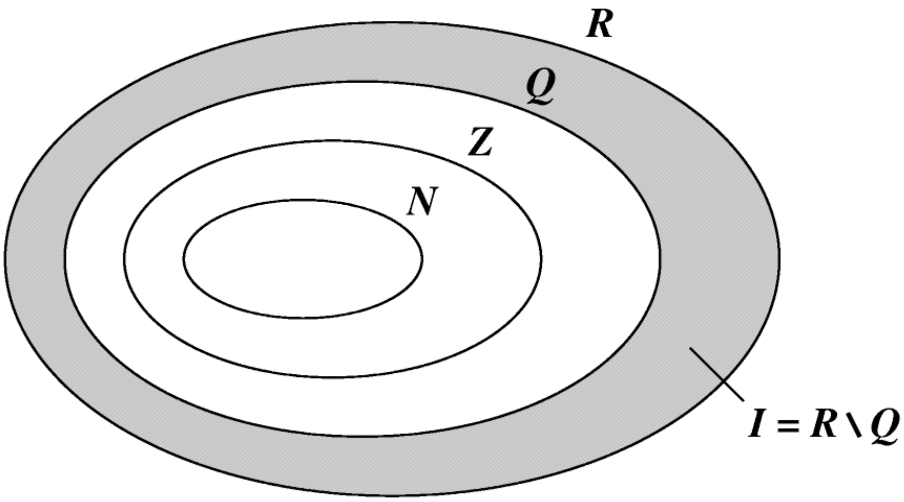
Nombres réels

1. Ensembles de nombres

Tout au long de l'apprentissage des mathématiques, apparaissent successivement différentes sortes de nombres :

- les **naturels**, qui servent à dénombrer les objets (ensemble **N** : 0 , 1 , 2 , 3 , …) ;
- les **entiers**, qui sont les naturels et leurs opposés (ensemble **Z** : … , -2 , -1 , 0 , 1 , …) ;
- les **rationnels**, qui sont les quotients de deux entiers, le diviseur n'étant pas nul ; ces nombres ont une écriture décimale limitée, ou illimitée et périodique (ensemble **Q** : … , ½ , - ¾ , 2.32 , 0.333… , 5 , …)
- les **irrationnels**, qui ne sont pas rationnels ; ces nombres ont une écriture décimale illimitée et non périodique (ensemble I : … , π , $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, …)
- les **réels**, qui sont tous les naturels, entiers, rationnels et irrationnels.

Le diagramme de Venn ci-dessous montre comment ces ensembles sont inclus les uns dans les autres. La zone grisée correspond à l'ensemble des irrationnels.



2. À propos des nombres rationnels

2.1. Écriture fractionnaire et écriture décimale

Nous savons qu'un nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers. C'est ainsi que l'écriture fractionnaire $\frac{20}{6}$ désigne un nombre rationnel.

Cette fraction peut être simplifiée afin d'obtenir la *forme irréductible* de la fraction : $\frac{10}{3}$.

La forme est dite irréductible lorsque les valeurs absolues du numérateur et du dénominateur sont deux nombres *premiers entre eux* (c'est-à-dire dont le seul diviseur commun est 1).

Tout nombre rationnel possède une écriture décimale :

- limitée : $\frac{13}{8} = 1{,}625$
- ou illimitée périodique : $\frac{10}{3} = 3{,}333333...$

Une écriture décimale est dite illimitée périodique lorsque la partie décimale (à droite de la virgule) présente comporte une séquence de chiffres qui se reproduit indéfiniment.

Voici un autre exemple : $\frac{5273}{999} = 5{,}278278278...$

2.2. Tout décimal illimité périodique est un entier ou un rationnel

Est-il légitime d'écrire $0{,}999999\ldots = 1$?

Le nombre $0{,}999999\ldots$ peut être vu comme une somme illimitée de termes d'une suite géométrique. Après avoir mis $\frac{9}{10}$ en évidence, et constaté que la raison vaut $\frac{1}{10}$ et est donc inférieure à 1, nous pouvons appliquer la formule vue dans le chapitre sur les suites numériques.

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + ... = \frac{9}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + ...\right) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = 1$$

Intervalles emboîtés

Le résultat précédent fait apparaître $0{,}999999\ldots$ à l'intersection d'une suite d'intervalles $\left[1 - \frac{1}{10^n}, 1\right]$ emboîtés comme ceci : $\left[\frac{9}{10}, 1\right] \supset \left[\frac{99}{100}, 1\right] \supset \left[\frac{999}{1000}, 1\right] \supset ...$

Le nombre 1 se trouve dans chacun de ces intervalles, et la longueur de ceux-ci tend vers 0.
Il faut donc identifier $0{,}999999\ldots$ et 1, sinon il y aurait entre eux une distance strictement positive, ce qui contredirait le fait que la longueur des intervalles tend vers 0.
Cette identification revient à admettre que ces intervalles ont une intersection réduite à un nombre unique. Inversement, que l'intersection se réduise à un seul nombre donne le statut de nombre à $0{,}999999\ldots$: ce nombre unique est donc 1.

Écriture fractionnaire d'un décimal illimité périodique

Tout décimal illimité périodique peut s'écrire comme la limite d'une somme et comme une fraction à termes entiers. Prenons comme exemple $0{,}6494949\ldots$

$$\frac{6}{10} + \frac{49}{1000} + \frac{49}{100000} + \frac{49}{10000000} + ... = \frac{6}{10} + \frac{49}{1000} \cdot \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + ...\right)$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{49}{1000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{6}{10} + \frac{49}{1000} \cdot \frac{100}{99} = \frac{6}{10} + \frac{49}{990} = \frac{643}{990}$$

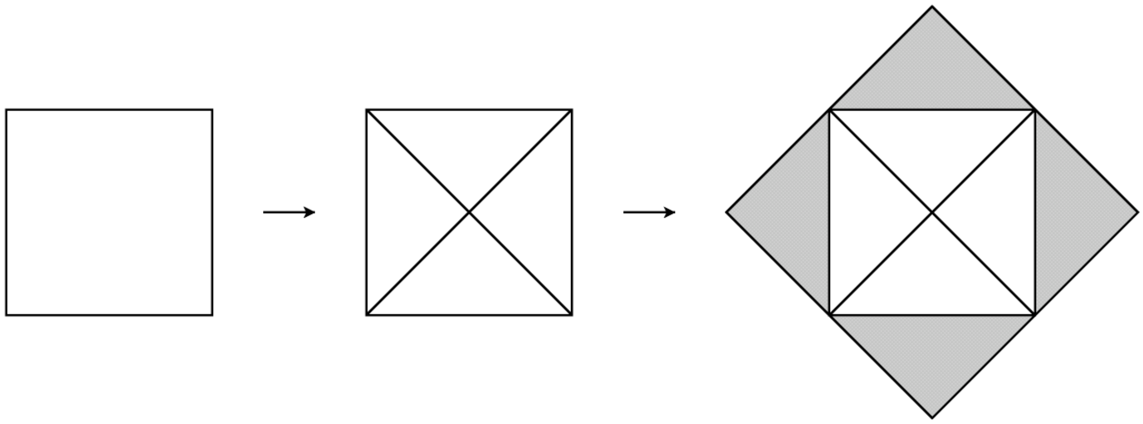
3. À propos des nombres irrationnels

3.1. Pourquoi $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Le nombre $\sqrt{2}$ peut apparaître dans le cadre du problème suivant :

Un carré d'aire égale à 2 existe-t-il ? Comment le construire ?

Une solution bien connue consiste à construire un carré de côté 1 , à le découper en quatre parties isométriques suivant ses diagonales, à dupliquer les quatre triangles rectangles isocèles ainsi obtenus, et à les « rabattre » vers l'extérieur.



Le carré ainsi construit a pour côté un nombre x dont le carré vaut 2 : $x^2 = 2$. On décide de désigner ce nombre par le symbole $\sqrt{2}$ (*radical* de 2 ou *racine carrée positive* de 2).
Si l'on souhaite obtenir une écriture décimale de ce nombre, il faut procéder par encadrements successifs, en encadrant $\sqrt{2}$ par deux nombres dont les carrés encadrent 2 :

$1 < \sqrt{2} < 2$	car	$1 < 2 < 4$
$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$	car	$1{,}96 < 2 < 2{,}25$
$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$	car	$1{,}9881 < 2 < 2{,}0164$
$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$	car	$1{,}999396 < 2 < 2{,}002225$

etc.

En poursuivant de cette façon, l'on peut obtenir une approximation du radical de 2 , aussi précise qu'on le souhaite :

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4142135623731\ldots$$

Cette écriture décimale est certainement illimitée. Pourquoi ?
Raisonnons par l'absurde : supposons qu'elle soit limitée, avec par exemple 3 comme dernier chiffre significatif. Si nous élevons le nombre au carré, nous n'obtiendrons pas 2 , mais un résultat dont l'écriture décimale se termine par 9 . Le même raisonnement peut être tenu pour n'importe quel autre dernier chiffre significatif.

Dans cette écriture décimale illimitée, aucune période ne semble apparaître. Il est donc légitime de se demander si ce nombre est rationnel.

Preuve par l'absurde de l'irrationalité du radical de 2

De nouveau, raisonnons par l'absurde et supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel.

Nous pouvons alors écrire $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ avec $a \in N$ et $b \in N_0$, les nombres a et b étant *premiers entre eux* (il est en effet toujours possible d'obtenir une fraction $\frac{a}{b}$ *irréductible*).

Dès lors, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \rightarrow a^2 = 2b^2$.

Cela signifie que a^2 est un nombre pair, et donc que a est pair aussi.

Nous avons alors $a = 2n$ avec $n \in N$.

Il suit : $a^2 = 2b^2 \rightarrow (2n)^2 = 2b^2 \rightarrow 4n^2 = 2b^2 \rightarrow b^2 = 2n^2$. Donc b^2 est pair, et b aussi.

Ce résultat est absurde, car si a et b sont pairs tous les deux, ils ont le diviseur 2 en commun, or ils sont premiers entre eux.
Le nombre $\sqrt{2}$ ne peut être rationnel, nous dirons qu'il est *irrationnel*.

D'autres nombres irrationnels

Le nombre $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel *algébrique*, c'est-à-dire qu'il est solution d'une équation polynomiale dont les coefficients sont des nombres entiers ($x^2 - 2 = 0$).
Les nombres $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, … sont d'autres irrationnels algébriques.

Il existe des nombres irrationnels *transcendants*, qui ne sont solutions d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers. C'est le cas du célèbre nombre π , et du nombre e qui sera étudié en sixième année.

Nous admettrons qu'entre deux nombres rationnels, il y a toujours un irrationnel. Réciproquement, entre deux irrationnels, il y a toujours un rationnel.

3.2. Axiome des intervalles emboîtés

Nous venons de voir que $\sqrt{2}$ pouvait être approché par des encadrements successifs. Nous pouvons ainsi considérer une suite d'intervalles fermés emboîtés, contenant chacun $\sqrt{2}$:

$$[1,2] \supset [1.4,1.5] \supset [1.41,1.42] \supset [1.414,1.415] \supset ...$$

L'intersection de tous ces intervalles, dont la longueur tend vers 0 , est le nombre irrationnel $\sqrt{2}$. En fait, tout nombre réel, qu'il soit rationnel ou non, se trouve aussi à l'intersection d'une telle suite de segments.

Réciproquement (axiome des intervalles emboîtés) :

Il existe un et un seul nombre x contenu dans tous les intervalles d'une suite infinie d'intervalles fermés emboîtés dont la longueur tend vers 0 .

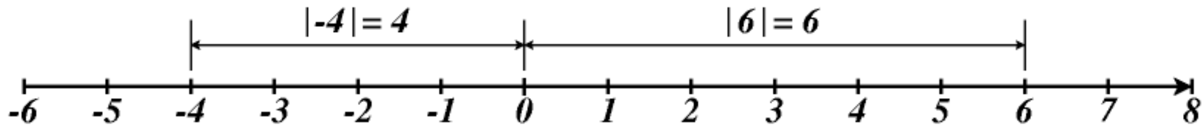
4. Valeur absolue d'un réel

4.1. Définition

La valeur absolue d'un nombre réel négatif est l'opposé de ce nombre. La valeur absolue d'un nombre réel positif est ce nombre lui-même.

$$|x| = \begin{cases} -x & si \quad x \leq 0 \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Une valeur absolue est donc toujours positive. C'est pourquoi la valeur absolue d'un nombre réel peut également être définie comme étant la *distance* entre ce nombre et 0 sur la droite des réels (une distance est en effet toujours positive).



4.2. Propriétés

❶ $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

❷ $\forall x \in R : |-x| = |x|$

❸ $\forall x \in R : |x| \leq x$

❹ $\forall x, y \in R : |x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)

❺ $\forall x, y \in R : |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

❻ $\forall x \in R, \forall y \in R_0 : \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

❼ $\forall x \in R, \forall \varepsilon \in R_0^+ : |x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \Leftrightarrow x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$

❽ $\forall x \in R, \forall \varepsilon \in R_0^+ : |x| \geq \varepsilon \Leftrightarrow (x \leq -\varepsilon) \vee (x \geq \varepsilon) \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty[$

Les propriétés ❼ et ❽ sont utiles pour résoudre des inéquations. Voici deux exemples.

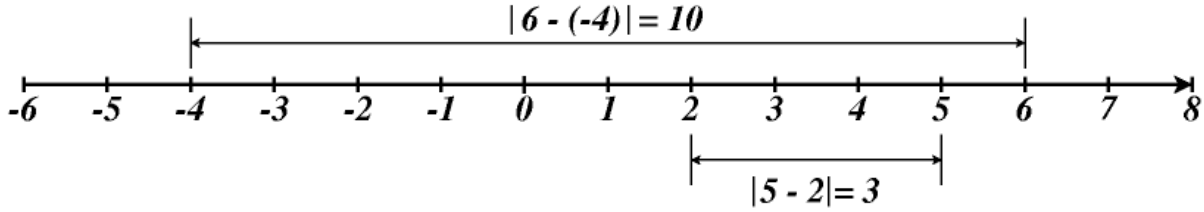
1) Résoudre $|x - 5| \leq 8$.
   D'après la propriété ❼, cette inéquation est équivalente à $-8 \leq x - 5 \leq 8 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 13$.
   $S = [-3, 13]$.

2) Résoudre $|x - 6| \geq 1$.
   D'après la propriété ❽, cette inéquation est équivalente à
   $(x - 6 \leq -1) \vee (x - 6 \geq 1) \Leftrightarrow (x \leq 5) \vee (x \geq 7)$. $S =]-\infty, 5] \cup [7, +\infty[$.

4.3. Distance entre deux nombres réels

La distance entre les nombres réels a et b est égale à $|a-b|$.

La figure suivante montre la distance entre les réels 6 et -4 et celle entre les réels 2 et 5 .



4.4. Approximations

Soient deux réels a et b , et un réel strictement positif ε .

Le réel a est une approximation à ε près du réel b	$\Leftrightarrow$	$|a-b|<\varepsilon$
	$\Leftrightarrow$	$b-\varepsilon<a<b+\varepsilon$

Le réel ε , généralement assez proche de 0 , est appelé le *niveau d'approximation*.

Exemples

- le réel 2,98 est une approximation à 0,01 près de 3 car $|3-2{,}98|<0{,}01$;
- le réel 3,1416 est une approximation à 0,0001 près de π car $|\pi-3{,}1416|<0{,}0001$.

Opérations sur les réels et approximations

Exemple 1 : encadrer $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ à 10^{-3} près.

Partons d'encadrements de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$ à 10^{-4} près.
On a $1{,}4142<\sqrt{2}<1{,}4143$ et $1{,}7320<\sqrt{3}<1{,}7321$.
Par conséquent $3{,}1462<\sqrt{2}+\sqrt{3}<3{,}1464$.
Nous avons ainsi encadré $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ à $2\cdot10^{-4}$ près, et a fortiori à 10^{-3} près.

Exemple 2 : encadrer $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ à 10^{-3} près.

Partons des mêmes encadrements que ci-dessus.
Les produits membre à membre donnent : $2{,}4493944<\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}<2{,}44970903$.
Nous en tirons que : $2{,}4493<\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}<2{,}4498$. Nous avons ainsi une approximation du produit à $5\cdot10^{-4}$ près, et a fortiori à 10^{-3} près.

5. Exercices

1. Ecrire les nombres suivants sous la forme d'une fraction à termes entiers.

   a) 3,27272727… b) 2,59999999… c) 5,123123123…

---

2. Démontrer qu'entre deux nombres rationnels, il existe toujours au moins un autre nombre rationnel.

---

3. Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue x .

   a) $|x-8|=3$

   b) $|x+5|\leq 3$

   c) $|x-1|>2$

   d) $|2x-1|-0{,}1\leq 0{,}9$

   e) $|1-2x|-|x+2|=3$

   f) $|2-3x|+|x+1|=1$

   g) $||x-5|+2|=8$

   h) $1<|x-2|<4$

---

4. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f(x)=\dfrac{1}{|x-1|-|2x+1|}$.

---

5. Résoudre les équations et inéquation suivantes dans R^2 . Il s'agit de déterminer, dans le plan, tous les points dont les coordonnées (x,y) vérifient l'égalité ou l'inégalité donnée.

   a) $|y|=x$ b) $y=x\cdot|x|$ c) $|x-2|+|y+3|<4$

---

6. Démontrer que $\forall x,y\in R:|x+y|\leq|x-3|+|y+3|$.

---

7. Démontrer que $|x-y|\geq||x|-|y||$.

---

8. Déterminer la distance entre les réels a et b :

   a) $a=3{,}21$ et $b=-5$ b) $a=-10{,}5$ et $b=-24{,}3$

---

9. Si le réel a est une approximation du réel b au centième près, le réel a est-il aussi une approximation du réel b au dixième près ?

---

10. Encadrer $\sqrt{5}+\pi$ et $\sqrt{5}\cdot\pi$ à 10^{-3} près.

Olympiades Mathématiques Belges

11. Le nombre de racines réelles de l'équation $|x-2|+|x-3|=1$ est

    (A) 0 (B) 2 (C) 2 (D) 3 (E) plus de 3 (1990)

12. Soit la fonction $f : R\setminus\{1\} \to R : x \mapsto x + \dfrac{1}{|x-1|}$.

Quel est le domaine de définition de la fonction $g(x) = 1 + \dfrac{1}{|f(x)|}$?

(A) R (B) $R\setminus\{1\}$ (C) $R\setminus\left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ (D) $R\setminus\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},1\right\}$ (E) $R\setminus\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

(1988)

---

13. Si x est tel que $0 < x < 1$ et que $f(x) = 2x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{|x|}{x} - \dfrac{|x-1|}{x-1}$, alors nécessairement

(A) $f(x) < 0$ (B) $f(x) > 0$ (C) $f(x) < 1$ (D) $f(x) > 1$
(E) aucune de ces réponses n'est correcte

(1989)

---

14. Si $|x| + x + y = 10$ et $x + |y| - y = 12$, que vaut $x + y$?

(A) -2 (B) 2 (C) $\dfrac{18}{5}$ (D) $\dfrac{22}{3}$ (E) 22

(1988)

---

15. Quels que soient les nombres réels x et y tels que $y = 1 + \dfrac{1}{|x-1|}$, le nombre réel $1 - \dfrac{1}{y}$ est égal à :

(A) $\dfrac{1}{|x|}$ (B) $\dfrac{|x-1|}{1+|x-1|}$ (C) $\dfrac{|x|-|x-1|}{|x|}$ (D) $\dfrac{|x|}{|x-1|}$ (E) $\dfrac{1}{|x-1|+1}$

(1988)

---

16. Soit $p \in \,]0,15[$. Le minimum de l'expression $|x-p| + |x-15| + |x-p-15|$, où x est un nombre quelconque, vaut :

(A) 5 (B) 10 (C) 14 (D) 15 (E) 20

(1993)

Faculté Polytechnique de Mons

17. Soient les fonctions $f(x) = |x| + |x-1|$ et $g(x) = |x+1|$ définies pour tout $x \in R$. Résolvez l'équation $f(x) = g(x)$ de deux façons : graphique et algébrique.

(2005)

---

18. Construire la courbe d'équation $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$. Vérifier que la somme des longueurs des segments découpés sur les axes par toute tangente à la courbe égale une constante.

(1977)