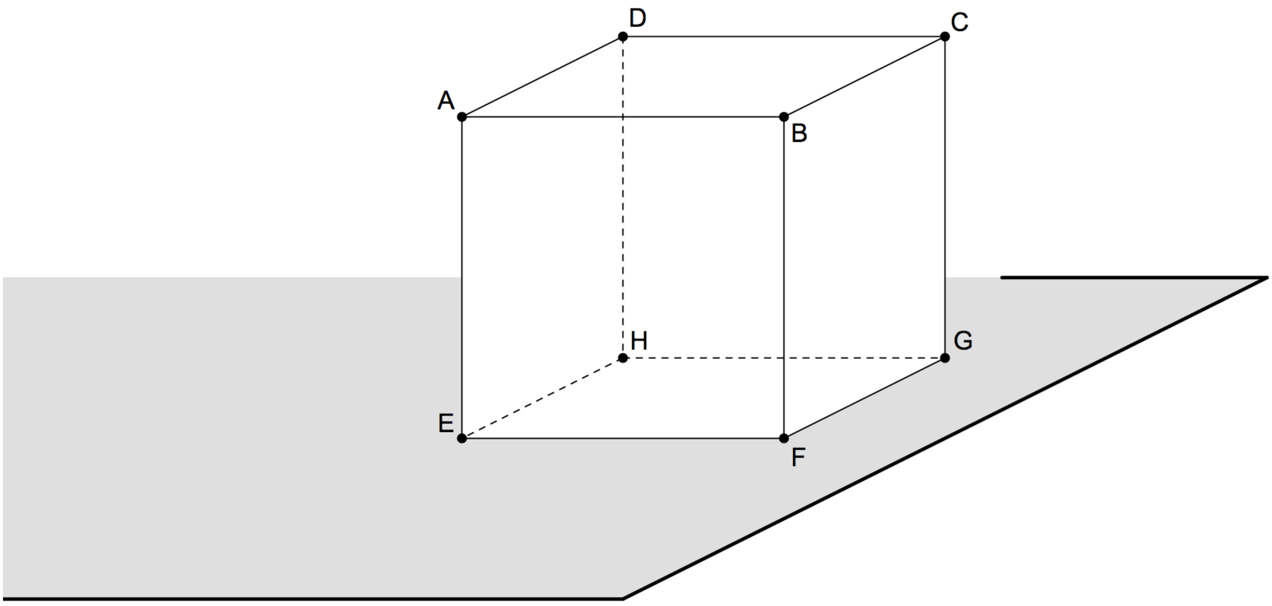
a) Quels sont les plans diagonaux contenant la droite AG ? Représentez-les ci-dessous en utilisant différentes couleurs.



b) Construisez le point de percée de la droite AG dans le plan EBD .
<u>Suggestion</u> : utilisez un des plans diagonaux contenant AG .

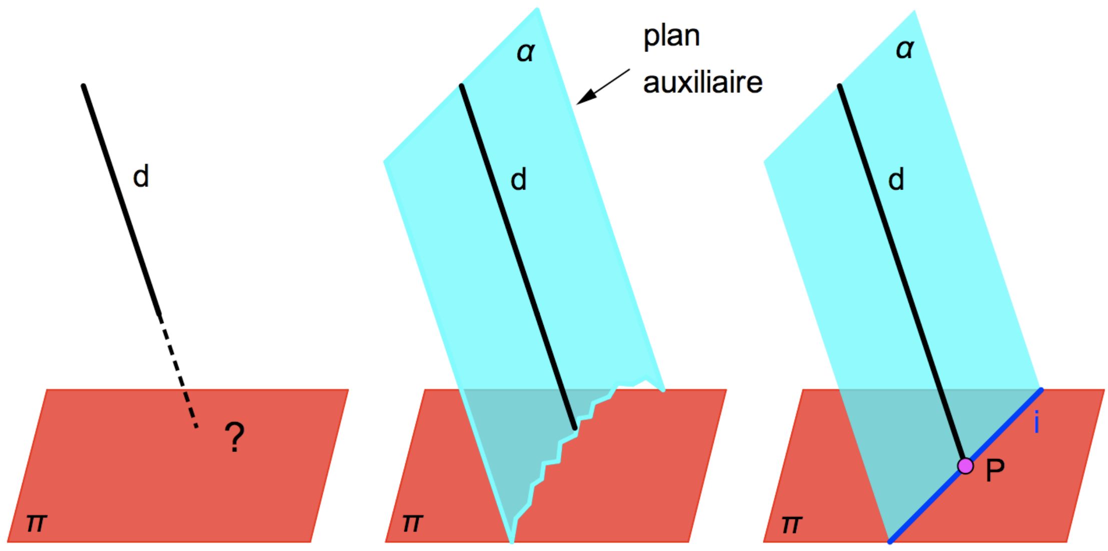


3. Le cube est de nouveau posé sur le plan α. Soit M le centre de la face ADHE.
Construisez le point de percée de la droite BM dans le plan α.



Démarche pour construire un point de percée

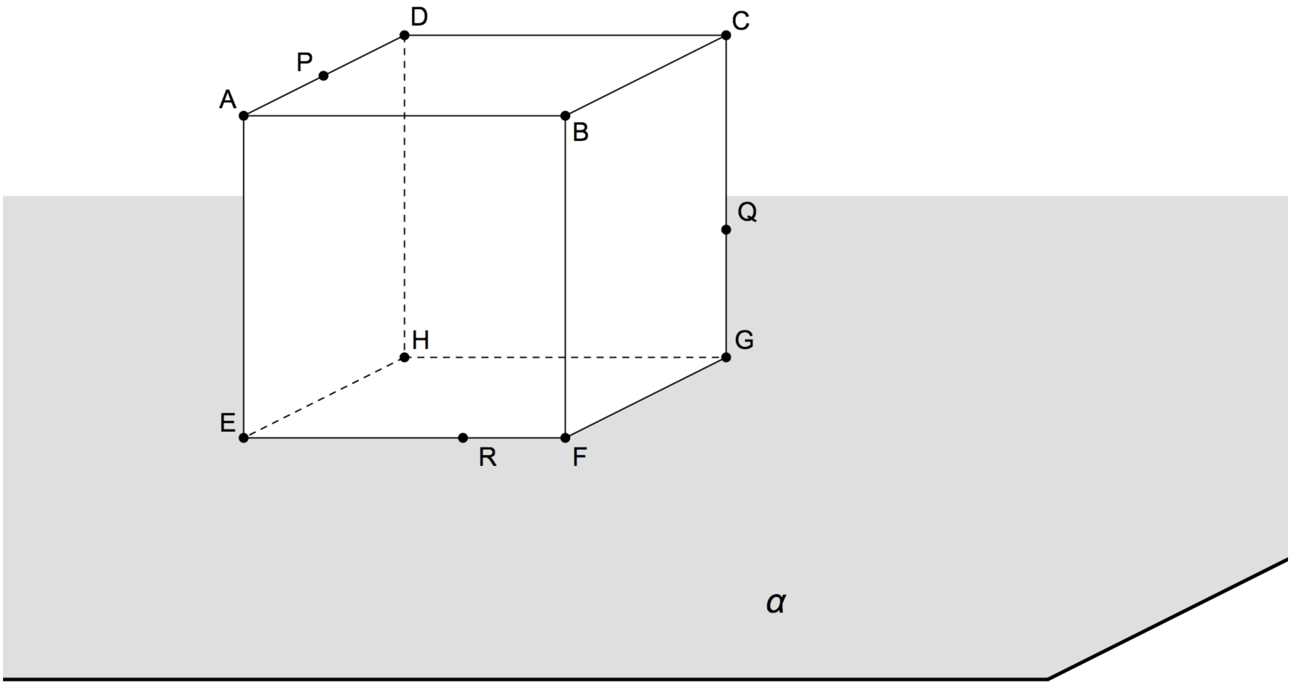
Pour construire le point de percée d'une droite d dans un plan π, il est souvent utile de considérer un plan auxiliaire α contenant d et sécant avec π.
Le point de percée se trouve alors sur la droite d'intersection du plan auxiliaire et de π.



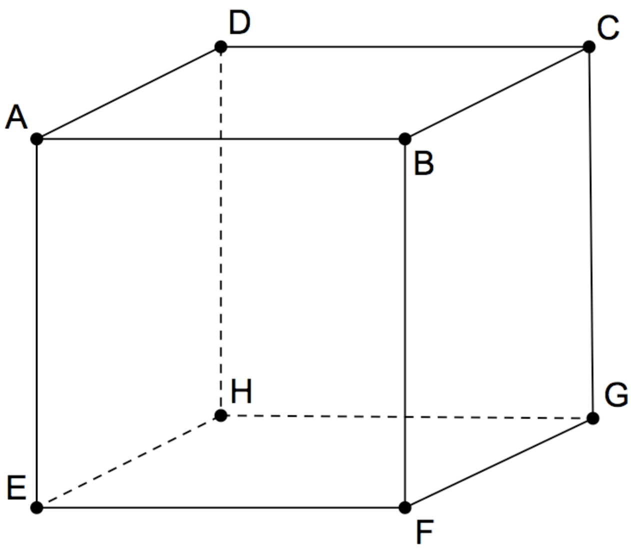
4. Soit le cube $ABCDEFGH$ posé sur le plan $\alpha = EFG$. Soient les points $P \in [AD]$, $Q \in [CG]$ et $R \in [EF]$.

   a) Construisez le point de percée de la droite PQ dans le plan α.

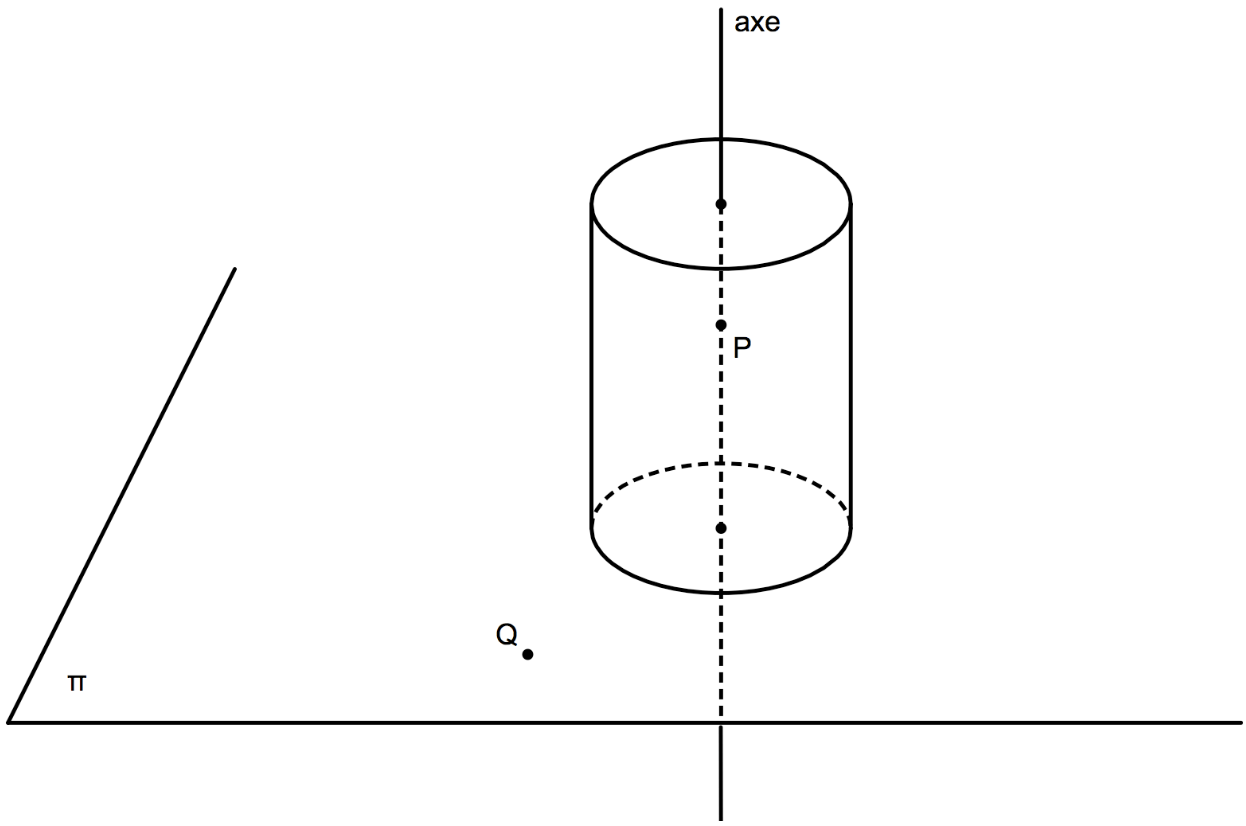
   b) Construisez les points de percée respectifs des droites EH, GH et DH dans le plan PQR.



5. Un observateur, de taille minuscule par rapport à celle du cube , se trouve au point E.
   Il lui semble que les droites DF et BG sont sécantes (alors que …). Cela est dû au fait que la « ligne de visée » de l'observateur rencontre ces deux droites. Construisez cette ligne de visée.



6. Un cylindre droit est posé sur un plan π (de telle façon que l'axe du cylindre soit perpendiculaire au plan π). On donne le point P sur l'axe du cylindre et le point Q appartenant à π.
   Construisez les points de percée de la droite PQ dans la surface cylindrique.



Pensez maintenant aux propriétés relatives au parallélisme et dessinez vous-mêmes les situations décrites.

7. On donne deux plans parallèles α et β et deux droites d_1 et d_2 sécantes au point P.
   Soient A_1 et B_1 les points de percée respectifs de d_1 dans α et β.
   Soit A_2 le point de percée de d_2 dans α.
   Construisez le point de percée B_2 de d_2 dans β.

8. Soient les plans parallèles α, β et γ, et deux droites gauches d_1 et d_2.
   Soient A_1, B_1 et C_1 les points de percée respectifs de d_1 dans α, β et γ.
   Soient A_2 et B_2 les points de percée respectifs de d_2 dans α et β.
   Construisez le point de percée C_2 de d_2 dans γ.

   <u>Indication</u> : utilisez une droite auxiliaire.

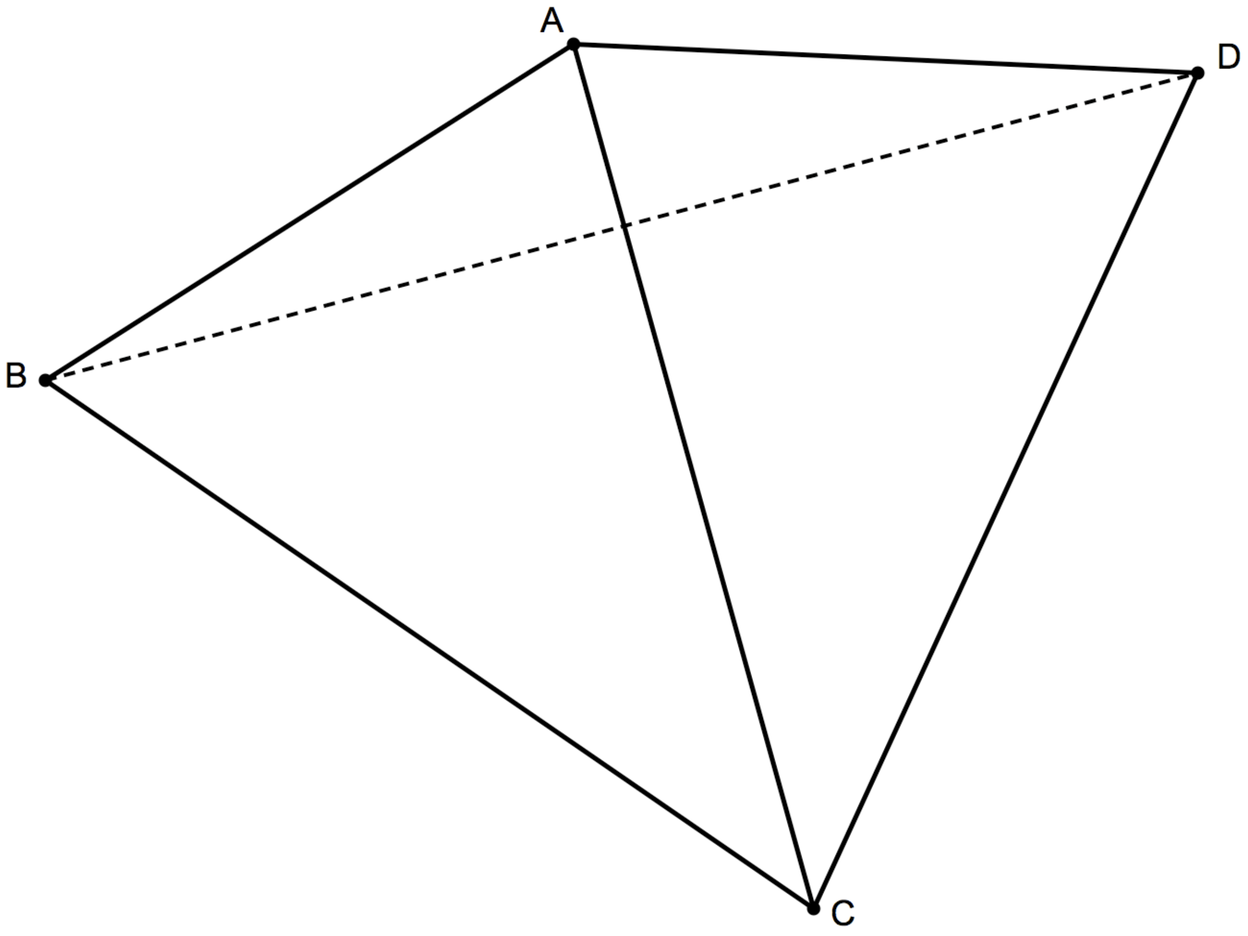
9. Soit le tétraèdre $ABCD$, et soient les points P, Q, R et S, milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[AC]$, $[DC]$ et $[DB]$.

   a) Prouvez que les droites PQ et RS sont parallèles.

   b) Les droites PQ et RS étant parallèles, les points P, Q, R et S sont coplanaires. Soit α le plan correspondant. Prouvez que α est parallèle aux droites AD et BC.

   c) Soient les points T et U les milieux respectifs des arêtes $[AD]$ et $[BC]$.
   Il existe trois plans différents contenant quatre des milieux des arêtes du tétraèdre : le plan α était l'un d'eux.
   Quels sont les deux autres (β et γ) ? Dessinez-les.

   d) Construisez le point commun aux plans α, β et γ.



5.2. DROITE D'INTERSECTION DE DEUX PLANS

Démarche pour construire la droite d'intersection de deux plans.

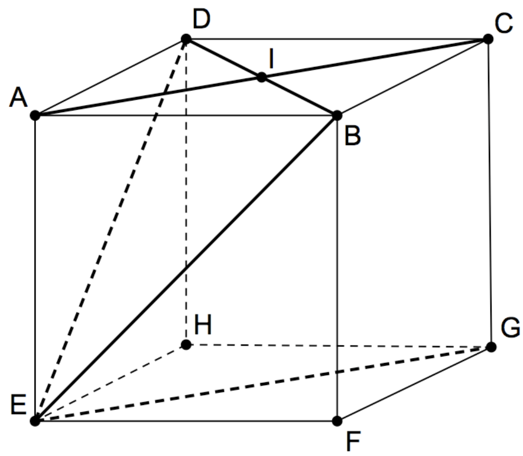
L'idée est simple : il faut trouver deux points communs aux deux plans. La droite déterminée par ces deux points est aussi la droite d'intersection des deux plans.

Prenons un exemple.

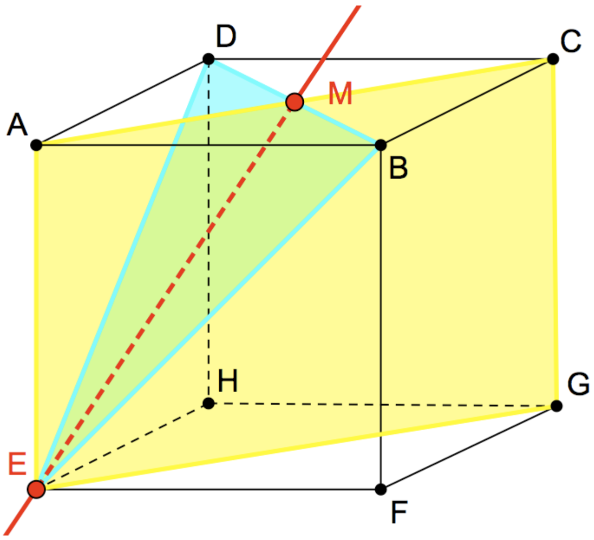
Soit le cube $ABCDEFGH$. Déterminez la droite d'intersection des plans $ACGE$ et BDE.

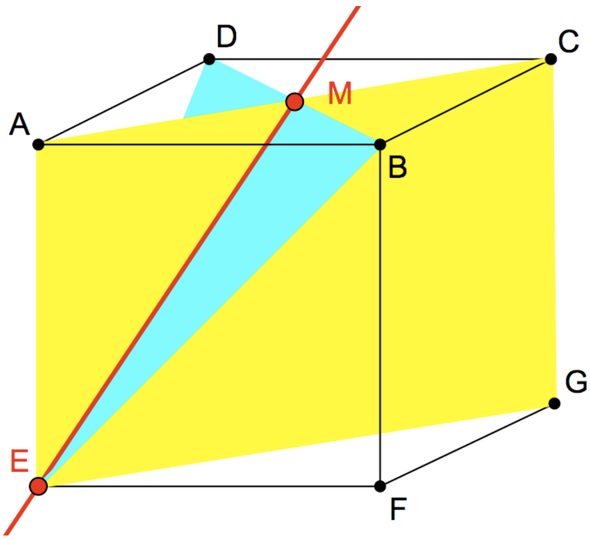
Le premier point commun est évident : c'est E.
Le second est à l'intersection des droites AC et BD : c'est le point I, au centre d'une face du cube.

La droite cherchée est EI : $ACGE \cap BDE$.



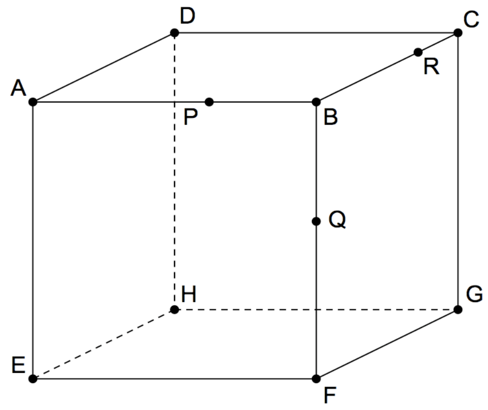
Pour visualiser les deux plans sécants et leur droite d'intersection, voici deux représentations, l'une « translucide » , l'autre « opaque ».



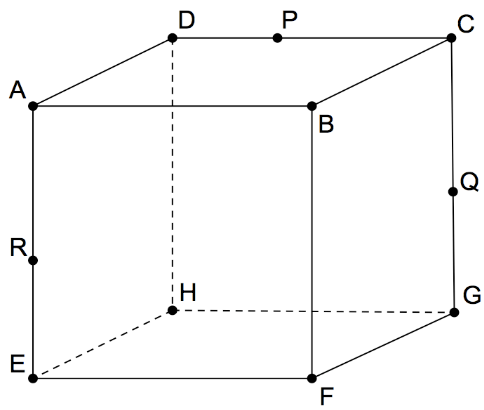


Exercices

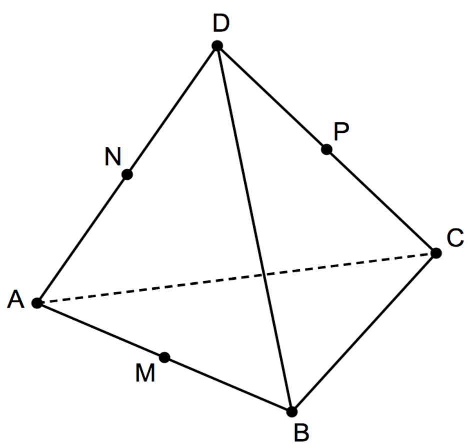
1. Sur le cube $ABCDEFGH$, on donne les points $P \in [AB]$, $Q \in [BF]$ et $R \in [BC]$. Construisez la droite d'intersection des plans PQR et $DBFH$.



2. Sur le cube $ABCDEFGH$, on donne les points $P \in [CD]$, $Q \in [CG]$ et $R \in [AE]$. Construisez la droite d'intersection des plans PQR et $EFGH$.



3. Sur le tétraèdre $ABCD$, on donne les points $M \in [AB]$, $N \in [AD]$ et $P \in [CD]$. Construisez la droite d'intersection des plans CDM et PNB.



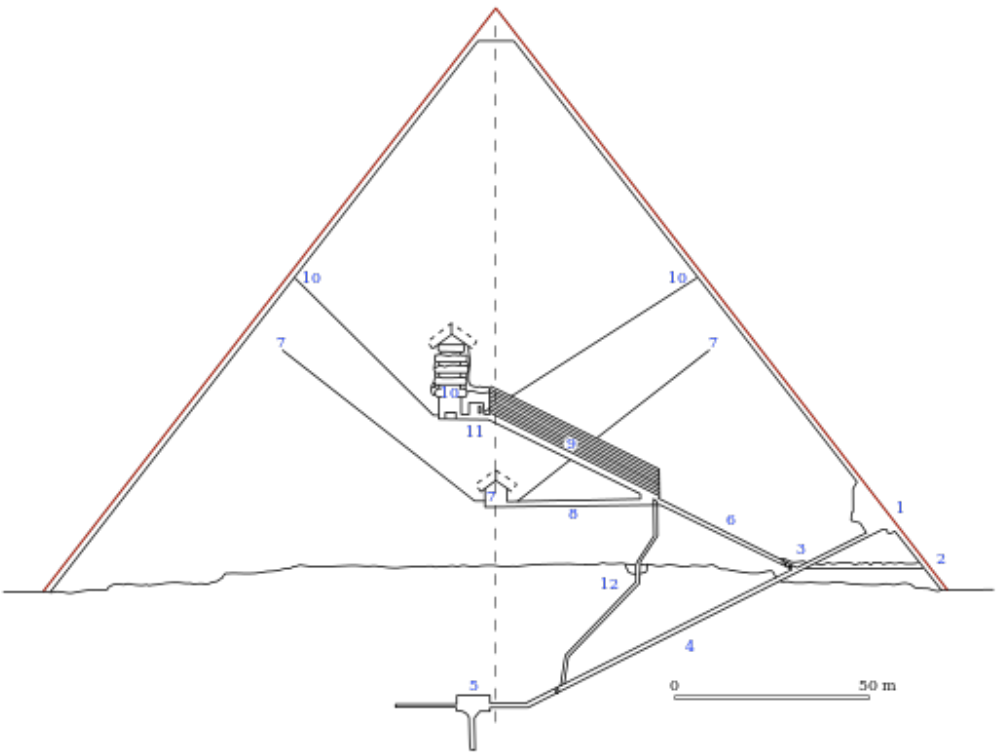
5.3. SECTION PLANE D'UN SOLIDE

5.3.1 Définition et exemples

Une photo ou un dessin d'un objet à trois dimensions ne donnent qu'une information partielle à son sujet. Pour avoir une idée de sa structure interne, on en dessine fréquemment une coupe.

« Coupe : représentation graphique, dessin d'un objet qu'on suppose coupé par un plan. *Coupe d'un navire, d'une maison. Plan en coupe. Coupe perpendiculaire.* » (Petit Robert)

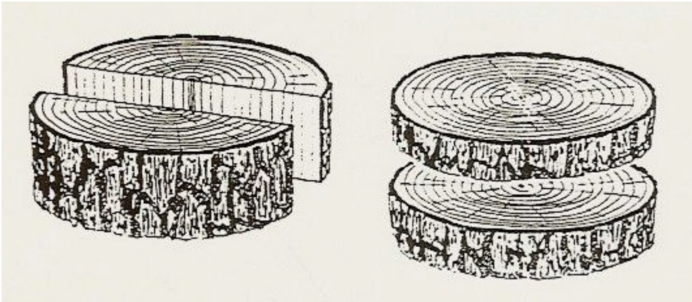
Les pyramides de Gizeh : Khéops, Khéphren et Mykérinos.



Coupe de la pyramide de Khéops montrant les trois salles sépulcrales (n^{os} 5, 7 et 11) .

Nous appellerons <u>section plane</u> d'un solide la forme engendrée par l'intersection de ce solide avec un plan.

Par exemple, si l'on scie verticalement la bûche cylindrique ci-dessous, la section obtenue sera un rectangle. Si l'on scie horizontalement, la section sera un cercle.

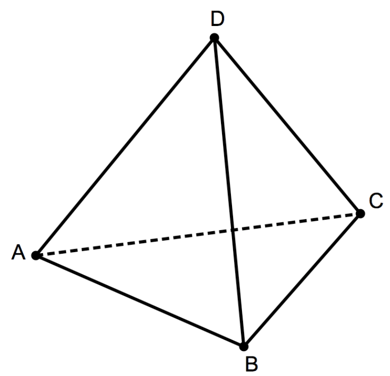


1. Quelle section obtient-on en sciant cette bûche par un plan oblique ?

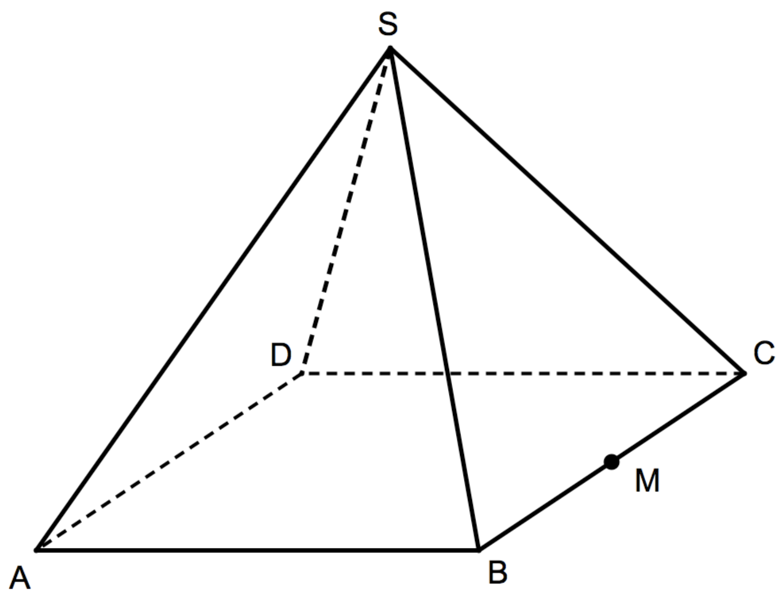
2. Un tétraèdre régulier est un solide dont les faces sont quatre triangles équilatéraux isométriques.

   a) Quelle section obtient-on en coupant un tel tétraèdre, à mi-hauteur, par un plan parallèle à la base ABC ?

   b) Quelle est le rapport entre l'aire de cette section et l'aire de la base ?



3. Voici une pyramide à base carrée, dont le sommet S est à la verticale du centre du carré $ABCD$. Quelle section obtient-on si l'on coupe cette pyramide par un plan parallèle à une de ses faces, et comprenant le point M milieu de $[BC]$?

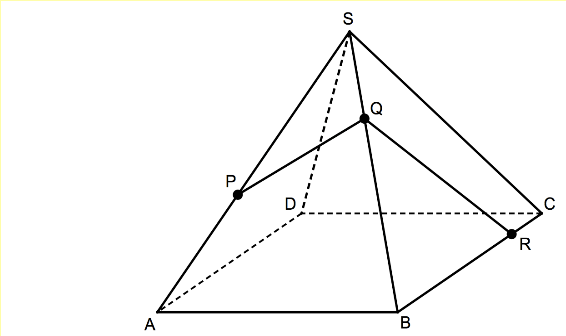


5.3.2. Sections planes de pyramides et de tétraèdres

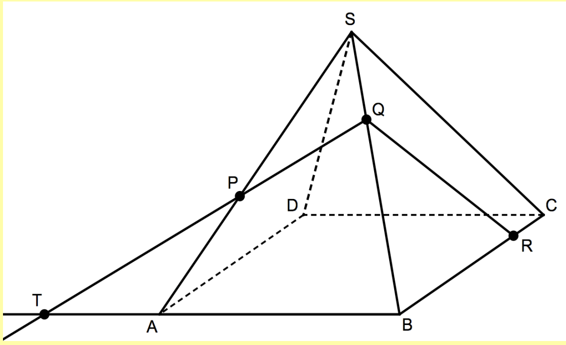
Comment construire une section ? (1)

À titre d'exemple, voici le « film » de la construction de la section d'une pyramide à base carrée $ABCDS$ par le plan $\alpha = PQR$ (avec $P \in [AS]$, $Q \in [BS]$ et $R \in [BC]$).

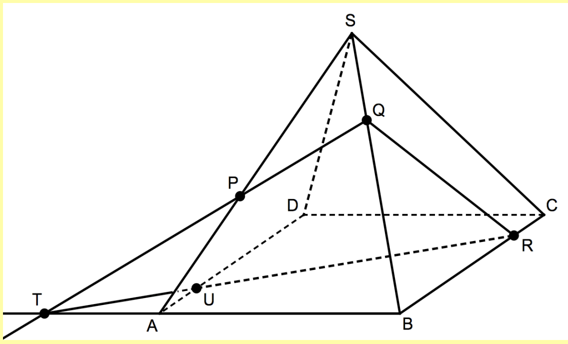
❶



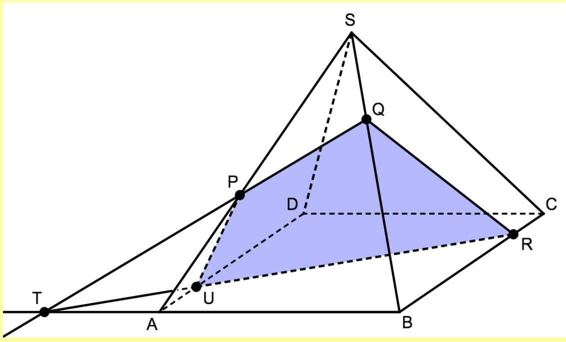
❷



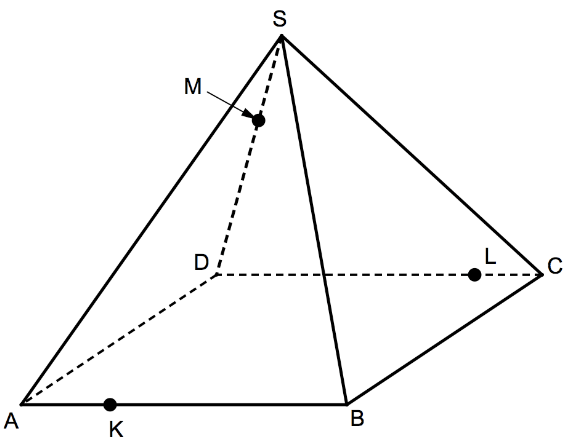
❸



❹

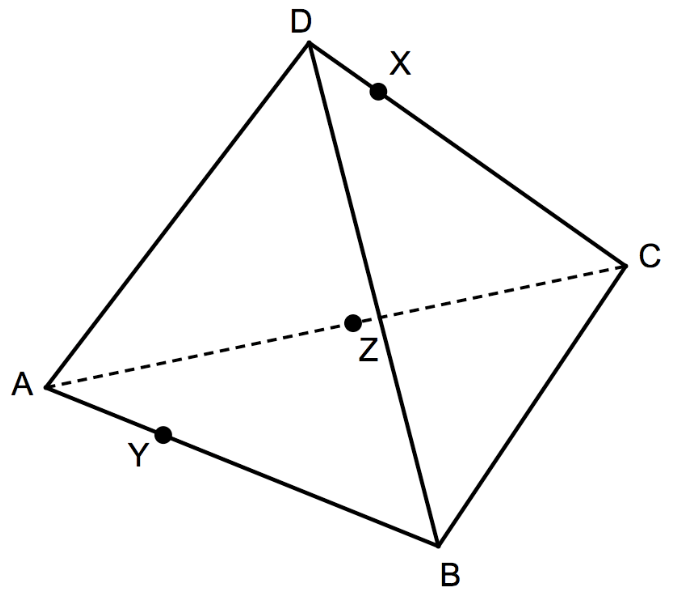


1. Justifiez toutes les étapes de la construction ci-dessus en vous basant sur les propriétés connues.
2. Construisez la section de la pyramide $ABCDS$ par le plan $\beta = KLM$ (avec $K \in [AB]$, $L \in [CD]$ et $M \in [DS]$).

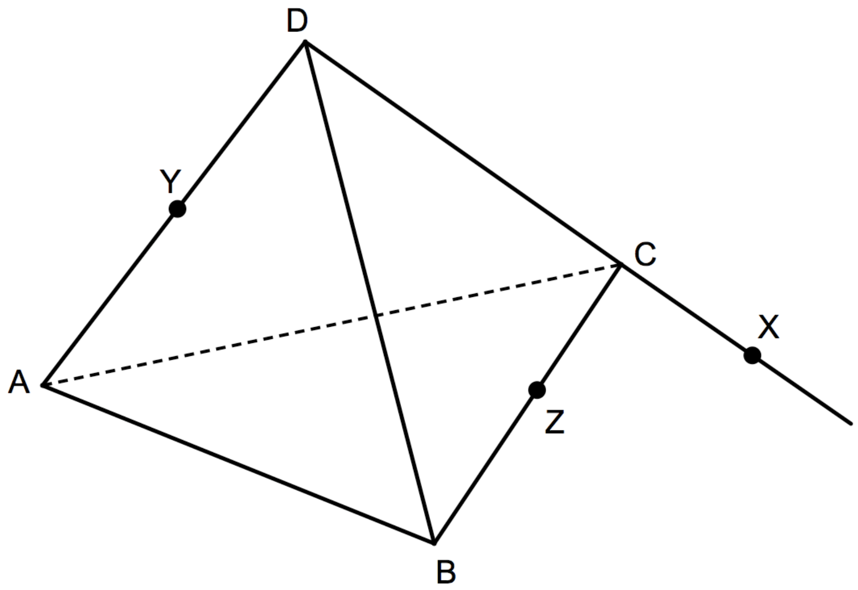


3. Construisez la section de chacun des tétraèdres suivants par le plan $\pi = XYZ$.

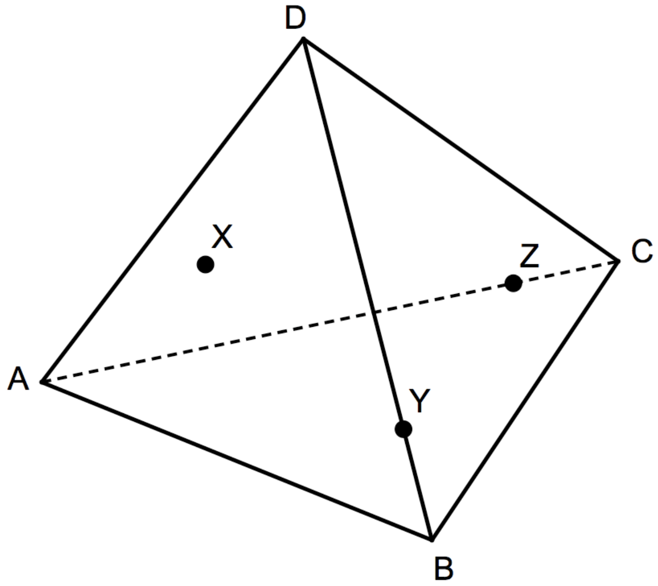
a) $X \in [CD]$, $Y \in [AB]$ et $Z \in [AC]$



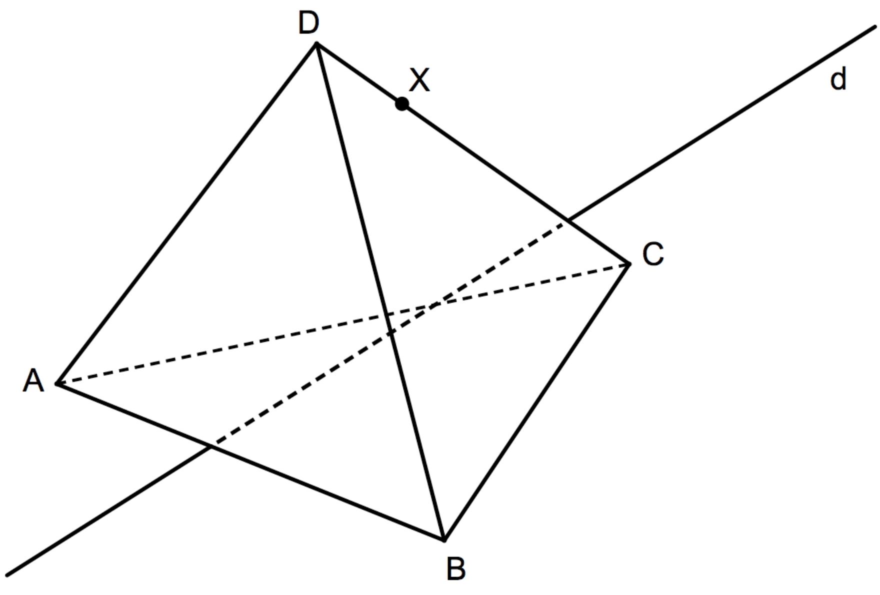
b) $X \in [CD]$, $Y \in [AD]$ et $Z \in [BC]$



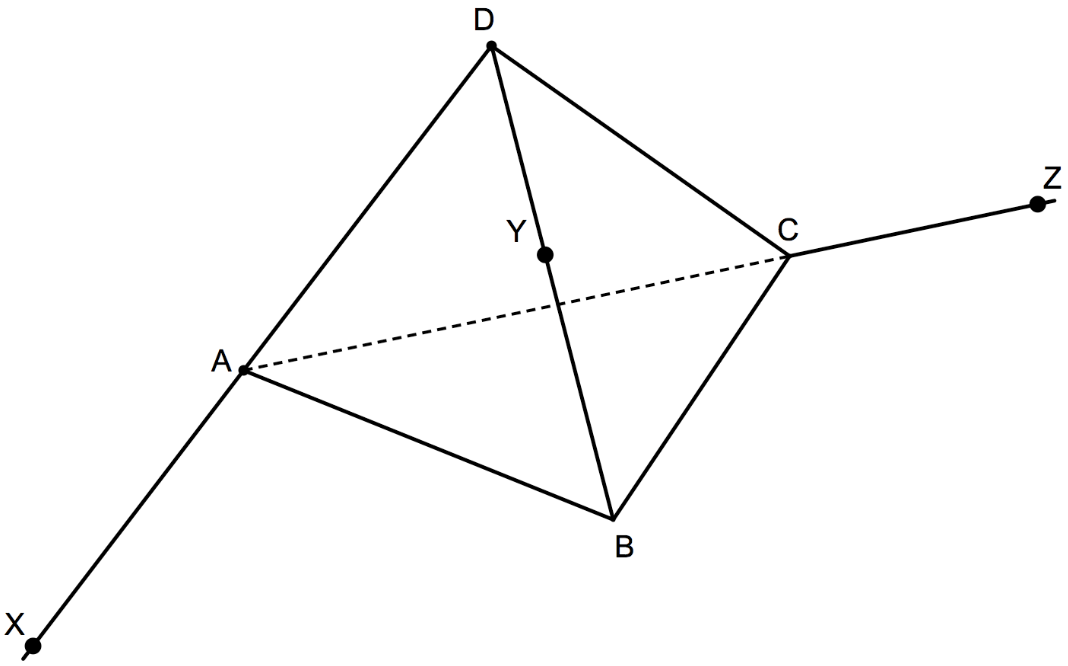
c) $X \in ABD$, $Y \in [BD]$ et $Z \in [AC]$



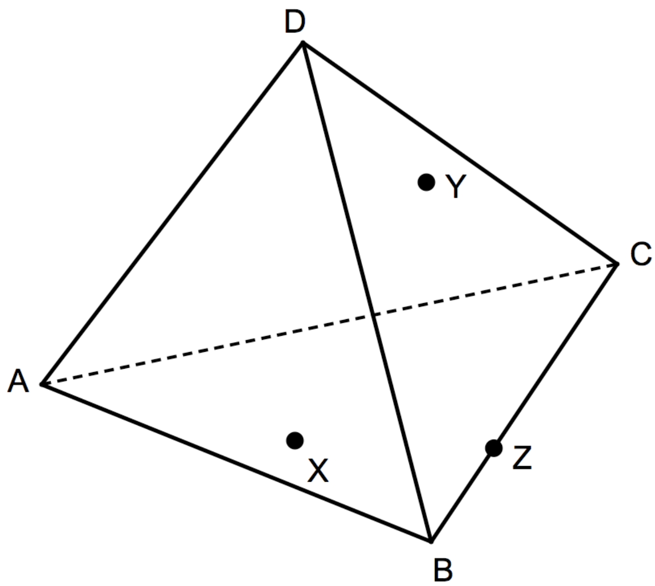
d) plan de section $\pi = Xd$, avec $d \subset ABC$ et $X \in [CD]$



e) $X \in AD$, $Y \in [BD]$ et $Z \in AC$



f) $X \in ABC$, $Y \in BCD$ et $Z \in [CD]$

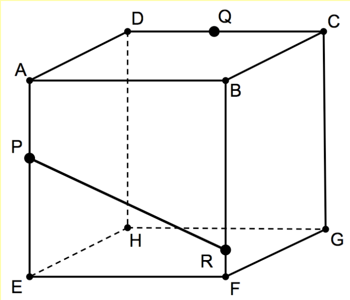


5.3.3. Sections planes de parallélépipèdes et de cubes

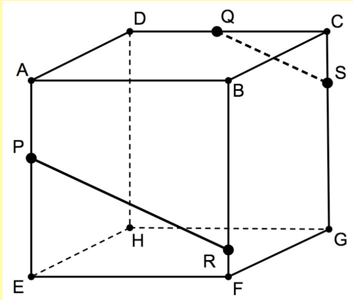
Comment construire une section ? (2)

Pour un cube, ou plus généralement pour un parallélépipède, on peut exploiter une propriété de parallélisme. Voici le « film » de la construction de la section d'un cube $ABCDEFGH$ par le plan $\alpha = PQR$ (avec $P \in [AE]$, $Q \in [CD]$ et $R \in [BF]$).

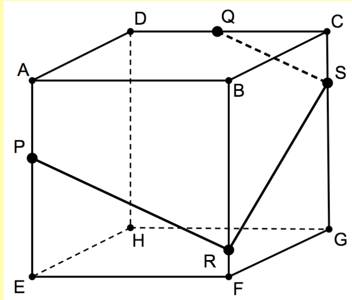
❶



❷

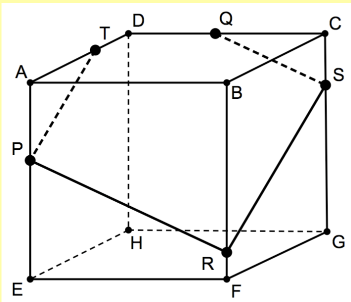


❸

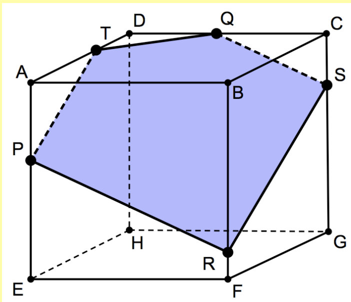


QS // PR

❹

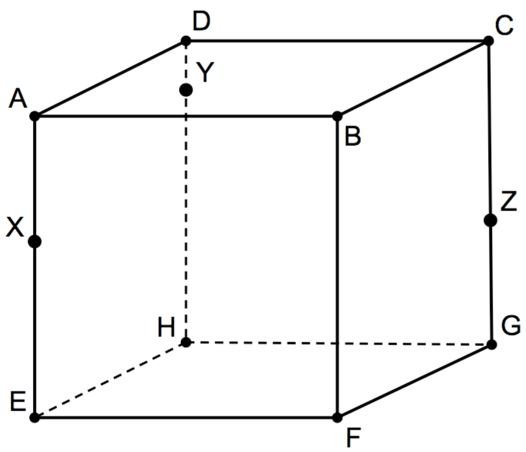


❺



PT // RS

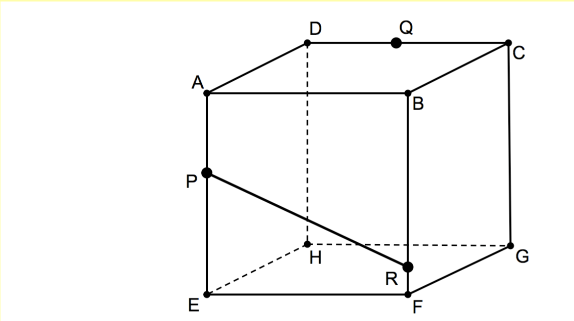
1. Construisez la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan $\pi = XYZ$ (avec $X \in [AE]$, $Y \in [DH]$ et $Z \in [CG]$).



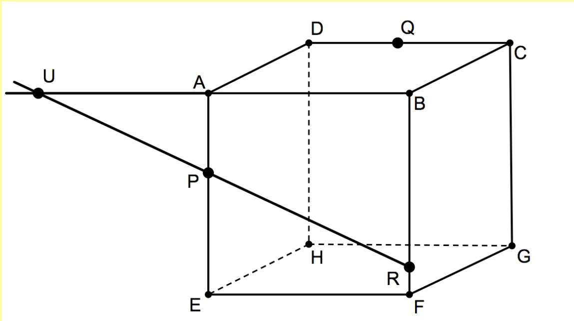
Comment construire une section ? (3)

Pour un cube, il est parfois possible de se passer des propriétés de parallélisme.
Voici une autre façon de construire la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan $\alpha = PQR$ (avec $P \in [AE]$, $Q \in [CD]$ et $R \in [BF]$).

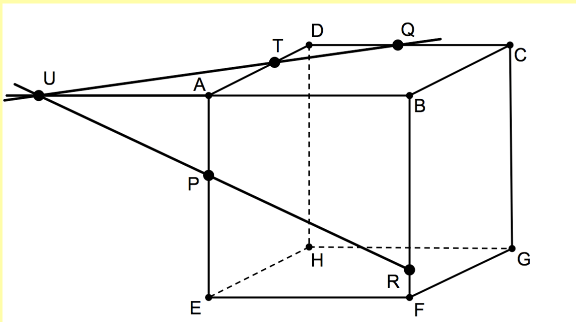
❶



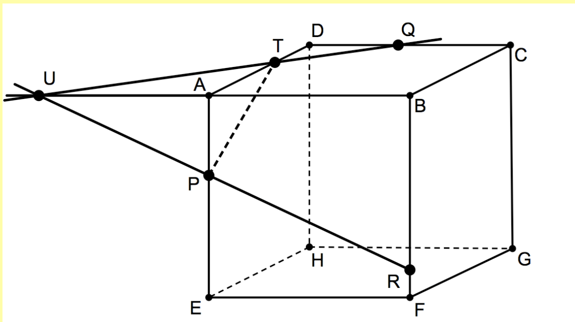
❷



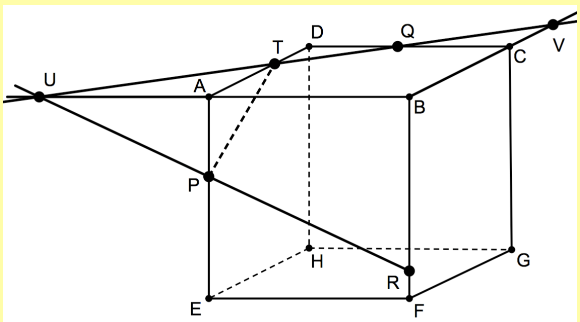
❸



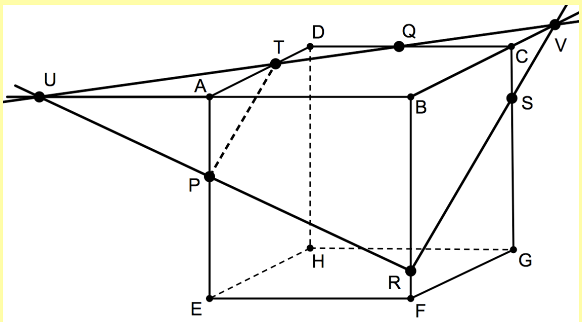
❹



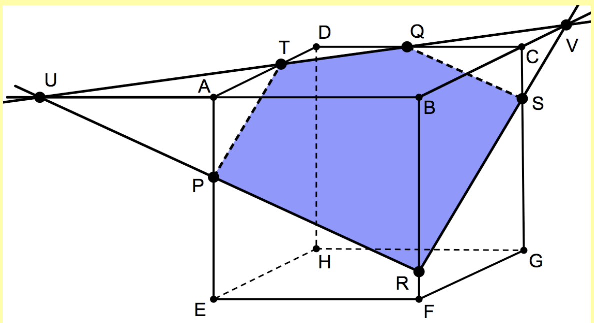
❺



❻

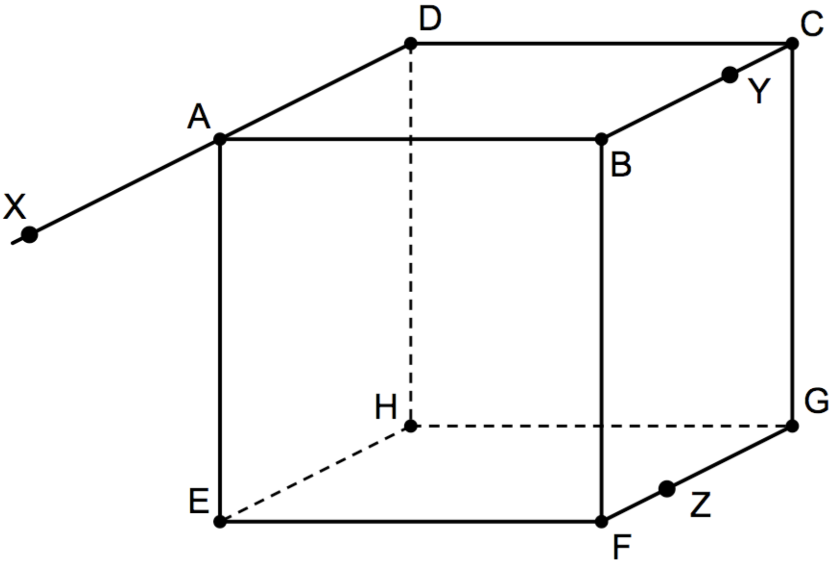


❼

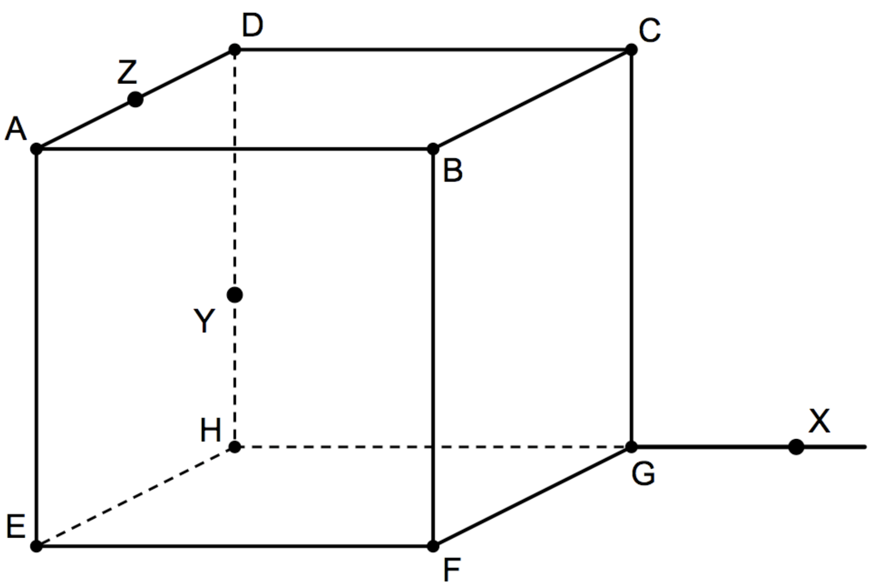


2. Construisez la section de chacun des cubes suivants par le plan $\pi = XYZ$.

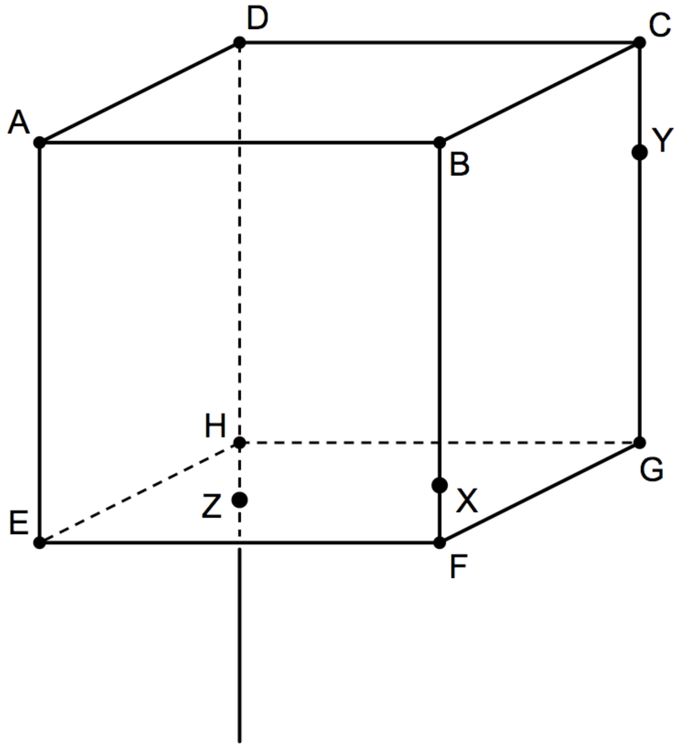
a) $X \in [AD]$, $Y \in [BC]$ et $Z \in [FG]$



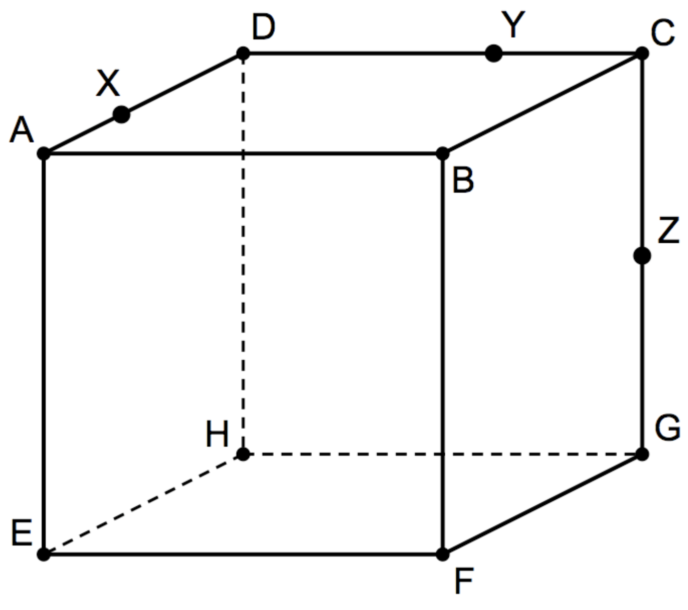
b) $X \in [GH]$, $Y \in [DH]$ et $Z \in [AD]$



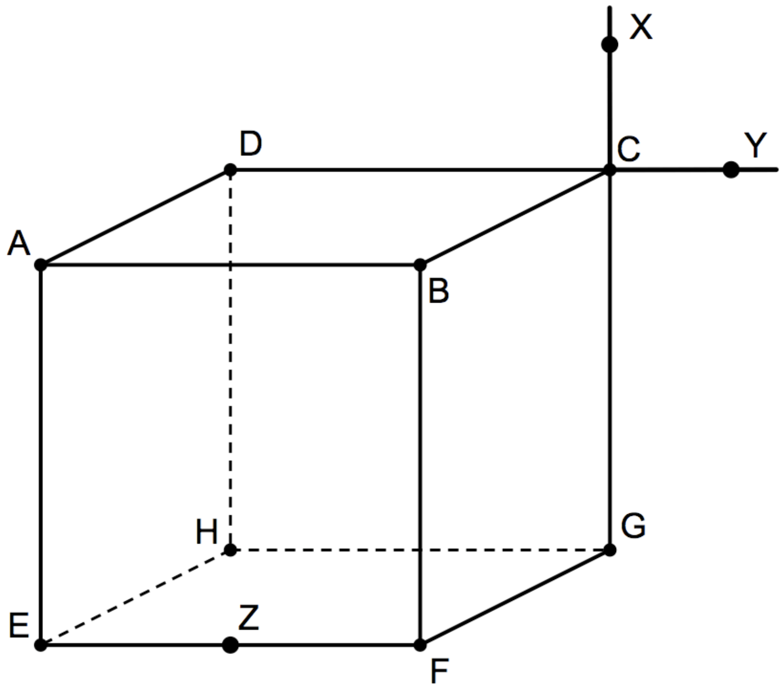
c) $X \in [BF]$, $Y \in [CG]$ et $Z \in [DH]$



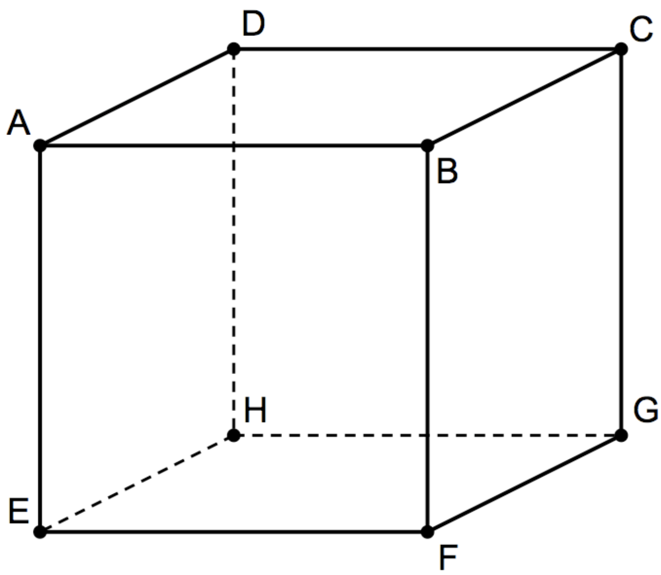
d) $X \in [AD]$, $Y \in [CD]$ et $Z \in [CG]$



e) $X \in [CG]$, $Y \in [CD]$ et $Z \in [EF]$



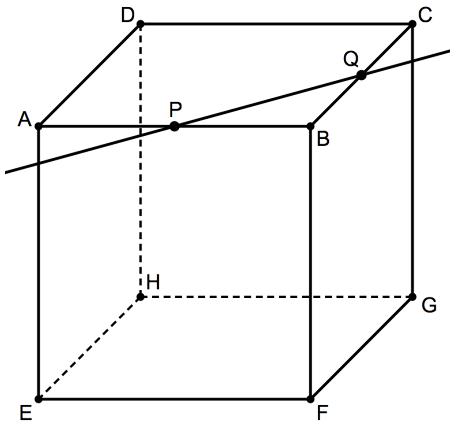
3. Construisez la section du cube par le plan MDK , où M est le milieu du segment $[AE]$ et K un point du segment $[CG]$ tel que $|GK| = \frac{1}{4} \cdot |GC|$.



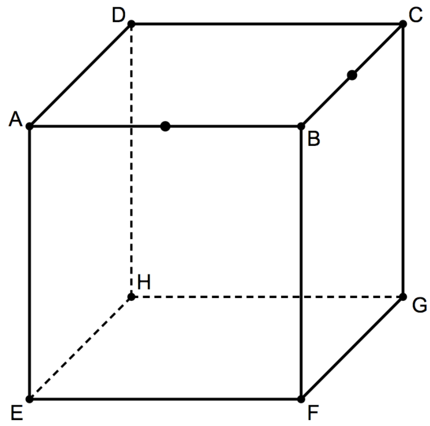
5.3.4. Sections planes de polyèdres : exercices variés

1. Soient P et Q les milieux respectifs des arêtes $[AB]$ et $[BC]$ du cube. Un plan, contenant la droite PQ, tourne autour de celle-ci. La section obtenue prend successivement la forme d'un triangle équilatéral, d'un rectangle, d'un trapèze isocèle, d'un hexagone régulier, d'un pentagone et d'un carré. Dessinez ces différentes sections.

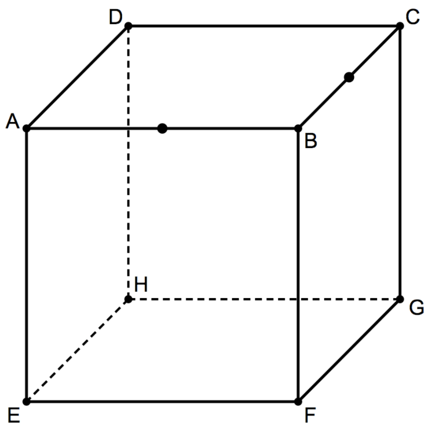
①



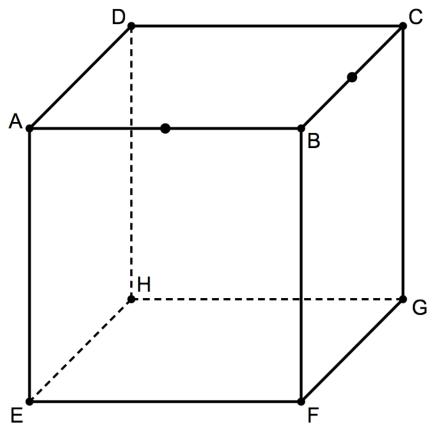
②



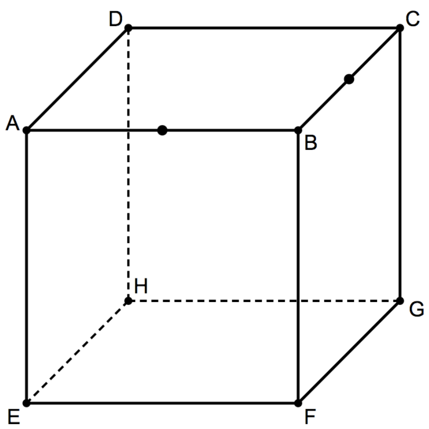
③



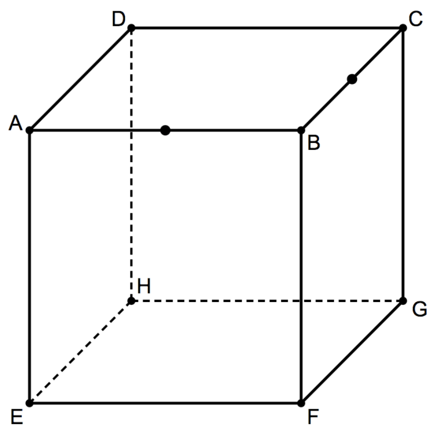
④



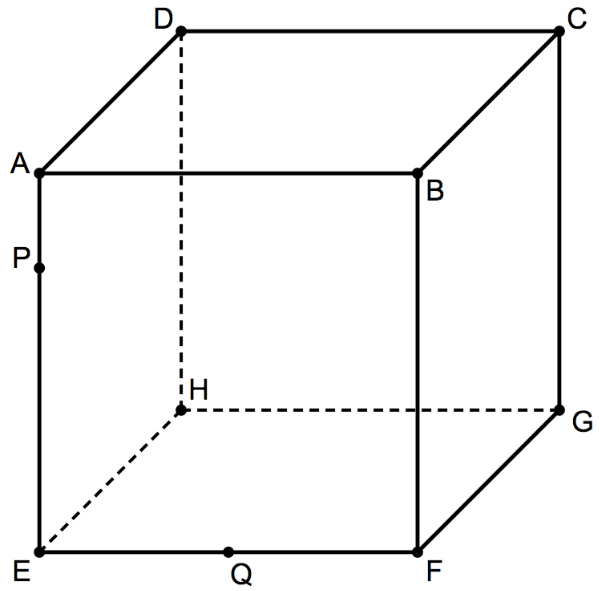
⑤



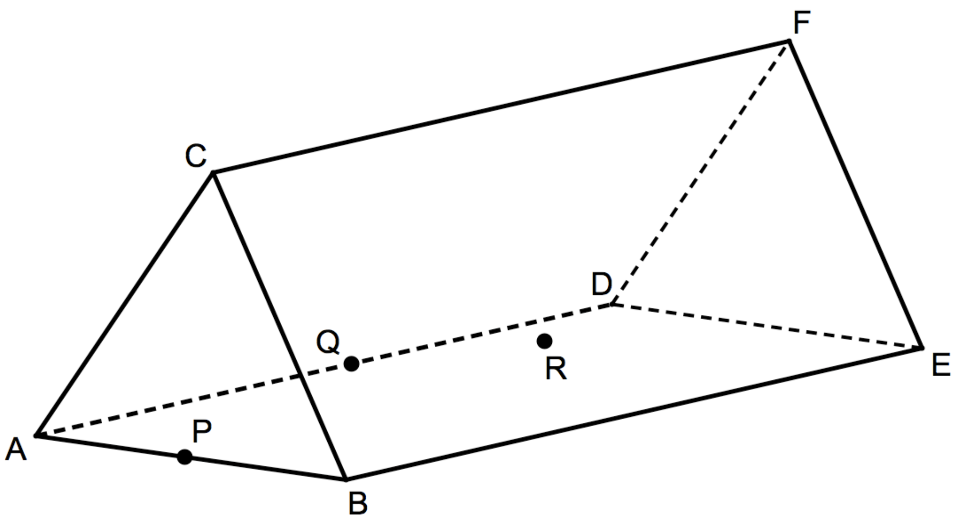
⑥



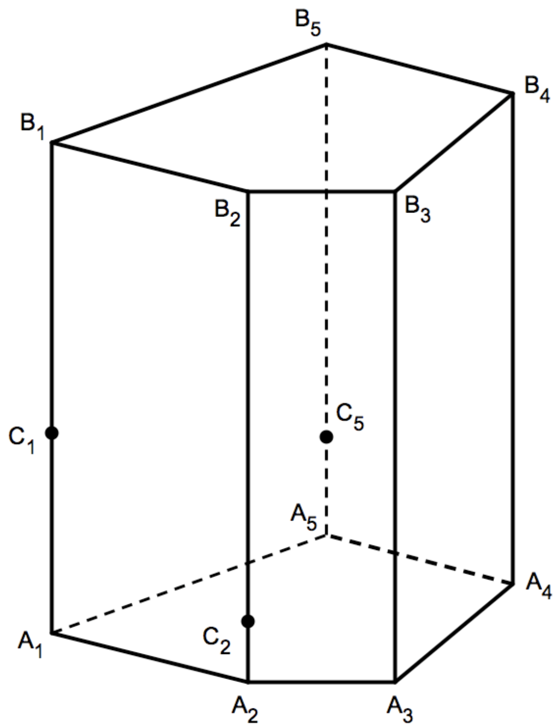
2. Construisez la section du cube par le plan PQM, les points P et Q appartenant respectivement aux arêtes $[AE]$ et $[EF]$, et M étant le centre de gravité du cube. Que pouvez-vous dire des deux solides résultant de cette section ?



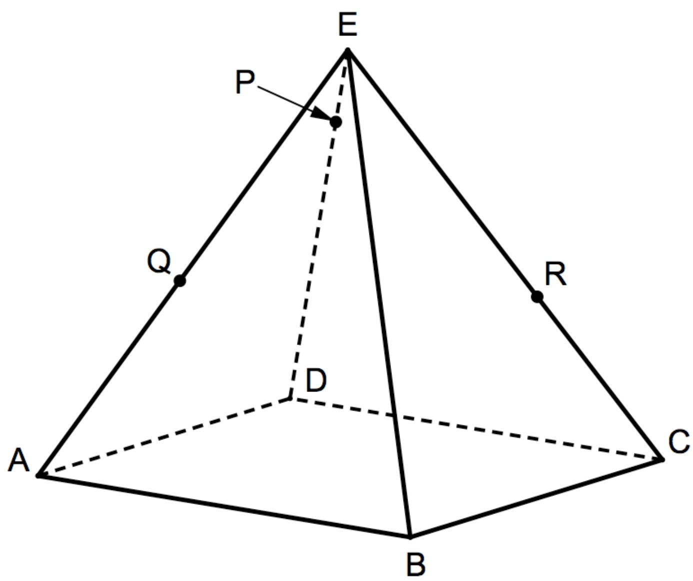
3. Voici un prisme dont les arêtes $[AD]$, $[BE]$ et $[CF]$ sont parallèles, et dont les faces ABC et DEF sont parallèles aussi. Construisez la section du prisme par le plan PQR sachant que $P \in [AB]$, $Q \in [AD]$ et $R \in BCF$.



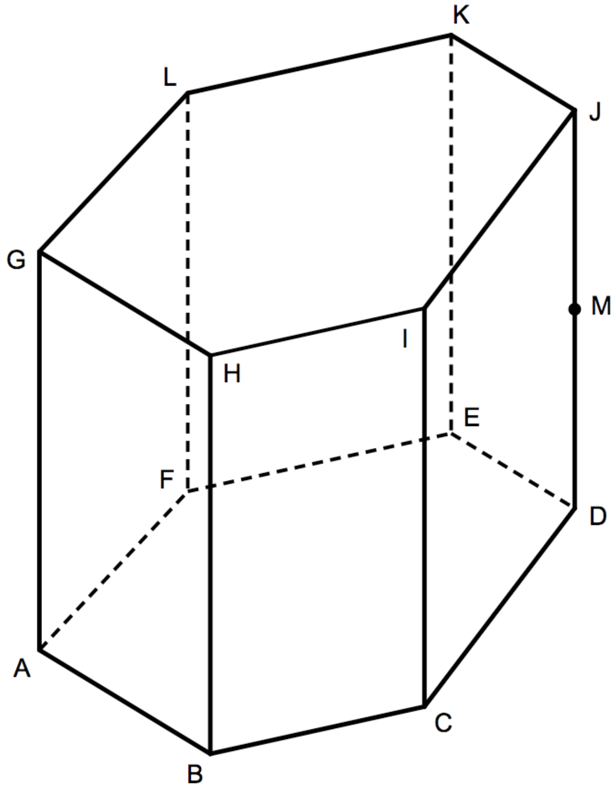
4. Voici un prisme droit à base pentagonale. On donne les points $C_1 \in [A_1B_1]$, $C_2 \in [A_2B_2]$ et $C_5 \in [A_5B_5]$. Construisez la section du prisme par le plan $C_1C_2C_5$.



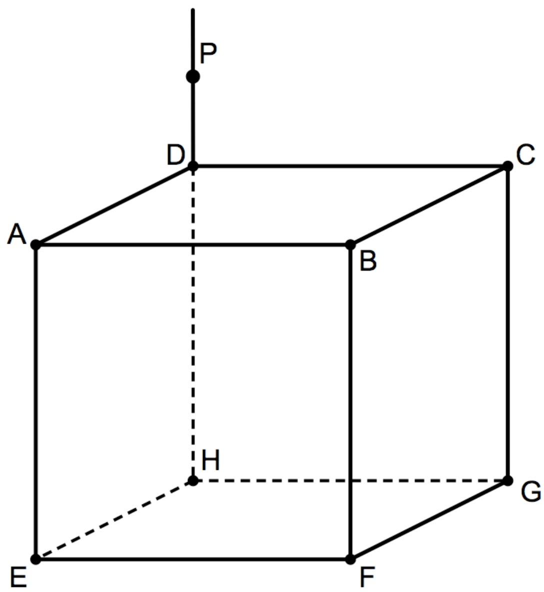
5. Construisez la section de cette pyramide droite à base carrée par le plan PQR sachant que $P \in [DE]$, $Q \in [AE]$ et $R \in [CE]$.



6. Construisez la section de ce prisme droit à base hexagonale par le plan contenant la droite AB et comprenant le milieu de l'arête [DJ] . Les faces latérales du prisme sont parallèles deux à deux.



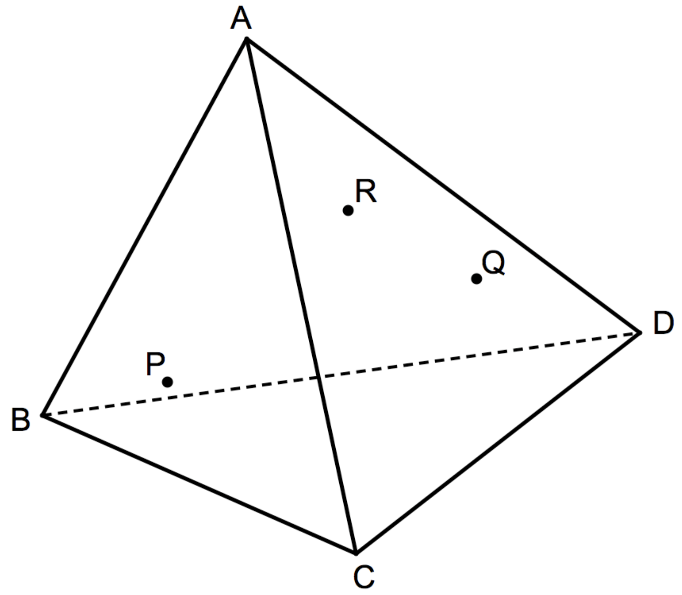
7. Un plan, comprenant les points P et F , coupe le cube représenté ci-dessous. La section obtenue est un polygone symétrique par rapport à la droite PF . Construisez ce polygone.



8. On donne un tétraèdre $ABCD$ et les points $P \in ABC$, $Q \in ACD$ et $R \in ABD$.

a) Construisez la droite d'intersection des plans PQR et BCD.

b) Construisez la section du tétraèdre par le plan PQR.



5.3.5. Maisons cubiques

Aux Pays-Bas, dans les villes de Rotterdam et de Helmond, on peut trouver des maisons cubiques assez particulières. Conçues par l'architecte Piet BLOM, elles consistent essentiellement en un cube dont une grande diagonale a été mise en position verticale - « un cube sur sa pointe » pourrions-nous dire - soutenu par un pilastre de base hexagonale.

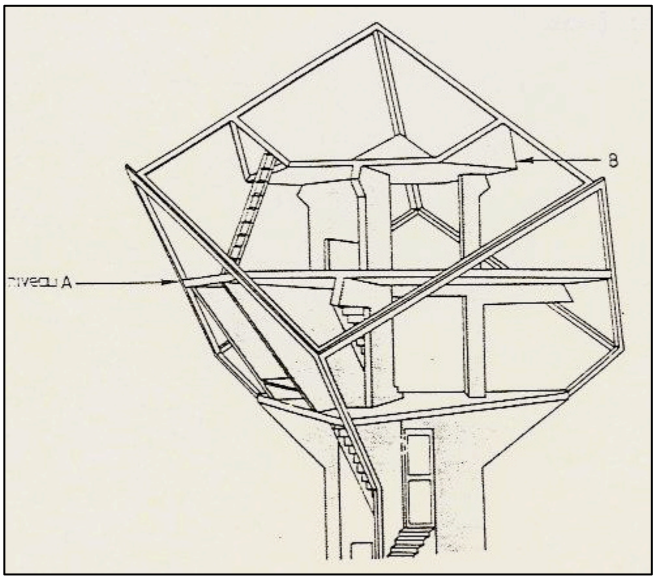
Maisons cubiques à Helmond (Noord-Brabant)

1. Dessinez une telle maison vue du-dessus.

2. Ci-contre, une représentation de l'intérieur de la maison. Il y a trois niveaux. Dessinez le plancher du niveau A vu du dessus.

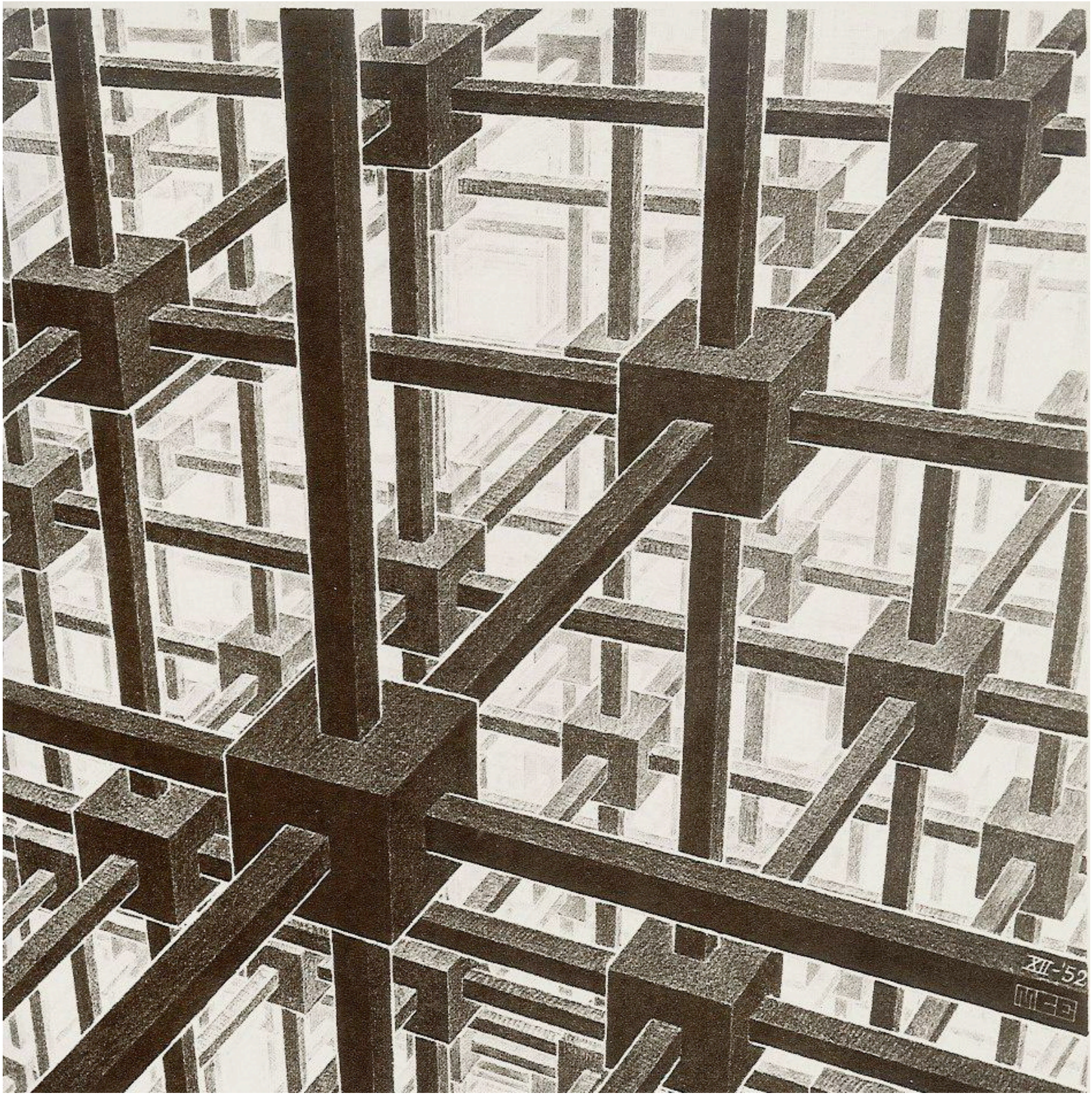
3. L'aire du plancher du niveau A est de 60 (m^2). Calculez la longueur d'une arête de la maison cubique.

4. Comment varierait l'aire du plancher A si on l'abaissait ou si on le surélevait ?



5. Le plancher du grenier (B) a la forme d'un hexagone régulier. Quelle serait la forme de ce plancher si on le prolongeait horizontalement jusqu'à ce qu'il rencontre les faces du cube ?

6. La hauteur du living (plancher A) est de 2,4 (m). Quelle est la hauteur maximale dans le grenier ?

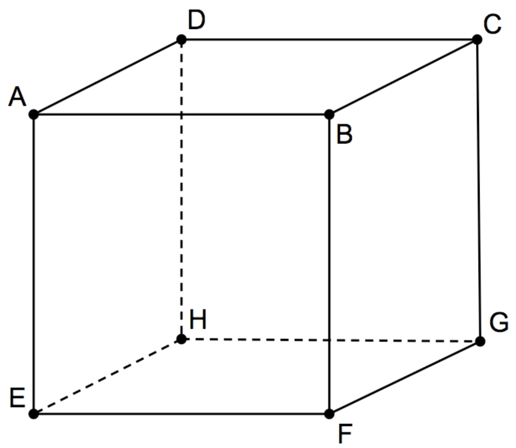


M. C. Escher « Équirépartition spatiale cubique » (1952)

6. ORTHOGONALITÉ ET PERPENDICULARITÉ

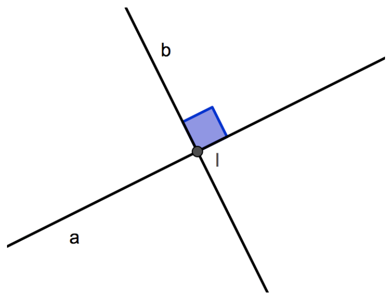
6.1. DÉFINITIONS

Précisons d'abord les notions d'orthogonalité et de perpendicularité dans l'espace.
Le cube ABCDEFGH nous permettra d'illustrer les définitions par des exemples.



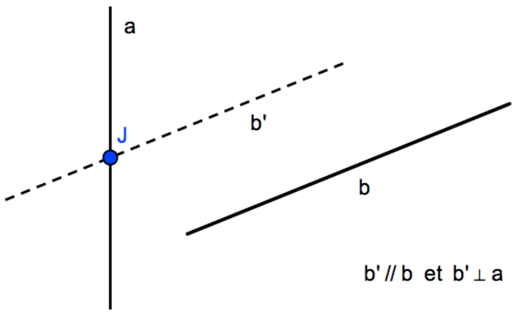
Droites orthogonales

En géométrie plane, nous connaissons la notion de droites perpendiculaires : il s'agit de droites qui se coupent à angle droit. On note $a \perp b$.



Qu'en est-il dans l'espace ?

D1 Dans l'espace, deux droites a et b sont dites orthogonales si, en menant par un point de l'une la parallèle à l'autre, on obtient deux droites (coplanaires) perpendiculaires.
On note aussi $a \perp b$.



Exemples dans le cube

- les droites AB et BF sont perpendiculaires car elles se coupent à angle droit en B ;
- les droites AB et CG sont orthogonales car, par exemple, BF // CG et BF est perpendiculaire à AB (notons que AB et CG ne sont pas coplanaires : ce sont des droites gauches).

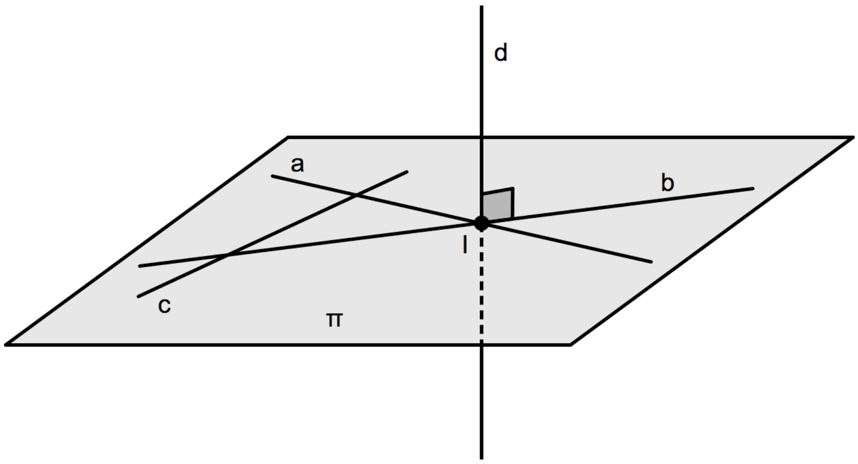
Remarques

- Deux droites perpendiculaires sont évidemment orthogonales.
- Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement perpendiculaires car elles peuvent être gauches.

Droites et plans perpendiculaires

D2 Une droite d est dite perpendiculaire à un plan π lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites contenues dans π. On note $\mathrm{d} \perp \pi$.

Soient des droites a, b, c, ... incluses dans π.



Si d est perpendiculaire à π, alors d est orthogonale à a, b, c, …

Exemples dans le cube

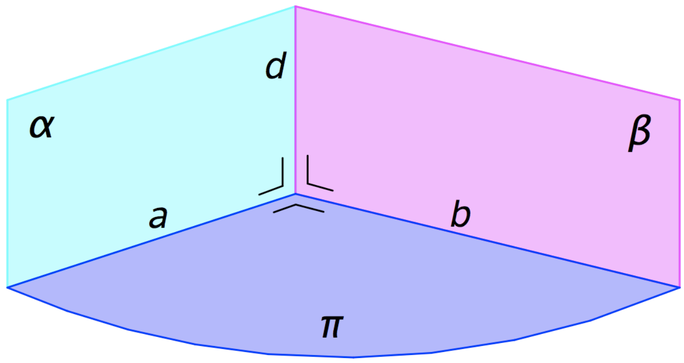
- AB $\perp$ BCGF (en effet, $\mathrm{AB} \perp \mathrm{BC}$, $\mathrm{AB} \perp \mathrm{BF}$, $\mathrm{AB} \perp \mathrm{BG}$, etc)
- AE $\perp$ EFGH
- EG $\perp$ BDF

Remarque

Le plan perpendiculaire à une droite en un de ses points est la réunion de toutes les perpendiculaires à cette droite en ce point.

Plans perpendiculaires

D3 Deux plans sécants sont dits perpendiculaires si et seulement si un plan perpendiculaire à leur intersection les coupe suivant deux droites perpendiculaires.



Dans la figure ci-dessus, les plans α et β sont perpendiculaires. En langage symbolique, la définition se traduit de la façon suivante :

$$\alpha \perp \beta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha \cap \beta = d \\ \pi \perp d \\ \pi \cap \alpha = a \\ \pi \cap \beta = b \\ a \perp b \end{cases}$$

<u>Exemples dans le cube</u>

- ABF $\perp$ BCG car $\begin{cases} ABF \cap BCG = BF \\ EFG \perp BF \\ EFG \cap ABF = EF \\ EFG \cap BCG = FG \\ EF \perp FG \end{cases}$

- ADH $\perp$ DCG (justifiez)

6.2. Quelques questions pour explorer l'orthogonalité …

Justifiez et illustrez vos réponses. Référez-vous au cube pour trouver des exemples.

1. Dans le plan, une droite peut-elle être perpendiculaire à plusieurs autes droites ? Que pouvez-vous dire de ces dernières ? Mêmes questions dans l'espace.

2. On donne trois droites a , b et c telles que $a \perp b$ et $b \perp c$.
   Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

   a) On a nécessairement $a \,//\, c$.

   b) Il est possible que $a \perp c$.

3. On donne une droite d et un point P .

   a) Combien y a-t-il de droites comprenant P et orthogonales à d ? Si l'on réunit toutes ces droites, qu'obtient-on ?

   b) Mêmes questions qu'en (a) mais remplacez « orthogonales » par « perpendiculaires ». Envisagez le cas où $\mathrm{P} \in \mathrm{d}$ et celui où $\mathrm{P} \notin \mathrm{d}$.

4. Une droite peut-elle être perpendiculaire à plusieurs plans ? Que pouvez-vous dire de ceux-ci ?

5. Par un point de l'espace, combien peut-on tracer de droites perpendiculaires à un plan donné ?

6. Par un point de l'espace, combien peut-on mener de plans perpendiculaires à une droite donnée ?

7. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

   a) Une droite orthogonale à une droite incluse dans un plan est perpendiculaire à ce plan.

   b) Une droite orthogonale à deux droites incluses dans un plan est perpendiculaire à ce plan.

   c) Une droite orthogonale à deux droites sécantes incluses dans un plan est perpendiculaire à ce plan.

8. Une droite d est incluse dans un plan π . Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

   a) Une droite gauche avec d peut être perpendiculaire à π .

   b) Une droite parallèle à d peut être perpendiculaire à π .

   c) Une droite perpendiculaire à d est nécessairement perpendiculaire à π .

9. Que pouvez-vous dire de deux droites perpendiculaires à un même plan ?

10. Par un point de l'espace, combien peut-on mener de plans perpendiculaires à un plan donné ? Donnez une caractéristique commune à tous ces plans.

11. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? « Deux droites contenues dans des plans perpendiculaires sont elles-mêmes perpendiculaires. Si elles ne sont pas perpendiculaires, elles sont au moins orthogonales».

12. Si un plan contient une droite perpendiculaire à un autre plan, les dux plans sont-ils forcément perpendiculaires ?

13. Deux plans sécants α et β sont perpendiculaires à un plan π. Que pouvez-vous dire de la droite d'intersection de α et β ?

14. Deux plans α et β sont perpendiculaires. Dans α on mène une droite d perpendiculaire à la droite d'intersection des deux plans. Que pouvez-vous encore dire de la droite d ?

15. Deux plans α et β sont parallèles. Un troisième plan π est perpendiculaire à α. Que pouvez-vous dire des plans β et π ?.

6.3. Critères d'orthogonalité

Critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan

Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan passant par son pied (figure 1).

Nous utiliserons souvent ce critère sous la forme suivante :

Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan (figure 2).

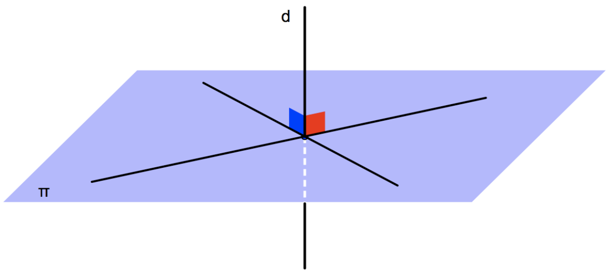


Fig. 1 Droite d perpendiculaire à deux droites sécantes de π.

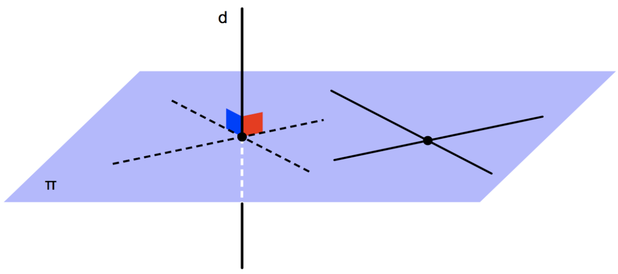
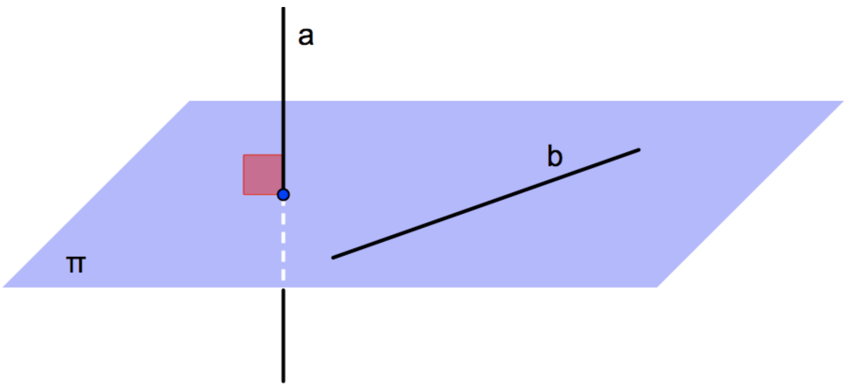


Fig. 2 Droite d orthogonale à deux droites sécantes de π.

Critère d'orthogonalité de deux droites

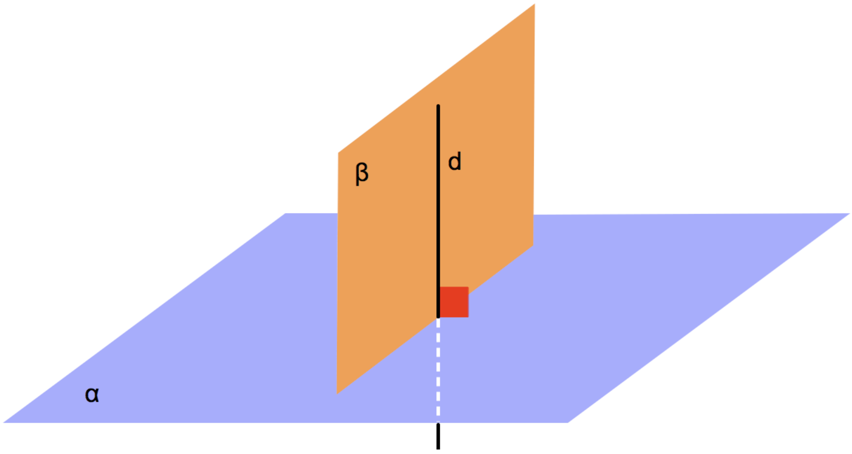
Deux droites sont orthogonales si et seulement si l'une est contenue dans un plan perpendiculaire à l'autre.



$$\left.\begin{array}{ccc} \pi & \perp & a \\ b & \subset & \pi \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp a$$

Critère de perpendicularité de deux plans

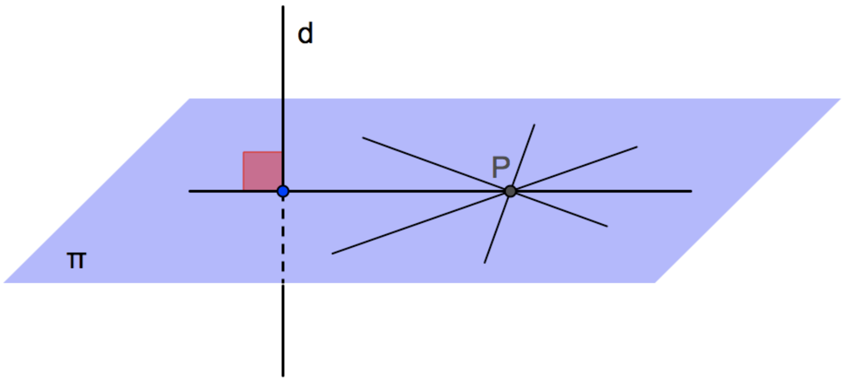
Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre.



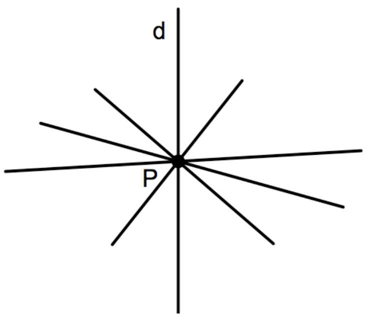
$$\left.\begin{array}{lll} d & \perp & \alpha \\ d & \subset & \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

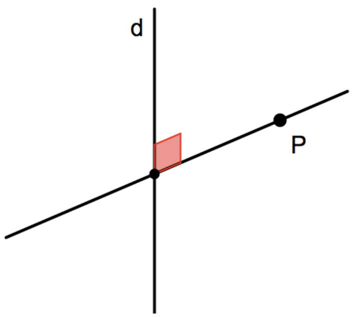
6.4. ORTHOGONALITÉ ET PERPENDICULARITÉ : PROPRIÉTÉS UTILES

OP-1 Par un point de l'espace, on peut mener une infinité de droites orthogonales à une droite d donnée. La réunion de toutes les droites orthogonales à d est un plan perpendiculaire à d.

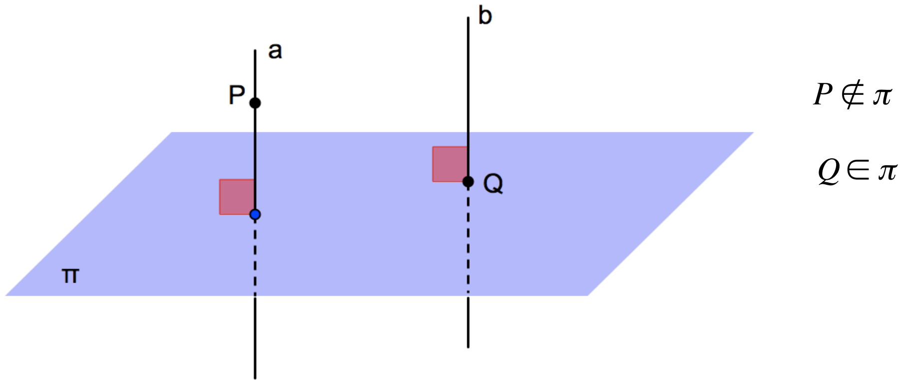


Remarquons que par un point d'une droite, on peut mener une infinité de perpendiculaires à cette droite, mais que par un point extérieur à une droite, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à cette droite.

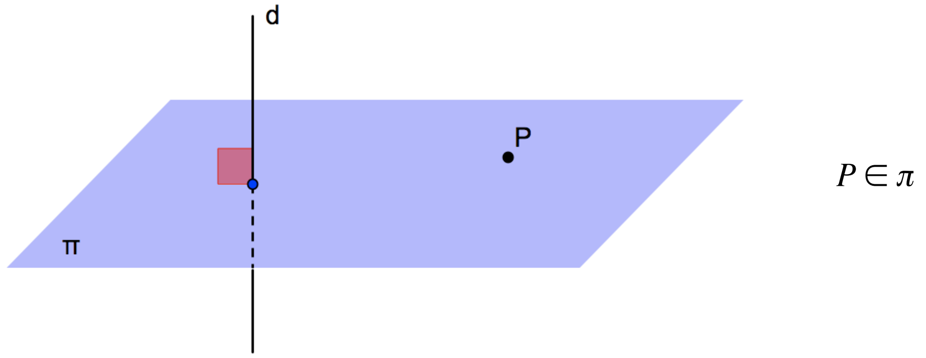




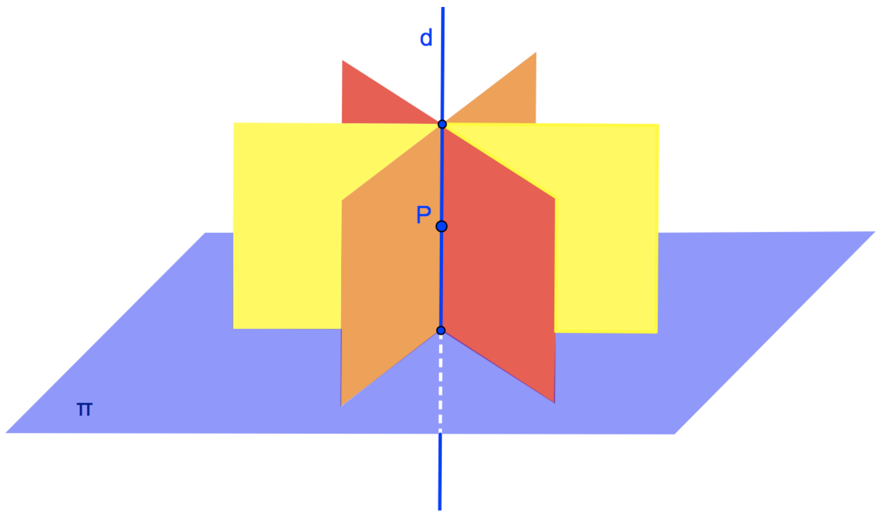
OP-2 Par un point de l'espace, on ne peut mener qu'une seule droite perpendiculaire à un plan π donné.



OP-3 Par un point de l'espace, on ne peut mener qu'un seul plan perpendiculaire à une droite d donnée.

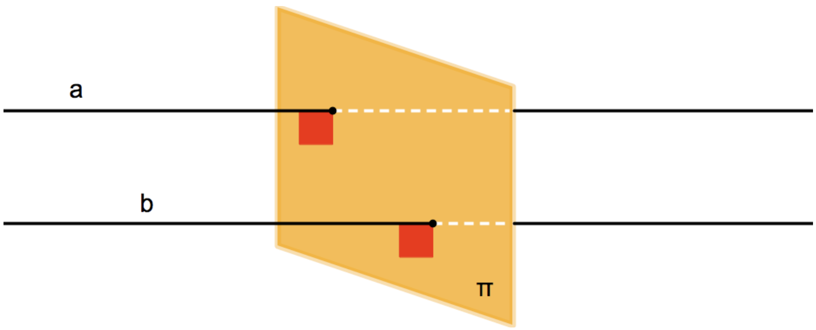


OP-4 Par un point de l'espace, on peut mener une infinité de plans perpendiculaires à un plan π donné.

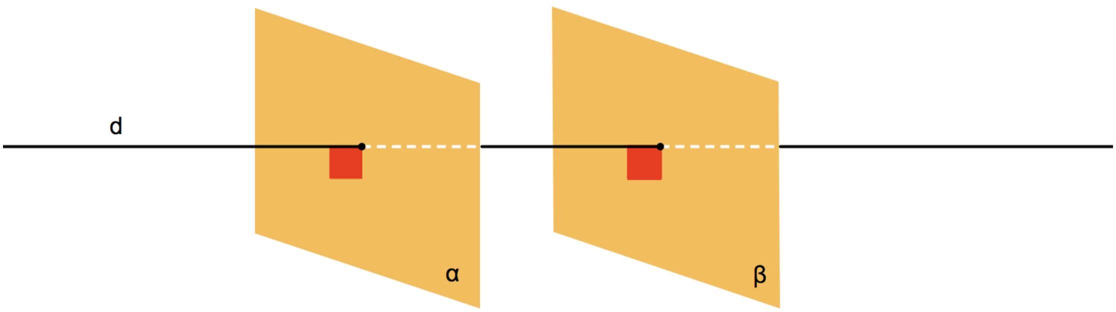


Remarquons que la droite d, commune à tous les plans perpendiculaires à π, est elle-même perpendiculaire à π.

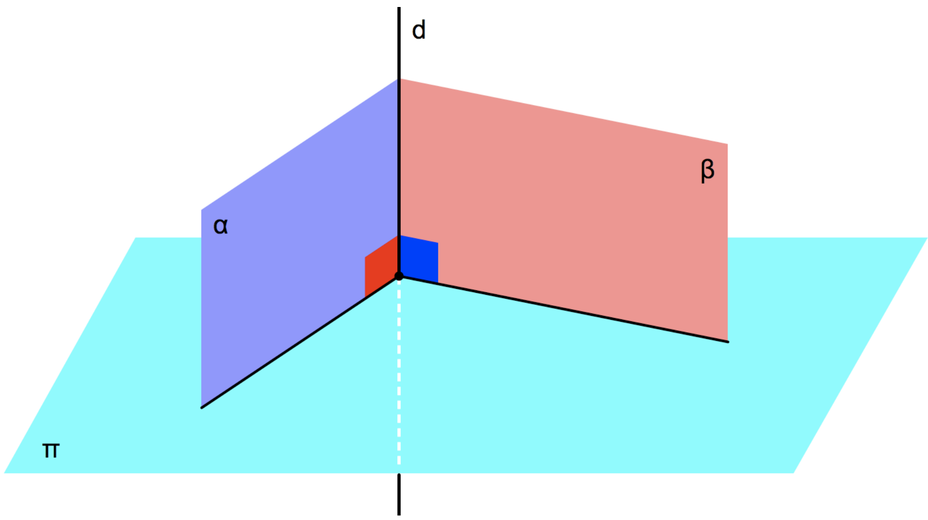
OP-5 Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
Réciproquement, deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.



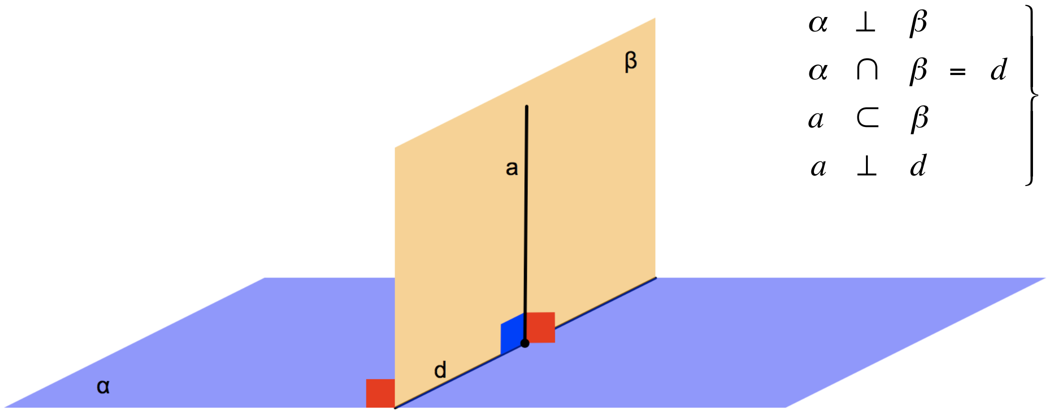
OP-6 Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.
Réciproquement, deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.



OP-7 Deux plans sécants perpendiculaires à un même troisième se coupent suivant une droite perpendiculaire à ce troisième plan.

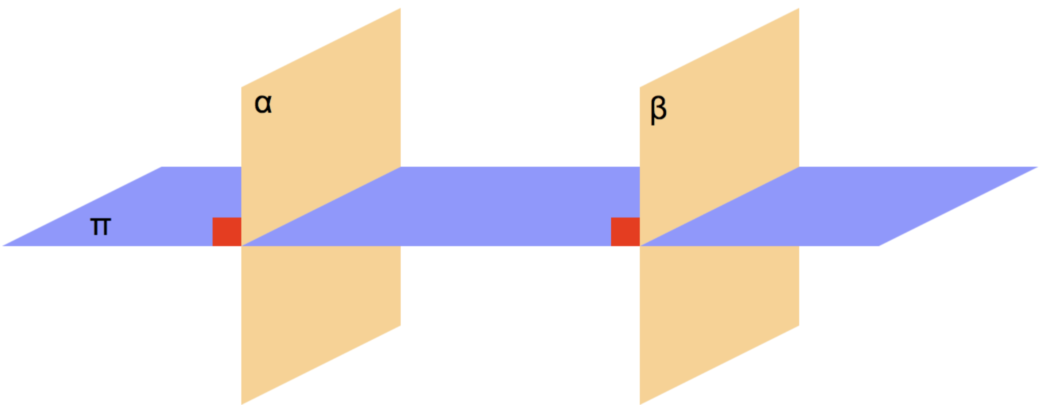


OP-8 Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite menée dans l'un perpendiculairement à leur intersection est perpendiculaire à l'autre.



$$\left.\begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ \alpha \cap \beta = d \\ a \subset \beta \\ a \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp \alpha$$

OP-9 Si deux plans sont parallèles, toute plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.



6.5. EXERCICES

1. On donne deux droites d et d' ainsi que deux plans π et π'.
   Complétez les énoncés suivants.

   a) $d \perp \pi$ et $d' \perp \pi \Rightarrow$ ………………..

   b) $d // d'$ et $d' \perp \pi \Rightarrow$ ………………..

   c) $d \perp \pi$ et $d // \pi' \Rightarrow$ ………………..

   d) $d \perp \pi$ et $d \perp \pi' \Rightarrow$ ………………..

   e) $\pi // \pi'$ et $d \perp \pi' \Rightarrow$ ………………..

---

2. Soient deux plans α et β et une droite d. Voici trois propositions :

   a) « d est perpendiculaire à α »

   b) « α et β sont perpendiculaires »

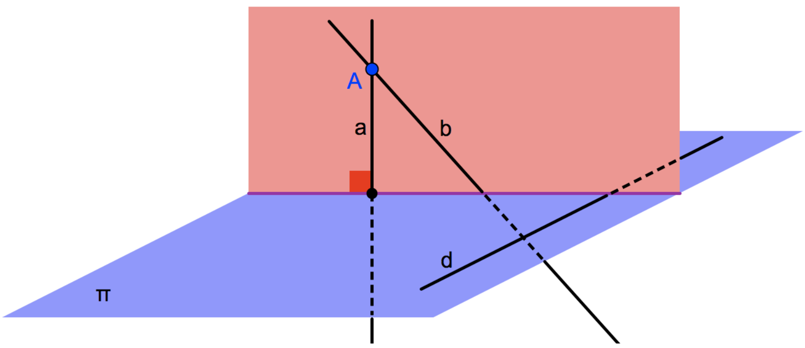
   c) « d est parallèle à β »

   Est-il exact d'affirmer que si deux de ces propositions sont vraies, alors la troisième est vraie aussi ? Justifiez.

---

3. Le théorème « des trois droites orthogonales »

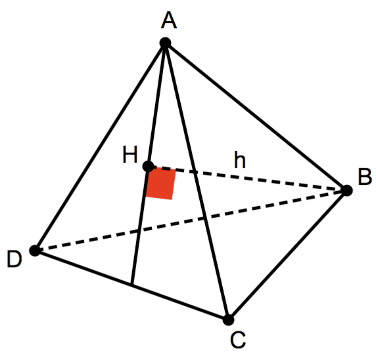
Soient un point A et un plan π contenant une droite d. Par le point A, on mène la droite a perpendiculaire à π. Ensuite, on considère une droite b, distincte de a et orthogonale à d. Démontrez que le plan déterminé par les droites a et b est perpendiculaire à d.



---

4. Soit un tétraèdre $ABCD$ dont les arêtes $[AB]$ et $[CD]$ sont orthogonales, ainsi que les arêtes $[BC]$ et $[AD]$.
   Par le sommet B, on mène la droite h perpendiculaire au plan ADC. Elle coupe ce plan au point H.

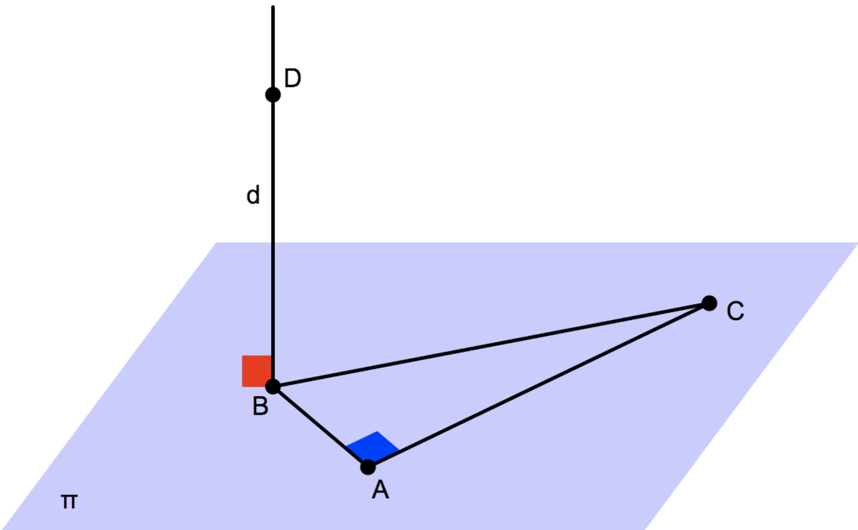
   Démontrez que $AH \perp CD$ et que $BD \perp AC$.



5. Soit dans un plan π un triangle ABC rectangle en A. On désigne par d la droite passant par B et perpendiculaire au plan π, et par D un point de d distinct de B.

   a) Démontrez que la droite AC est perpendiculaire au plan ABD.

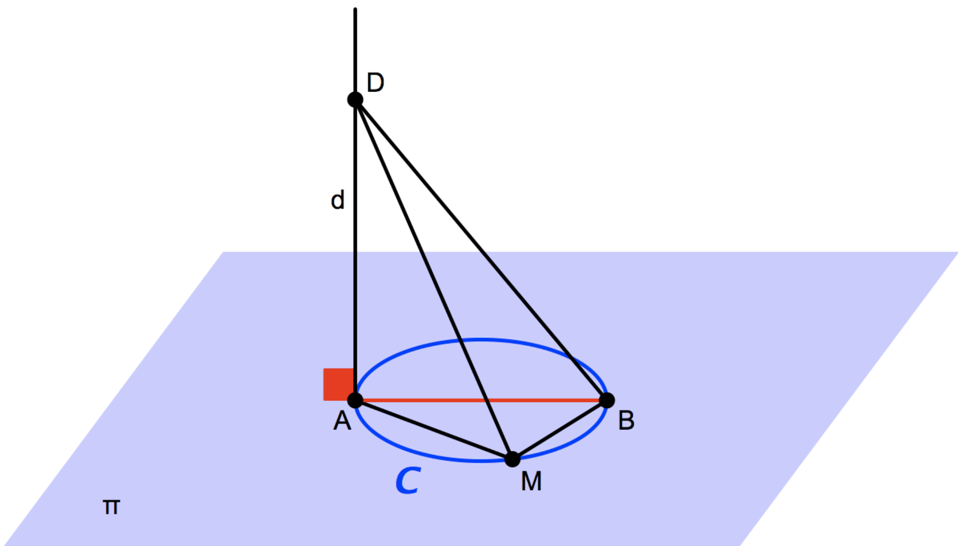
   b) Déduisez-en que les droites AC et AD sont orthogonales.



---

6. Soit dans un plan π un cercle $\boldsymbol{C}$ de diamètre $[AB]$, et d la droite comprenant A et perpendiculaire au plan π. On désigne par M un point de $\boldsymbol{C}$ distinct de A et de B et par D un point de d distinct de A.

   Démontrez que les plans MAD et MBD sont perpendiculaires.



6.6. PLAN MÉDIATEUR D'UN SEGMENT

Définition

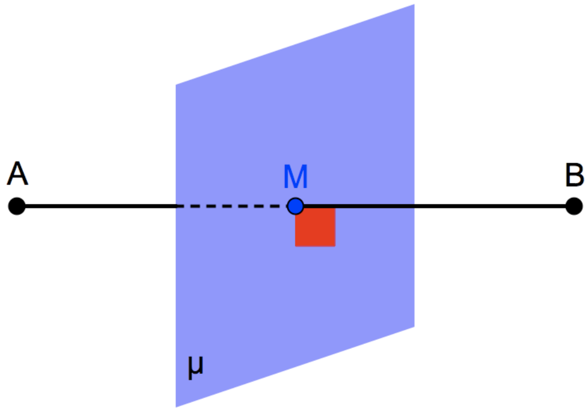
Le plan médiateur d'un segment est le plan perpendiculaire à ce segment et comprenant son milieu.

Soit un segment [AB] de milieu M .

μ est le plan médiateur de [AB]

$\Leftrightarrow$

$\mu \perp [AB]$ et $M \in \mu$



Propriétés

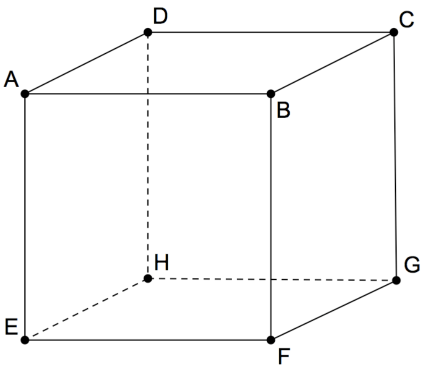
- Le plan médiateur d'un segment est la réunion de toutes les médiatrices de ce segment.
- Le plan médiateur d'un segment est le lieu géométrique des points de l'espace équidistants des extrémités de ce segment.

Exercices

1. Démontrez que dans un tétraèdre régulier, deux arêtes gauches sont toujours orthogonales.

2. Voici le cube $ABCDEFGH$.
Soit I le centre de la face $ADEH$; soit J le centre de la face $ABCD$ et soit K le milieu du segment $[IJ]$.

   Démontrez que le plan médiateur de $[IJ]$ est le plan AKG .



3. Dans le même cube, montrez que :

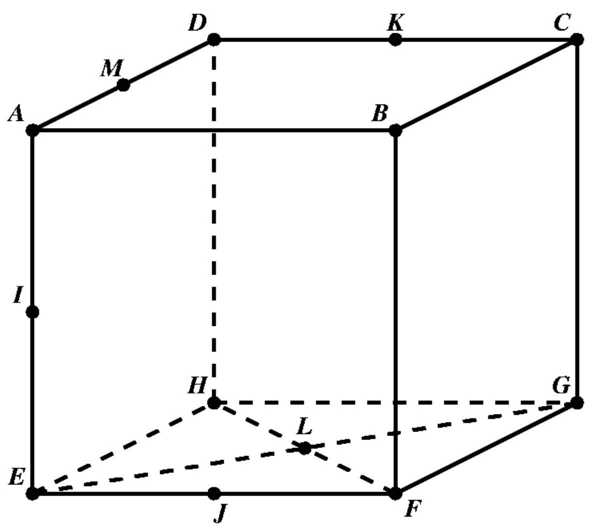
   a) le triangle CFH est equilatéral ;

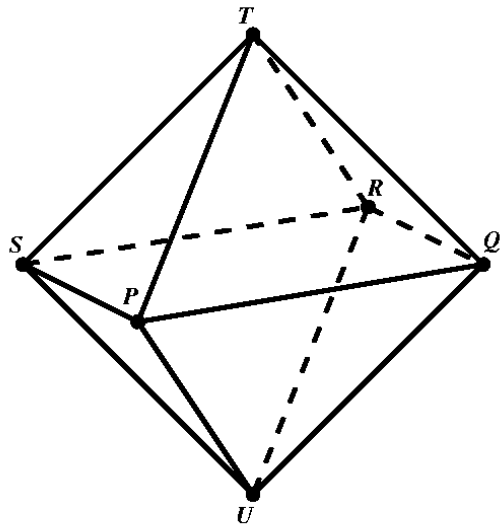
   b) les points A , G et I appartiennent au plan médiateur du segment CF et au plan médiateur du segment CH .

   c) la droite AG est orthogonale au plan CFH et qu'elle passe par I .

6.7. ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE : EXERCICES VARIÉS

6.7.1. Analyse d'un cube et d'un octaèdre régulier





Dans le cube …

1. Quelle est la position relative des droites AB et CG ?
   Préciser, en justifiant, s'il y a orthogonalité ou perpendicularité.

2. Mêmes questions pour les droites AG et DF ; EG et BL ; EG et DL ; DL et BL ; AC et EF ; EG et DB ; IJ et DG ; IJ et EH ; IJ et MK ; IJ et IK ; IJ et ID ; IJ et HB .

3. La droite EG est-elle perpendiculaire au plan DBH ?
   Même question pour la droite AG et le plan EDB .

4. Quelle est la position relative des plans ADF et BCE ? Préciser, en justifiant, s'il y a perpendicularité. Si les plans sont sécants, préciser la droite d'intersection.

Dans l'octaèdre régulier …

Quelle est la position relative :

1. des droites ST et QU (justifier) ;

2. de la droite TU et du plan PQR (préciser s'il y a perpendicularité et justifier) ;

3. des plans QST et PQR (préciser s'il y a perpendicularité et justifier) ; mêmes questions pour les plans PST et QRU .

6.7.2. Exercices variés

1. Voici un cube et un octaèdre régulier. Dans chacun des cas suivants, déterminez la position relative des deux droites (précisez s'il y a orthogonalité ou non et justifiez).

   a) MK et HF

   b) DF et EG

   c) KL et ME

   d) MG et KE

   e) BH et CE

   f) KJ et EF

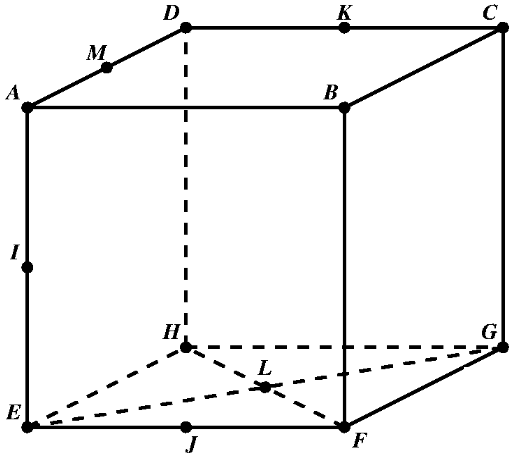
   g) KJ et HG

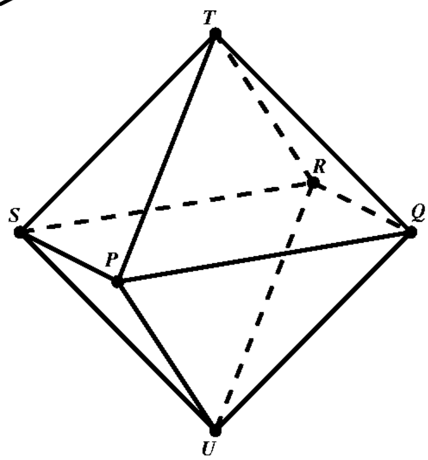
   h) MI et AB

   i) ST et RU

   j) SQ et TU

   k) TP et RU





---

2. Dans le cube, démontrez que la droite DF est perpendiculaire au plan BEG . Justifiez ensuite que les plans DBF et BEG sont perpendiculaires.

---

3. Dans l'octaèdre régulier, démontrez que la droite SQ est perpendiculaire au plan PTR . Justifiez ensuite que les plans SQR et PTR sont perpendiculaires.

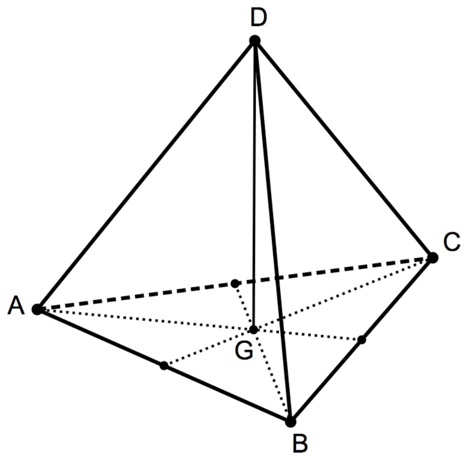
---

4. Dans l'octaèdre régulier, démontrez que les plans STQ et PTR sont perpendiculaires. Quelle est leur droite d'intersection ?

---

5. Dans l'octaèdre régulier, démontrez que les plans SRU et PQT sont parallèles (revoyez votre cours de quatrième).

6. Voici un tétraèdre régulier ABCD . Ses quatre faces sont des triangles équilatéraux.
Soit G le centre de gravité de la face ABC .
Démontrez que la droite DG est perpendiculaire au plan ABC .



---

7. Dans le cube de la question n°1 , construisez la perpendiculaire commune aux droites DB et AE (justifiez). Même question pour les droites DI et BG .

---

8. Soit un plan π . Soit une droite d incluse dans π , et un point P appartenant à π mais n'appartenant pas à d . Par le point P , on élève une droite a perpendiculaire à π . Sur cette droite a , on place un point Q n'appartenant pas à π . Enfin, par le point Q , on mène une droite perpendiculaire à d , coupant celle-ci au point R . Réalisez une figure et démontrez que la droite PR est perpendiculaire à d .

---

9. Dans le tétraèdre régulier de la question n°6, soit M le milieu de l'arête [AB] .

   a) Démontrez que la droite AB est perpendiculaire au plan CMD .

   b) Démontrez que les droites AB et CD sont orthogonales.

   c) Démontrez que les droites AB et DG sont orthogonales.

   d) En suivant une démarche analogue à celle des points (a) et (c) , démontrez que les droites AC et DG sont orthogonales.

   e) Déduisez-en que la droite DG est perpendiculaire au plan ABC .

---

10. Dans le cube de la question n°1 , soit O le point d'intersection de la droite CE et du plan AFH . Démontrez que les points A , O et L sont alignés.

6.7.3. « La poire et l'oeuf »

« Pendant tout le Moyen Âge, un certain nombre d'édifices religieux se sont écroulés totalement ou en partie, sans que ce soit la conséquence d'incendies ou d'opérations militaires. Ces écroulements résultaient principalement de l'audace croissante des architectes qui désiraient construire des édifices de plus en plus hauts, et de l'empirisme de leurs méthodes de construction : méconnaissance des problèmes de fondation, mauvaise qualité de certains matériaux, ignorance des problèmes de vent à grande hauteur. John Harvey estime qu'en Angleterre, on peut apprécier l'augmentation des compétences des architectes en comparant le nombre de tours qui se sont écroulées, pendant les périodes précédant la période de la construction gothique, et ensuite.
En France, où les architectes étaient les plus audacieux, un certain nombre de catastrophes se produisirent dont on connaît les plus mémorables : en 1267, la tour de la cathédrale de Sens s'écroula, en 1272 c'est au tour de la flèche Saint Bénigne de Dijon. En 1284, la voûte de la cathédrale de Beauvais, la plus élevée de toutes, s'effondra, mettant fin à la "course à la hauteur" des architectes français ; plus tard, la flèche de la cathédrale, construite ultérieurement, s'écroula à son tour.

L'un des problèmes fondamentaux auquel les architectes étaient confrontés était celui de l'aplomb (c'est-à-dire l'intersection avec le sol de la verticale passant par un point) ; si la verticalité d'un mur est facilement contrôlable au fil à plomb - lorsqu'il n'y a absolument pas de vent - il est impossible d'utiliser ce moyen pour contrôler l'aplomb d'une flèche qui se trouve en retrait par rapport à la façade, ou d'un élément suspendu dans le vide (et inaccessible) tel qu'une clef de voûte. Or tout défaut de verticalité, dans une de ces flèches qui atteignaient 100 ou même parfois 150 mètres, ou dans l'aplomb d'une voûte construite à 40 mètres du sol ou plus, pouvait avoir des conséquences très graves. Il était donc primordial pour les architectes de cette époque de pouvoir vérifier la tenue de leurs constructions au fur à mesure qu'elles s'élevaient vers ces hauteurs vertigineuses, et, par la suite, de s'assurer qu'elles ne bougeaient pas ; enfin, parfois, il importait de vérifier l'aplomb d'une construction sur laquelle on avait des inquiétudes. L'exemple de la tour de Pise et quelques autres montrent d'ailleurs qu'un défaut d'aplomb n'est pas toujours fatal, à condition toutefois que le mouvement se stabilise. »

Roland BECHMANN,
Pour la Science n°94, août 1985.

Vérifier la verticalité d'une construction : le problème de l'aplomb

« Villard de HONNECOURT n'a pas manqué de réfléchir à cette question importante et a illustré de manière pittoresque la solution qu'il propose. (…)

« Le croquis de la poire et de l'œuf illustre la méthode que Villard de HONNECOURT préconise pour vérifier l'aplomb d'un point inaccessible, comme le sommet d'une flèche d'église ou la clef d'une croisée de voûte. Un successeur de Villard de HONNECOURT commente ainsi le dessin : « Par chu met om on oef dessos one poire par mesure que li poire chiee sur l'uef », ce qui signifie, « Ainsi met-on un œuf sous une poire, de façon à ce que la poire tombe sur l'œuf ». (…)

La poire est manifestement l'illustration du point inaccessible dont on désire déterminer l'aplomb, matérialisé par la chute verticale sur l'œuf qui devra se trouver à l'intersection des deux traits dessinés sur le sol. »

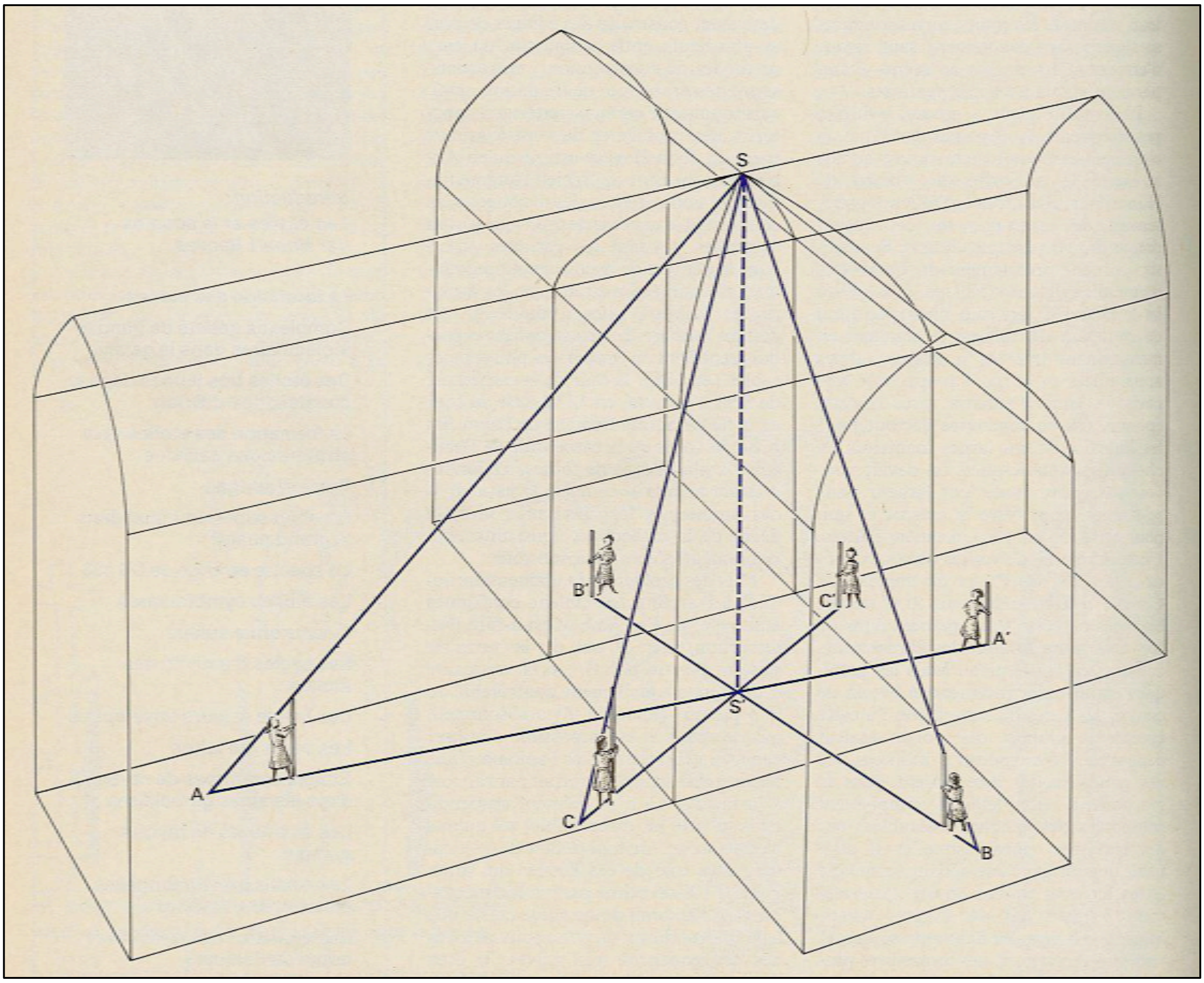
Roland BECHMANN, *Pour la Science n°94*, août 1985.

Comment déterminer ce point ?

Le procédé que décrit Villard de HONNECOURT nécessite l'emploi de mires. Ces bâtons étaient des instruments de visée équipés d'un fil à plomb afin de pouvoir les maintenir dans une position parfaitement verticale.
Le schéma ci-dessous illustre l'utilisation de mires pour déterminer l'aplomb d'une *clé de croisée de transept* (le point S) dans une église.

1. Expliquez en quelques mots quel est le travail auquel se livrent ces ouvriers. Quel est le rôle de chacun ?
   Imaginez comment ils vont procéder pour déterminer le point S' (l'aplomb) sur le sol.

2. D'un point de vue géométrique, pourquoi le point S' est-il bien l'aplomb du point S ? Autrement dit, à l'aide de théorèmes de géométrie, justifiez que la verticale passant par S comprend bien le point S' .



Mais pourquoi « la poire et l'œuf » ?

À nouveau, d'après Roland BECHMANN :

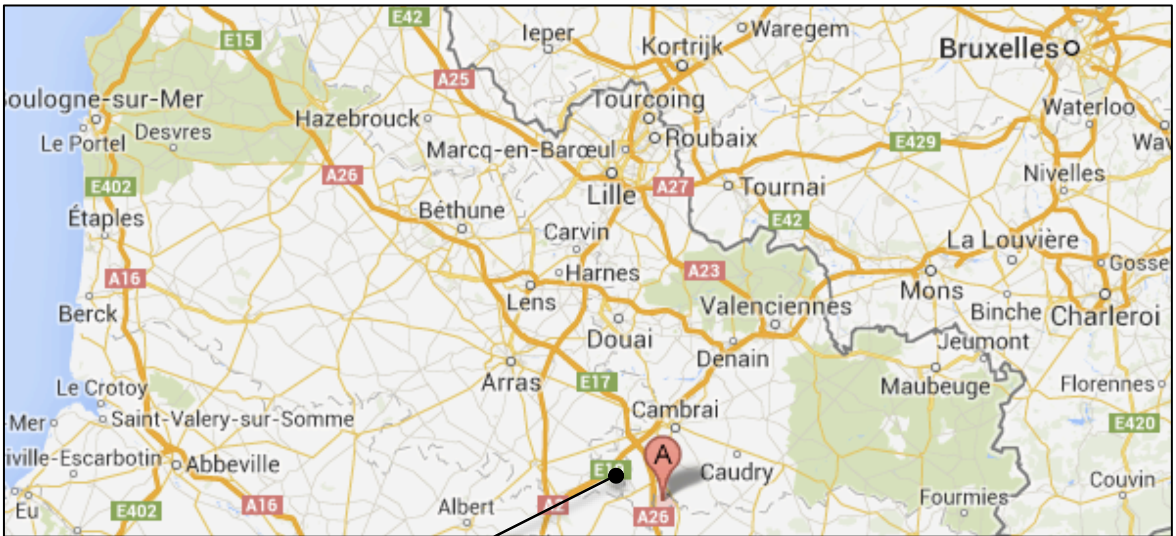
« Pourquoi Villard de HONNECOURT a-t-il choisi d'illustrer cette découverte à l'aide d'une poire qui tombe sur un œuf ? Peut-être existait-il en ce temps-là un jeu populaire consistant à placer un œuf sur le sol juste à l'aplomb d'un objet suspendu très haut. On détachait ensuite l'objet : le gagnant était celui dont l'œuf était écrasé par le projectile, « la poire ». Peut-être Villard a-t-il réfléchi un jour, en regardant tomber une poire, un fruit, inaccessible, à la façon de déterminer le point de chute et aux importantes applications pratiques de ce problème. Cette interprétation, qui n'est pas sans rappeler l'anecdote de NEWTON découvrant les principes de la gravitation à partir de l'observation de la chute d'une pomme, reste cependant du domaine des hypothèses. »

Possible autoportrait de Villard de HONNECOURT

Qui était Villard ?

« Villard, né autour de l'an 1200, est originaire du village de Honnecourt-sur-Escaut situé près de Cambrai.
Comme les compagnons de son temps, il fait son apprentissage en allant de ville en ville et de chantier en chantier. Il deviendra plus tard *magister latomus*, c'est-à-dire maître d'œuvre, profession qui englobe le métier d'architecte. Son activité professionnelle couvre les années 1225 à 1250.
Les hommes de métier de l'époque voyageant beaucoup, nous connaissons, grâce à son *Carnet*, quelques-unes des étapes de son périple : Vaucelles, où il travailla à la construction de l'abbaye cistercienne, Cambrai, où il assista à « l'élévation du chœur de Notre-Dame de Cambrai », Reims, Laon, Chartres et Lausanne, mais également, vers 1235 la Hongrie, où il édifia à Košice, la cathédrale dédiée à sainte Élisabeth de Hongrie. »

Source : Wikipédia

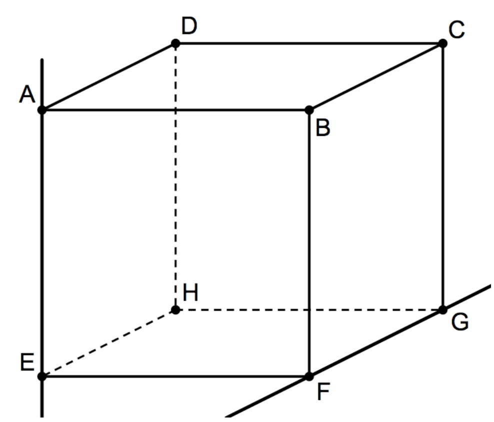


Honnecourt-sur-Escaut

6.7.4. Perpendiculaire commune à deux droites gauches

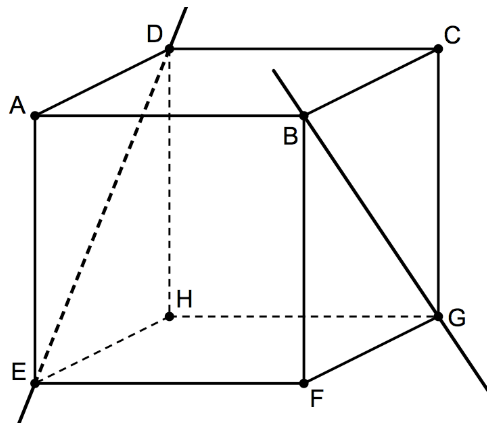
Voici des représentations de cubes, de tétraèdres réguliers et d'octaèdres réguliers.
Construisez la *perpendiculaire commune* à chacune des paires de droites indiquées. Justifiez vos constructions.

①



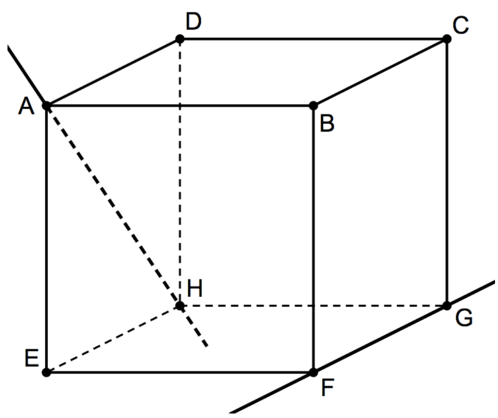
AE et FG

②



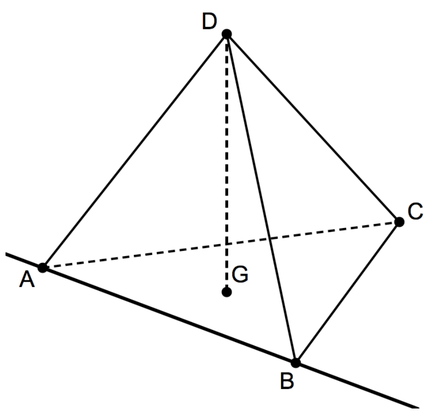
DE et BG

③



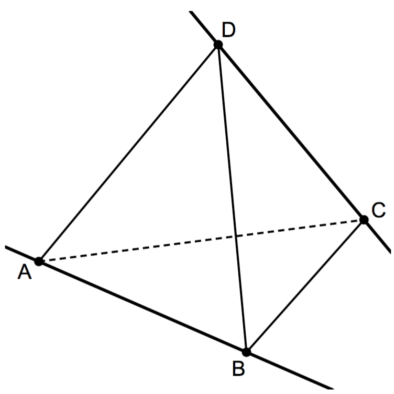
AH et FG

④



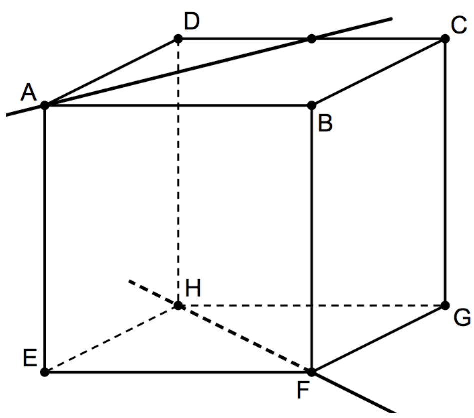
AB et DO

⑤



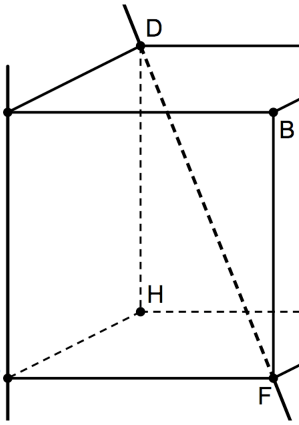
AB et CD

⑥



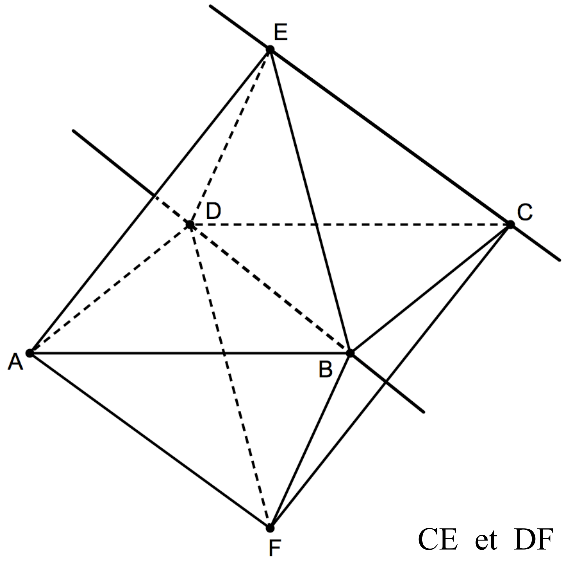
AM et FH

⑦



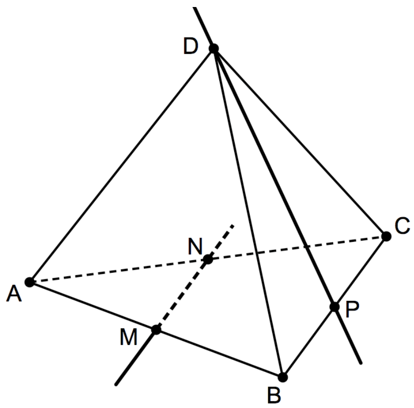
AB et DF

⑧



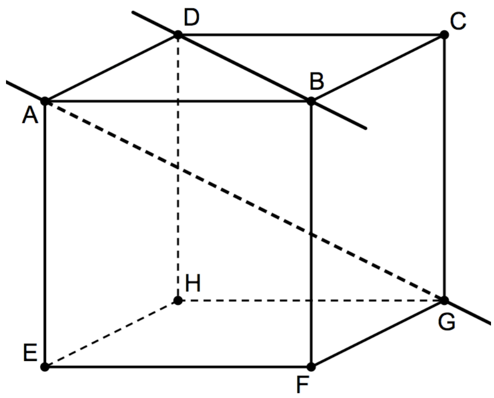
CE et DF

⑨



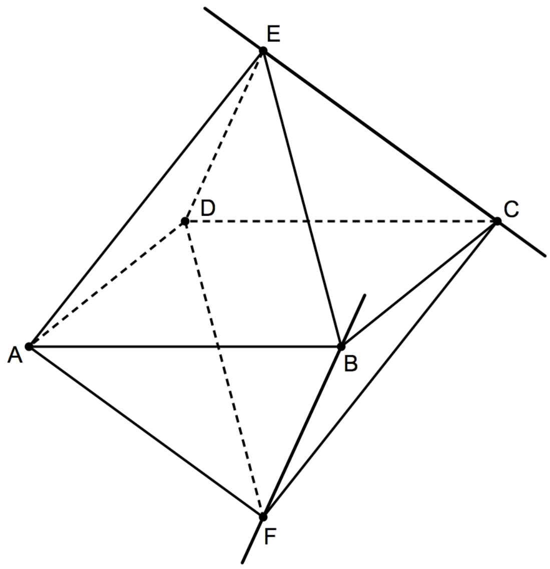
DP et MN

⑩



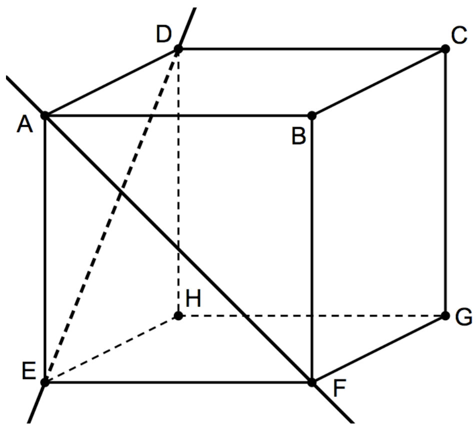
AG et BD

①①



BF et CE

①②



AF et DE

Déterminer la perpendiculaire commune à deux droites gauches permet notamment, en géométrie analytique, de calculer la distance entre ces deux droites.

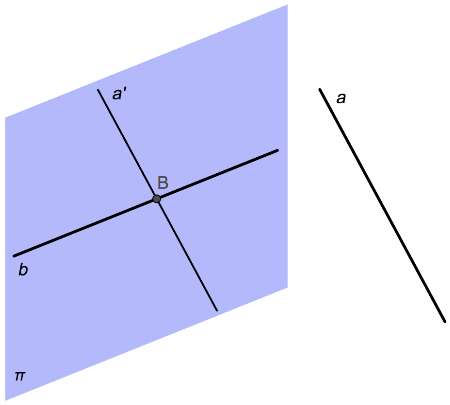
Parfois, il est facile de trouver une perpendiculaire commune. Quand c'est plus difficile, il est utile de disposer d'une démarche générale.

Démarche pour construire la perpendiculaire commune à deux droites gauches

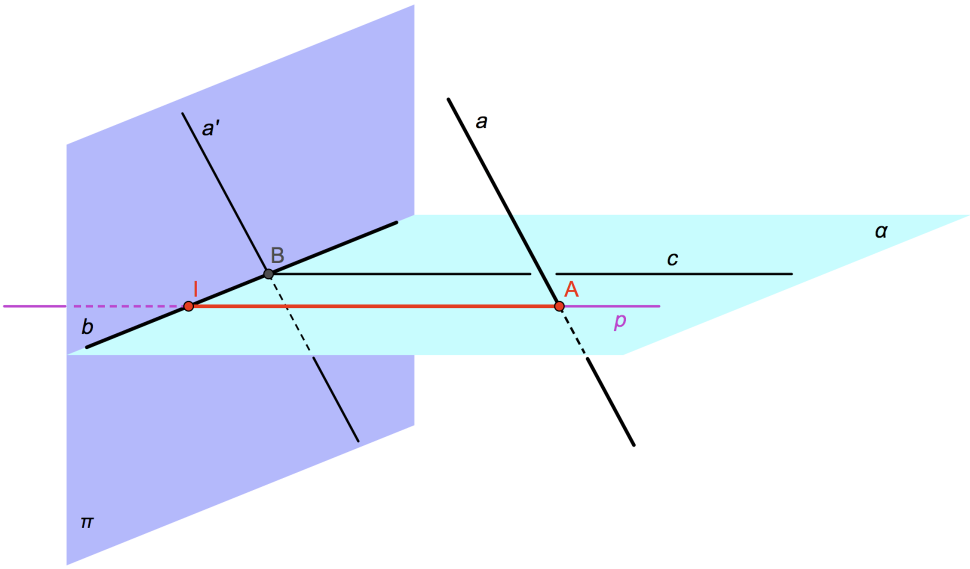
Soient deux droites gauches a et b.

1. Par un point B de la droite b, on mène la droite a' parallèle à la droite a.

   On considère ensuite le plan π déterminé par les droites b et a'.



2. Par le point B, on mène la droite c perpendiculaire au plan π.
   On considère ensuite le plan α déterminé par les droites b et c.



3. On détermine le point de percée A de la droite a dans le plan α.
   Par le point A, on trace la droite p parallèle à la droite c.

La droite p est la perpendiculaire commune aux droites a et b.

En effet :

1° p est perpendiculaire à b car
- p est orthogonale à b (car $p \parallel c$ et $c \perp b$)
- p coupe b car p et b sont incluses dans α et ne sont pas parallèles.

2° p est perpendiculaire à a car
- p est orthogonale à a (car $a \parallel a'$ et $p \perp a'$ puisque $p \parallel c$ et $c \perp a'$)
- p coupe a au point A.

Table des matières