Matrices et déterminants

1. Définition d'une matrice

On appelle matrice à p lignes et à n colonnes tout tableau rectangulaire dont les éléments sont des nombres réels disposés en p lignes de n nombres.

Exemples

Les tableaux de nombres abondent dans de nombreux domaines dont celui des statistiques. Voici un exemple sportif : il s'agit des résultats de quatre clubs de première division du championnat de Belgique de football (saison 2004-2005) à l'issue de la 20$^{\text{ème}}$ journée.

	Matchs joués	Matchs gagnés	Matchs nuls	Matchs perdus	Buts marqués	Buts concédés	Différence de buts	Points
FC Bruges	20	17	2	1	56	13	43	53
Anderlecht	18	13	2	3	42	19	23	41
Charleroi	20	10	5	5	27	21	6	35
La Louvière	19	10	4	5	30	17	13	34

En respectant exactement l'ordre des données du tableau, nous pouvons le résumer à un tableau rectangulaire de nombres appelé « matrice ».
Une matrice est généralement désignée par une lettre majuscule, par exemple R pour « résultats ».

$$R = \begin{pmatrix} 20 & 17 & 2 & 1 & 56 & 13 & 43 & 53 \\ 18 & 13 & 2 & 3 & 42 & 19 & 23 & 41 \\ 20 & 10 & 5 & 5 & 27 & 21 & 6 & 35 \\ 19 & 10 & 4 & 5 & 30 & 17 & 13 & 34 \end{pmatrix}$$

- La matrice ci-dessus est « de genre 4 x 8 » c'est-à-dire avec 4 lignes et 8 colonnes.

- Les nombres figurant dans la matrice sont appelés termes de la matrice. Ils sont désignés par une lettre minuscule affectée de deux indices indiquant la ligne d'abord, la colonne ensuite.

  Ainsi, $r_{28} = 41$ concerne le club d'Anderlecht (2$^{\text{ème}}$ ligne) et correspond au nombre de points que cette équipe a récolté (8$^{\text{ème}}$ colonne). Le terme r_{42} vaut 10 et représente le nombre de matchs gagnés par le club de La Louvière.
  À quel terme correspond le nombre de buts marqués par le Sporting de Charleroi ?
  Cette information figure à la 3$^{\text{ème}}$ ligne et à la 5$^{\text{ème}}$ colonne : $r_{35} = 27$.

- Une matrice peut parfois être notée de la façon suivante :

$$R = (r_{ij})_{1\le i\le 4, 1\le j\le 8}$$

  Cette notation précise que l'indice i , désignant le numéro d'une ligne, est compris entre 1 et 4 ; il y a donc 4 lignes. L'indice j , désignant le numéro d'une colonne, est compris entre 1 et 8 ; il y a donc 8 colonnes.

- Les lignes et les colonnes sont appelés « rangées ».

- Une matrice qui n'a qu'une seule ligne est appelée « matrice-ligne ». Par exemple, si l'on ne s'intéresse qu'aux résultats du FC Bruges, la matrice suivante – de genre 1 x 8 – est suffisante.

$$\begin{pmatrix} 20 & 17 & 2 & 1 & 56 & 13 & 43 & 53 \end{pmatrix}$$

- Une matrice qui n'a qu'une seule colonne est appelée « matrice-colonne ». Si nous ne souhaitons connaître que les points récoltés par les quatre équipes précitées, la matrice suivante – de genre 4 x 1 – est suffisante.

$$\begin{pmatrix} 53 \\ 41 \\ 35 \\ 34 \end{pmatrix}$$

- Une matrice qui a autant de lignes que de colonnes ($p = n$) est une « matrice carrée ».

---

2. Calcul matriciel

2.1. Somme de deux matrices

Le 5 février 2005, lors de la 21ème journée du championnat, les quatre équipes que nous observons réalisèrent les résultats suivants.

Lierse	-	FC Bruges	0-2
La Gantoise	-	Anderlecht	0-0
Charleroi	-	G. Beerschot	1-0
Racing Genk	-	La Louvière	1-0

Une victoire rapportant 3 points, un match nul 1 point et une défaite 0 point, voici la matrice S des résultats de la seule 21ème journée.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quelques remarques à propos de cette matrice :

- les termes de la première colonne sont tous égaux à 1 ; cela qui signifie que chaque équipe a joué un match lors de cette journée (il n'y a pas eu de match remis) ;
- selon le résultat du match (victoire, nul ou défaite), l'équipe hérite de 1 dans la colonne 2 , 3 ou 4 ; les deux autres colonnes reçoivent un 0 ;
- le terme $r_{47} = -1$ est dû au fait que La Louvière n'a pas marqué de but mais en a concédé un ; la différence de but pour ce match est donc négative et égale à - 1 .

Nous pouvons obtenir la matrice des résultats cumulés à l'issue de la 21ème journée en additionnant les matrices R et S . Cette opération est possible car les matrices R et S sont toutes deux de genre 4 x 8 . La matrice-somme R + S sera aussi de genre 4 x 8 et chacun de ces termes sera égal à la somme des termes correspondants des matrices R et S .

$$\begin{pmatrix} 20 & 17 & 2 & 1 & 56 & 13 & 43 & 53 \\ 18 & 13 & 2 & 3 & 42 & 19 & 23 & 41 \\ 20 & 10 & 5 & 5 & 27 & 21 & 6 & 35 \\ 19 & 10 & 4 & 5 & 30 & 17 & 13 & 34 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 18 & 2 & 1 & 58 & 13 & 45 & 56 \\ 19 & 13 & 3 & 3 & 42 & 19 & 23 & 42 \\ 21 & 11 & 5 & 5 & 28 & 21 & 7 & 38 \\ 20 & 10 & 4 & 6 & 30 & 18 & 12 & 34 \end{pmatrix}$$

Soit T la matrice telle que T = R + S . Nous avons par exemple

- $t_{35} = r_{35} + s_{35} = 27 + 1 = 28$ traduisant le fait que Charleroi, qui avait déjà marqué 27 buts au cours des 20 premières journées, et qui en a marqué 1 lors de la 21ème journée, en totalise maintenant 28 .

- $t_{18} = r_{18} + s_{18} = 53 + 3 = 56$ traduisant le fait que Bruges, qui avait déjà engrangé 53 points au cours des 20 premières journées, et qui a remporté une victoire lors de la 21ème journée, en totalise maintenant 56 .

En général, si nous additionnons deux matrices A et B :

$$A + B = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & a_{ij} & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & b_{ij} & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & a_{ij} + b_{ij} & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

<u>Définition</u> : la somme de deux matrices A et B de genre p x n est une matrice C de genre p x n telle que

$$\forall i \in \{1,2,...,p\} \text{ et } \forall j \in \{1,2,...,n\} : \ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

<u>Exemples</u>

- $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ est impossible à réaliser car les matrices sont de genres différents.

2.2. Produit d'une matrice par un réel

Dans un supermarché, nous avons noté les prix au litre de trois marques d'eau minérale.

	Prix en euro par litre
Spa Reine	0,51
Saint Amand	0,52
Chaudfontaine	0,48

Nous pouvons former la matrice des prix : $P = \begin{pmatrix} 0{,}51 \\ 0{,}52 \\ 0{,}48 \end{pmatrix}$.

Si nous souhaitons connaître la matrice des prix Q pour les bouteilles courantes de 1 litre et demi, il suffit de multiplier chaque terme de la matrice P par 1,5 . Nous noterons :

$$Q = 1{,}5.P = 1{,}5.\begin{pmatrix} 0{,}51 \\ 0{,}52 \\ 0{,}48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}765 \\ 0{,}78 \\ 0{,}72 \end{pmatrix}$$

En général, si nous multiplions une matrice A par un réel k :

$$k.A = k.\begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & a_{ij} & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & k.a_{ij} & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

<u>Définition</u> : le produit d'une matrice A de genre p x n par un réel k est une matrice B de genre p x n telle que

$$\forall i \in \{1,2,...,p\} \text{ et } \forall j \in \{1,2,...,n\} : b_{ij} = k.a_{ij}$$

<u>Exemples</u>

- $3.\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 18 & 6 \end{pmatrix}$

- $-2.\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -10 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

- Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$.

  En multipliant cette matrice par (-1) , nous obtenons la matrice - A , matrice opposée de la matrice A : $-1.A = -1.\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} = -A$.

  La notion de matrice opposée permet de définir la soustraction de deux matrices (soustraire revient à ajouter l'opposée) : M – A = M + (-A) .

2.3. Produit de deux matrices

Deux personnes veulent acheter de l'eau minérale selon les quantités indiquées dans le tableau suivant.

	Spa Reine	Saint Amand	Chaudfontaine
Albert	10	4	2
Bernard	5	8	6

Les prix de ces eaux diffèrent selon le supermarché visité.

	Supermarché 1	Supermarché 2
Spa Reine	0,51	0,52
Saint Amand	0,52	0,50
Chaudfontaine	0,48	0,49

Le premier tableau engendre la « matrice des commandes » : $C = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

Le second tableau engendre la « matrice des prix » : $P = \begin{pmatrix} 0{,}51 & 0{,}52 \\ 0{,}52 & 0{,}50 \\ 0{,}48 & 0{,}49 \end{pmatrix}$.

Calculons le prix que paierait Albert

Dans le premier magasin	Dans le deuxième magasin
10 . 0,51 + 4 . 0,52 + 2 . 0,48 = 8,14	10 . 0,52 + 4 . 0,50 + 2 . 0,49 = 8,18

Calculons le prix que paierait Bernard

Dans le premier magasin	Dans le deuxième magasin
5 . 0,51 + 8 . 0,52 + 6 . 0,48 = 9,59	5 . 0,52 + 8 . 0,50 + 6 . 0,49 = 9,54

Ces résultats peuvent être regroupés dans une « matrice des factures »: $F = \begin{pmatrix} 8{,}14 & 8{,}18 \\ 9{,}59 & 9{,}54 \end{pmatrix}$.

Cette matrice a été obtenue en faisant la somme des produits des termes d'une ligne de la matrice C par les termes de même rang d'une colonne de la matrice P.
La matrice F est appelée « matrice produit » de la matrice C par la matrice P.
Nous écrirons :

$$C.P = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0{,}51 & 0{,}52 \\ 0{,}52 & 0{,}50 \\ 0{,}48 & 0{,}49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}14 & 8{,}18 \\ 9{,}59 & 9{,}54 \end{pmatrix} = F$$

<u>En général, pour pouvoir effectuer le produit de deux matrices, il est nécessaire que le nombre de colonnes de la matrice de gauche soit égal au nombre de lignes de la matrice de droite.</u>

Soient donc la matrice A de genre p x n et la matrice B de genre n x q .

$$A.B = \begin{pmatrix} . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ . & . & ... & . \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} . & . & b_{1j} & . \\ . & . & b_{2j} & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & b_{nj} & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + ... + a_{in}.b_{nj} & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

<u>Définition</u> : le produit d'une matrice A de genre p x n par une matrice B de genre n x q est une matrice C de genre p x q dont chaque terme c_{ij} est obtenu en faisant le produit scalaire de la ligne numéro i de la matrice A par la colonne numéro j de la matrice B .

$$\forall i \in \{1,2,...,p\} \text{ et } \forall j \in \{1,2,...,q\} : \ c_{ij} = a_{i1}\,b_{1j} + a_{i2}\,b_{2j} + ... + a_{in}\,b_{nj} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\,b_{kj}$$

<u>Exemples</u>

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 51 & 4 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 4 \\ -30 & -36 & -12 \\ 15 & 18 & 6 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ est impossible à réaliser car le nombre de colonnes de la matrice de gauche est différent du nombre de lignes de la matrice de droite.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$

Exercices

1. Calculer les sommes et combinaisons linéaires suivantes.

a) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 17 & 3 & 2 \\ 4 & -5 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & -1 & 0 \\ -2 & 7 & -6 \end{pmatrix}$

e) $5.\begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} - 4.\begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$

f) $2.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - 3.\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

g) $3.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 5.\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

h) $\sqrt{2}.\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 1 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\begin{pmatrix} 1 & 3\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$

---

2. Calculer les produits suivants.

a) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}^2$

---

3. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer, si possible, les produits suivants :

a) $A \bullet B$ b) $B \bullet C$ c) $C \bullet D$ d) $B \bullet D$ e) $D \bullet B$ f) $D \bullet C$

---

4. Calculer les puissances successives de

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$

5. Résoudre les équations matricielles suivantes où X est la matrice inconnue.

a) $X + \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $4X + 2A = X - B$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

---

6. Résoudre les équations matricielles suivantes où x et y sont les réels inconnus.

a) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

---

7. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle solution de l'équation $A^2 - 4.A + 3.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

---

8. Déterminer les réels x et y pour que la matrice $C = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ x & y \end{pmatrix}$ soit combinaison linéaire des matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

---

9. a) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 5 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

Calculer 1°/ $\sum_{i=1}^{3} a_{ii}$ 2°/ $\sum_{i=2}^{3} a_{ii} - \sum_{i=1}^{2} a_{i,i+1}$

b) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs de α et β pour que A et B commutent ($A \bullet B = B \bullet A$).

(ULB)

---

10. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice X telle que $A + X = B \bullet A$.

(ULB)

2.4. Matrice unité

Question 1 : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice X telle que $A \bullet X = A$.
Vérifier ensuite que $X \bullet A = A$

La matrice X répondant à la question s'appelle **matrice unité d'ordre 2** . Notons-la $\boldsymbol{I_2}$.

Cette matrice est **neutre** pour la multiplication des matrices de genre 2 x 2 . Cela signifie que pour toute matrice A de genre 2 x 2 , nous avons :

$$A \bullet I_2 = A = I_2 \bullet A$$

Question 2 : quelle est la matrice unité d'ordre 3 ?

> En général, la **matrice unité d'ordre *n*** est la matrice carrée d'ordre n où tous les termes de la diagonale principale sont égaux à 1 et où tous les autres termes sont nuls.
>
> *(Les termes de la diagonale principale sont ceux qui ont un numéro de ligne et un numéro de colonne identiques)*

2.5. Matrice inverse d'une matrice carrée

Question : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice X telle que $A \bullet X = I_2$.
Vérifier ensuite que $X \bullet A = I_2$.

> La matrice X est appelée **matrice inverse** de la matrice A et est notée A^{-1} .

Important : pour qu'une matrice soit inversible (càd possède une matrice inverse), il est **nécessaire** qu'elle soit **carrée**. Cette condition n'est cependant **pas suffisante** car il existe des matrices carrées non inversibles ainsi que nous le verrons plus loin.

2.6. Transposée d'une matrice

La transposée de la matrice A de genre m x n est la matrice de genre n x m obtenue en prenant pour lignes les colonnes correspondantes de A .

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, alors sa transposée est ${}^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Cette notion nous servira bientôt, lorsque nous verrons une autre façon de déterminer l'inverse d'une matrice, à l'aide des déterminants

Exercices

1. Déterminer la matrice inverse éventuelle des matrices suivantes..

 a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des réels. Sachant que $\boldsymbol{I_2}$ et $\boldsymbol{O}$ sont respectivement la matrice unité et la matrice nulle de genre 2 x 2 , montrer que :

$$A^2 - (a+d).A + (ad-bc).I_2 = O \ .$$

(FPMs)

3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sachant que I_3 est la matrice unité d'ordre 3 ,

 a) montrer que $A^2 = A + 2.I_3$;

 b) en déduire que $A^{-1} = \frac{1}{2}.(A - I_3)$.

(FPMs)

---

3. Matrices et transformations géométriques

Nous travaillerons toujours en repère orthonormé.

Problème : soit P' l'image d'un point P du plan par une transformation géométrique donnée. Les coordonnées de P étant connues, quelles sont les coordonnées de P' ?

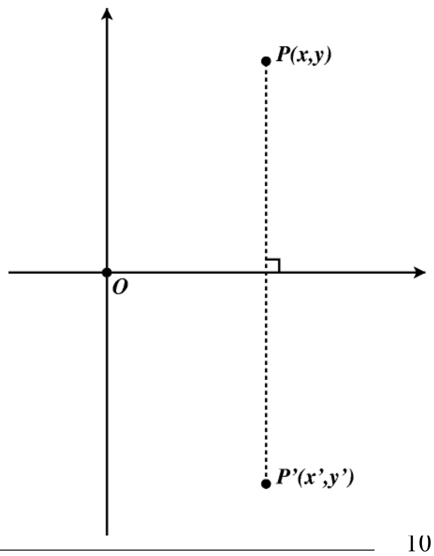
La solution de ce genre de problème ne nécessite pas la connaissance du calcul matriciel. Toutefois, celui-ci s'avère commode pour écrire les formules de passage des coordonnées de P à celles de P'.
De plus, il est souvent utile de caractériser une transformation géométrique par une matrice.

3.1. Exemple

Soit le point P de coordonnées (x,y) .
Quelles sont les coordonnées (x',y') du point P' , image de P par la symétrie orthogonale d'axe x ?

Il est clair que P et P' auront la même abscisse et des ordonnées opposées.
Si nous écrivons les coordonnées de ces deux points à l'aide de matrices lignes, nous obtenons donc :

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \end{pmatrix}$$



Nous pouvons aussi écrire :

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice de la symétrie orthogonale d'axe x est ainsi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarque : nous aurions pu choisir d'écrire les coordonnées des points à l'aide de matrices colonnes ; nous aurions obtenu :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exercices

1. Soit un point P de coordonnées (x,y) . Déterminer les coordonnées (x',y') du point P' , image de P par chacune des transformations suivantes.
   En déduire la matrice de chacune de ces transformations.

   a) la symétrie orthogonale d'axe y ;

   b) la symétrie centrale de centre $O(0,0)$;

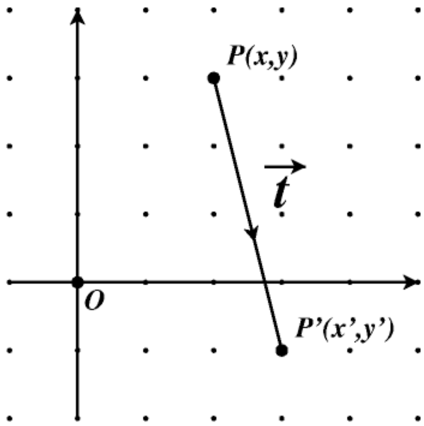
   c) la symétrie orthogonale dont l'axe est la droite d'équation $y = x$.

2. Si l'on compose la symétrie orthogonale d'axe x et la symétrie orthogonale d'axe y , quelle transformation obtient-on ?
   Quel lien existe-t-il entre les matrices de ces trois transformations ?

3.2. Translations

Question : soit le point P de coordonnées (x,y) . Quelles sont les coordonnées (x',y') de l'image P' de P par la translation de vecteur $\vec{t}(a,b)$.

Prenons un exemple numérique. Soit le point $P(2,3)$ et la translation $\vec{t}(1,-4)$.



Pour obtenir les coordonnées de l'image de P par cette translation, il suffit de faire :

$$\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\end{pmatrix}$$

En général, la réponse à notre question est donc :

$$\boxed{\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}}$$

Exercices

1. Soit le point P(-5,2) . Quelles sont les coordonnées du point P' , image de P par la translation $\vec{t}(3,-7)$?

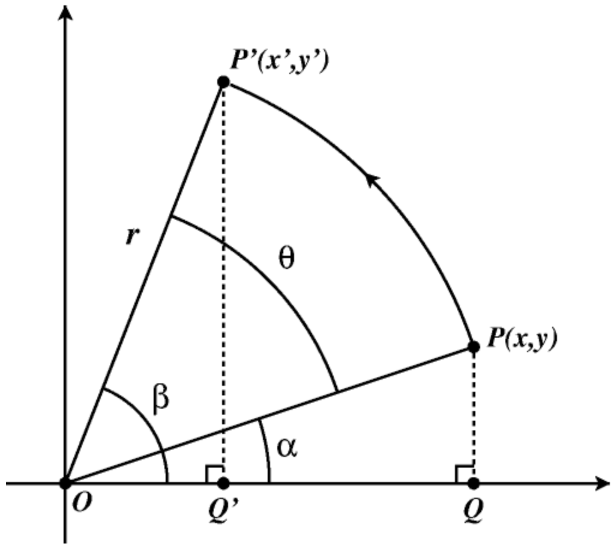
2. Soit le point P(2,3) dans un repère orthonormé R . Si nous faisons subir à ce repère la translation $\vec{t}(1,-4)$, nous obtenons un nouveau repère R' .
   Quelles sont les coordonnées de P dans ce nouveau repère ?

3. Généralisation de l'exercice précédent

   Soit le point P(x,y) dans un repère orthonormé R. Si nous faisons subir à ce repère la translation $\vec{t}(a,b)$, nous obtenons un nouveau repère R' .
   Quelles sont les coordonnées (x',y') de P dans ce nouveau repère ?

3.3. Rotations

Question : soit le point P de coordonnées *(x,y)* . Quelles sont les coordonnées *(x',y')* de l'image *P'* de P par la rotation de centre *O(0,0)* et d'angle θ ?.



Soit α l'angle $Q\hat{O}P$ et β l'angle $Q'\hat{O}P'$. Soit r la distance $|OP|$, qui est aussi la distance $|OP'|$.

Dans le triangle rectangle QOP , nous avons : $\begin{cases} x = r.\cos\alpha \\ y = r.\sin\alpha \end{cases}$.

Dans le triangle rectangle *Q'OP'* , nous avons : $\begin{cases} x' = r.\cos\beta = r.\cos(\alpha+\theta) \\ y' = r.\sin\beta = r.\sin(\alpha+\theta) \end{cases}$.

Utilisant les formules trigonométriques d'addition, nous obtenons successivement :

$$\begin{cases} x' = r.(\cos\alpha.\cos\theta - \sin\alpha.\sin\theta) \\ y' = r.(\sin\alpha.\cos\theta + \sin\theta.\cos\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r.\cos\alpha.\cos\theta - r.\sin\alpha.\sin\theta \\ y' = r.\sin\alpha.\cos\theta + r.\sin\theta.\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x.\cos\theta - y.\sin\theta \\ y' = y.\cos\theta + x.\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x.\cos\theta - y.\sin\theta \\ y' = x.\sin\theta + y.\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

La matrice de la rotation de centre *O(0,0)* et d'angle θ est ainsi $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Exercices

1. Soit le point $P(4,-1)$. Quelles sont les coordonnées du point P' , image de P par la rotation de centre O et d'angle $60°$?

2. Soit le point $P(1,-2)$ dans un repère orthonormé R . Si nous faisons subir à ce repère la rotation de centre O et d'angle $120°$, nous obtenons un nouveau repère R' .
Quelles sont les coordonnées de P dans ce nouveau repère ?

3. Généralisation de l'exercice précédent

   Soit le point $P(x,y)$ dans un repère orthonormé R. Si nous faisons subir à ce repère la rotation de centre O et d'angle θ, nous obtenons un nouveau repère R' .
   Quelles sont les coordonnées (x',y') de P dans ce nouveau repère ?

4. Soit le point $P(-1,-2)$. Quelles sont les coordonnées du point P' , image de P par la transformation $h = g \circ f$ où f est la translation de vecteur $\vec{t}(-1,2)$ et g la rotation de centre O et d'angle $-150°$.

---

4. Déterminant d'une matrice carrée

4.1. Définition

Le déterminant d'une matrice carrée A est le réel noté dét(A) qui lui est associé :

- Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, alors $dét(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

- Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, alors

$$dét(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

- Seules les matrices carrées admettent un déterminant. Une matrice de genre 1 x 1 a pour déterminant le réel contenu dans la matrice.

Exemples (vérifier)

- Si $A = (8)$, alors $dét(A) = 8$
- Si $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, alors $dét(A) = 7 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 43$
- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, alors $dét(A) = -35$ (vérifier)

4.2. Propriétés des déterminants

1) Toute matrice carrée et sa transposée ont même déterminant.
2) Dans le calcul de déterminants, tout résultat établi pour les lignes (colonnes) est valable pour les colonnes (lignes).
3) Si on permute deux rangées d'une matrice carrée, le déterminant change de signe.
4) Si on multiplie par un réel tous les éléments d'une rangée d'une matrice carrée, alors le déterminant de la matrice est multiplié par ce réel.
5) Lorsque tous les éléments d'une rangée d'une matrice carrée sont des multiples d'un même réel, alors, dans le calcul du déterminant, ce réel peut être mis en évidence.

6) Lorsqu'on ajoute aux éléments d'une rangée d'une matrice carrée une même combinaison linéaire des éléments correspondants d'autres rangées parallèles qui, elles, restent inchangées, on obtient une matrice qui a même déterminant que la première.

7) Le déterminant d'une matrice carrée est nul si
   - Tous les éléments de la matrice sont nuls
   - Tous les éléments d'une rangée sont nuls
   - Deux rangées parallèles sont identiques
   - Deux rangées parallèles sont proportionnelles
   - Une rangée est combinaison linéaire des rangées parallèles

8) Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments de sa diagonale principale.

4.3. Mineurs et cofacteurs

1) Une matrice carrée A est dite
   - <u>régulière</u> si dét (A) ≠ 0
   - <u>singulière</u> si dét (A) = 0

2) Le **mineur** de l'élément a_{ij} de la matrice carrée A est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne et la colonne qui se croisent en a_{ij} . Notation M^{ij} .

3) Le **cofacteur** de l'élément a_{ij} de la matrice carrée A est le produit du mineur M^{ij} par $(-1)^{i+j}$. Notation : A^{ij} .

4) Le déterminant d'une matrice carrée est égal à la somme des produits des éléments d'une rangée par les cofacteurs correspondants.

5) L'**adjointe** de la matrice A est la transposée de la matrice obtenue en remplaçant chacun de ses éléments par son cofacteur. Notation : adj (A) .

6) Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice carrée A soit **inversible** est qu'elle soit régulière. De plus :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{dét(A)} \cdot adj(A)}$$

<u>Exercice</u>

Déterminer la matrice inverse de chacune des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Systèmes d'équations linéaires

5.1. Vocabulaire et notations

1) Un système de m équations linéaires à n inconnues, noté (s), est un ensemble de m équations du premier degré en chacune de ces n inconnues.

2) Une solution de (s) est un n-uple de réels qui vérifient les équations de (s).

3) Résoudre le système (s), c'est déterminer l'ensemble S de toutes les solutions de (s).

4) Deux systèmes sont équivalents s'ils ont les mêmes solutions.

5) Un système échelonné est un système dont le nombre de variables diminue à chaque ligne.

5.2. Propriétés

1) Si on multiplie une équation d'un système par un réel non nul, les solutions du système ne changent pas.

2) Si on ajoute à une équation un multiple non nul d'une autre équation, les solutions du système ne changent pas.

5.3. Résolution d'un système d'équations linéaires

1) **Méthode de substitution** (méthode abordée dans le chapitre « Géométrie analytique de l'espace »).

2) **Méthode de Gauss (méthode du pivot)** : l'idée est de transformer le système en un système échelonné équivalent.

Exemple — Ecriture matricielle simplifiée

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 13 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 13 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

$E_2 \to E_2 - 2E_1$ et $E_3 \to E_3 - 4E_1$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 13 \\ 3x_2 - 5x_3 = -28 \\ 2x_2 - 11x_3 = -57 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 13 \\ 0 & 3 & -5 & -28 \\ 0 & 2 & -11 & -57 \end{array}\right)$$

$E_3 \to E_3 - 2/3 \cdot E_2$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 13 \\ 3x_2 - 5x_3 = -28 \\ -23/3 \cdot x_3 = -115/3 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 13 \\ 0 & 3 & -5 & -28 \\ 0 & 0 & -23/3 & -115/3 \end{array}\right)$$

La dernière équation fournit la solution $x_3 = 5$. En remplaçant dans la deuxième, on trouve $x_2 = -1$. La première équation donne enfin $x_1 = 2$. $S = \{(2,-1,5)\}$.

3) Système de **Cramer**

- Un système de Cramer est un système d'équations linéaires comprenant autant d'équations que d'inconnues et dont la matrice est régulière.

- <u>Résolution</u> : appliquer les formules de Cramer $x_i = \dfrac{dét(A_i)}{dét(A)}$ où A est la matrice du système et A_i la matrice obtenue en remplaçant dans A la i-ème colonne par celle des termes indépendants.

<u>Exemple</u>

Résoudre le système $\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 = -9 \\ 2x_1 + 4x_2 = 26 \end{cases}$.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -9 & -6 \\ 26 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-36+156}{28+12} = \frac{120}{40} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -9 \\ 2 & 26 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{182+18}{28+12} = \frac{200}{40} = 5$$

<u>Exercices</u>

Résoudre chacun des systèmes suivants par la méthode de Gauss et par la méthode de Cramer.

1. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 13 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 21 \\ x_2 + 3x_3 = 16 \\ 5x_2 - 2x_3 = 20 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 4 \\ -5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -11 \\ 5x_1 - 4x_2 = 5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_2 - 3x_3 = 7 \\ -2x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 14 \end{cases}$

5.4. Discussion d'un système d'équations linéaires

Dans certains cas, les coefficients des inconnues du système dépendent de paramètres. Les solutions du système en dépendront donc évidemment aussi. Pour certaines valeurs particulières des paramètres, le système pourra même être impossible ou indéterminé.
Discuter un système paramétrique, c'est chercher l'ensemble des solutions d'après les valeurs des paramètres.

Exemple

Résoudre et discuter le système d'inconnues x_1, x_2 et x_3 en fonction du paramètre m.

$$\begin{cases} x_1 + mx_2 + x_3 = 2m \\ mx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + mx_2 + (m+1)x_3 = m \end{cases}$$

Calculons d'abord le déterminant de la matrice A des coefficients des inconnues (vérifier).

$$dét(A) = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & m+1 \end{vmatrix} = m \cdot (1 - m^2)$$

Ce déterminant possède trois racines : $m = -1$, $m = 0$ et $m = 1$.

Nous savons que $dét(A)$ est le dénominateur dans les formules de Cramer. Dès lors, il faudra distinguer le cas où $dét(A) \neq 0$ de celui où $dét(A) = 0$.

Premier cas : $dét(A) \neq 0$ c'est-à-dire $m \neq -1$ et $m \neq 0$ et $m \neq 1$.

Dans ce cas, le système admet une solution unique donnée par les formules de Cramer.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2m & m & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & m & m+1 \end{vmatrix}}{dét(A)} = \frac{m \cdot (m+1)}{m \cdot (1-m^2)} = \frac{m+1}{(1-m)\cdot(1+m)} = \frac{1}{1-m}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2m & 1 \\ m & 0 & 1 \\ 1 & m & m+1 \end{vmatrix}}{dét(A)} = \frac{m \cdot (-2m^2 - m + 1)}{m \cdot (1-m^2)} = \frac{m \cdot (-2) \cdot (m+1) \cdot (m - \frac{1}{2})}{(1-m)\cdot(1+m)} = \frac{m \cdot (-2m+1)}{1-m}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 2m \\ m & 1 & 0 \\ 1 & m & m \end{vmatrix}}{dét(A)} = \frac{m \cdot (m^2 - 1)}{m \cdot (1-m^2)} = \frac{(m-1)\cdot(m+1)}{(1-m)\cdot(1+m)} = -1$$

Le système admet l'ensemble de solutions : $\boxed{S = \left\{\left(\frac{1}{1-m}, \frac{m(1-2m)}{1-m}, -1\right)\right\}}$.

Deuxième cas : $d\acute{e}t(A)=0$ c'est-à-dire $m=-1$ ou $m=0$ ou $m=1$.

❶ Si $m=-1$

Le système s'écrit : $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$.

- Si l'on soustrait la deuxième équation de la première, on obtient une équation équivalente à la troisième.
- Si l'on additionne membre à membre les deux premières équations, on trouve $x_3 = -1$.

Le système se ramène donc à : $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$.

Il est simplement indéterminé et admet comme ensemble de solutions :

$$\boxed{S = \{(\lambda, \lambda+1, -1)\} \quad (\lambda \in R)}$$

❷ Si $m=0$

Le système s'écrit : $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$. Il se ramène à $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

Il est simplement indéterminé et admet comme ensemble de solutions :

$$\boxed{S = \{(\lambda, \lambda, -\lambda)\} \quad (\lambda \in R)}$$

❷ Si $m=1$

Le système s'écrit : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$.

Les deux premières équations étant incompatibles, le système est impossible. $\boxed{S=\varnothing}$.

<u>Exercice</u> : résoudre et discuter les systèmes suivants où m est un paramètre.

1. $\begin{cases} (m+1)x_1 - 2x_2 = 4 \\ (m-1)x_1 - 3x_2 = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} mx_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = m \\ 2x_1 + mx_2 = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = m \\ mx + y + z = m^2 \end{cases}$ (ULB, 1994)

4. $\begin{cases} x + my + m^2 z = m^3 \\ m^3 x + m^2 y + mz = 1 \\ x + 2my + 3m^2 z = 4m^3 \end{cases}$ (ULg, 1996)