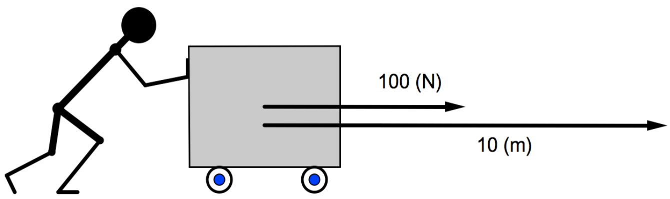
5. Produit scalaire de deux vecteurs

5.1. Introduction : travail d'une force

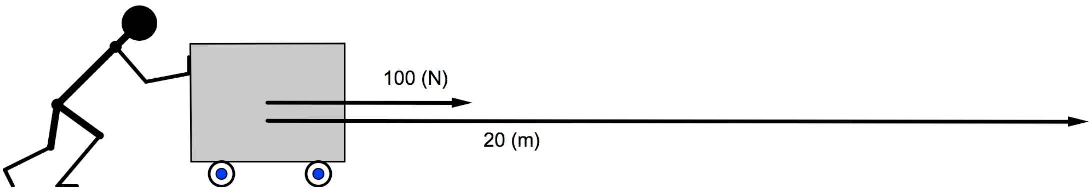
C'est à l'aide d'une notion utilisée par les physiciens que nous allons définir le produit scalaire de deux vecteurs.

Imaginons trois personnes qui poussent - chacune droit devant elle - une certaine masse. Supposons que les forces exercées soient constantes et possèdent la même direction (horizontale) et le même sens (de gauche à droite) que les déplacements subis par les masses.

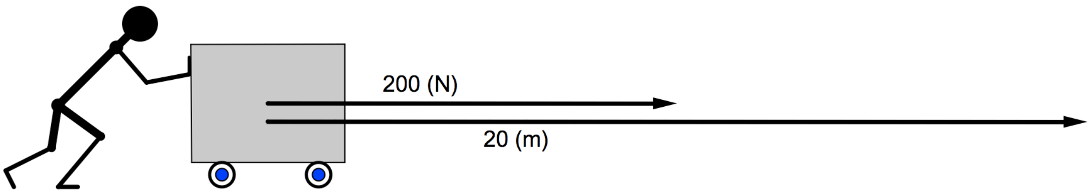
A



B



C



La personne A exerce une force de 100(N) et déplace la charge de 10(m). La personne B exerce également une force de 100(N) mais déplace la charge de 20(m).
Intuitivement, on peut dire que B a dépensé deux fois plus d'énergie que A .
La troisième personne C exerce une force de 200(N) pour déplacer une charge sur une distance de 20(m) . Elle dépense deux fois plus d'énergie que B et quatre fois plus que A .

Les physiciens ont introduit une grandeur pour rendre compte de cette dépense d'énergie.
Il fallait que cette grandeur soit proportionnelle à la fois à l'intensité de la force exercée et à la longueur du déplacement effectué. Dans le cas où les vecteurs « force » et « déplacement » sont de même direction et de même sens, il était donc naturel de définir le « travail d'une force » comme le produit de l'intensité de la force par la longueur du déplacement (unité : le « joule » (J)). Désignant le travail par la lettre W (« work »), nous avons ainsi :

$$W_A = 100(N).10(m) = 1000(J)$$

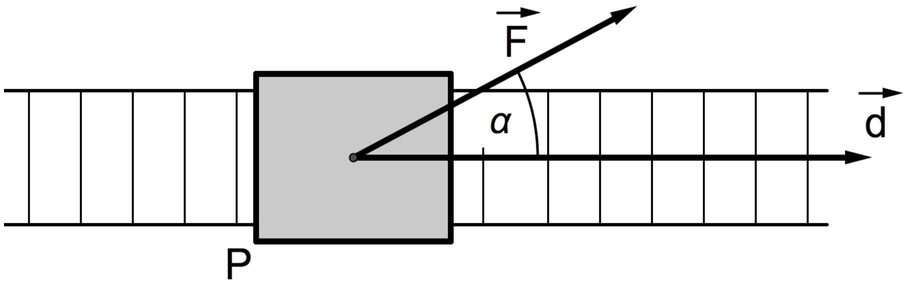
$$W_B = 100(N).20(m) = 2000(J)$$

$$W_C = 200(N).20(m) = 4000(J)$$

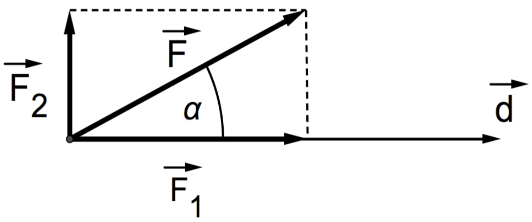
Nous avons bien : $W_B = 2.W_A$ et $W_C = 2.W_B = 4.W_A$.

Que se passe-t-il si la force exercée n'a pas la même direction que le déplacement de l'objet ? Imaginons un mineur qui pousse un chariot sur des rails rectilignes dans un plan horizontal.

Supposons que l'ouvrier ne soit pas en mesure de se placer derrière le chariot mais soit contraint de le pousser sur un coin (au point P).
Il exerce alors une force $\vec{F}$ dont la direction fait un certain angle α avec la direction du déplacement du chariot. Soit $\vec{d}$ le vecteur déplacement de celui-ci.



Dans le cas présent, la force exercée par l'ouvrier n'est pas totalement efficace.
En effet, seule la composante $\vec{F_1}$ parallèle aux rails sert effectivement à faire avancer le chariot tandis que la composante $\vec{F_2}$ perpendiculaire aux rails est « perdue ».



Pour calculer le travail, il ne faut tenir compte que de la force «efficace » : $W = \|\vec{F_1}\|.\|\vec{d}\|$.

D'après les relations dans les triangles rectangles, nous savons que $\cos\alpha = \dfrac{\|\vec{F_1}\|}{\|\vec{F}\|}$.

Donc $\|\vec{F_1}\| = \|\vec{F}\|.\cos\alpha$. Par conséquent, le travail est donné par : $W = \|\vec{F}\|.\|\vec{d}\|.\cos\alpha$

L'opération effectuée pour trouver le travail, à savoir multiplier les normes des vecteurs « force » et « déplacement » par le cosinus de l'angle entre ces deux vecteurs, s'appelle **« produit scalaire »** des vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{d}$.

On note $\vec{F} \bullet \vec{d} = \|\vec{F}\|.\|\vec{d}\|.\cos\alpha$ ($\vec{F} \bullet \vec{d}$ se lit « $\vec{F}$ scalaire $\vec{d}$ »).

Ainsi, dans le cas où l'ouvrier exerce une force de $100(N)$ sous un angle α de $30°$ et sur une distance de $10(m)$, le travail vaut :

$$W = 100(N).10(m).\cos 30° = 500\sqrt{3}(J) \approx 866{,}03(J)$$

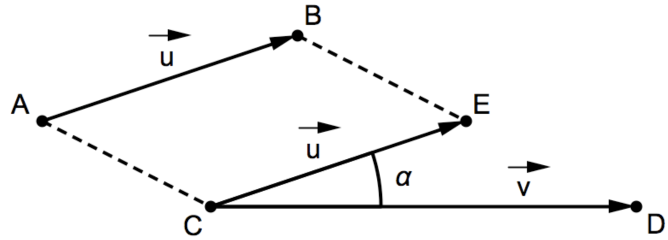
5.2. Définition du produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal au produit de leurs longueurs et du cosinus de leur angle α :

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| . \left\|\vec{v}\right\| . \cos\alpha$$

Précisons la notion d'angle de deux vecteurs non nuls du plan ou de l'espace à l'aide d'un exemple. (*)

Soient les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.



Nous pouvons représenter le vecteur $\vec{u}$ par un segment orienté d'origine C : $\vec{u} = \overrightarrow{CE}$.

L'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'angle $E\hat{C}D$ et une de ses mesures est α .

Conséquences de la définition

- Si les vecteurs sont parallèles et de même sens, leur produit scalaire est égal au produit de leurs longueurs. En effet : $\alpha = 0$ et $\cos 0 = 1$.
- Si les vecteurs sont parallèles et de sens contraires, leur produit scalaire est égal à l'opposé du produit de leurs longueurs. En effet : $\alpha = \pi$ et $\cos \pi = -1$.

Soient deux vecteurs parallèles $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, alors : $\vec{u} \bullet \vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| . \left\|\vec{v}\right\|$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens opposés, alors : $\vec{u} \bullet \vec{v} = -\left\|\vec{u}\right\| . \left\|\vec{v}\right\|$

- Le produit scalaire d'un vecteur par lui-même est appelé « carré scalaire » de ce vecteur et est égal au carré de sa longueur.

Le **carré scalaire** du vecteur $\vec{u}$ est noté $\vec{u}^{\,2}$. On a : $\vec{u}^{\,2} = \vec{u} \bullet \vec{u} = \left\|\vec{u}\right\|^2$.

- Si les vecteurs sont perpendiculaires (orthogonaux), leur produit scalaire est nul et réciproquement. En effet : $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ et $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si leur produit scalaire vaut 0 .
On note : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

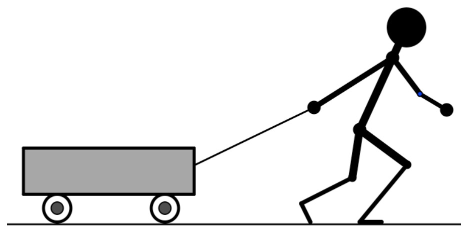
- Si l'un des vecteurs est le vecteur nul, alors le produit scalaire est nul. En effet, une des longueurs sera nulle. En général, quel que soit le vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{u} \bullet \vec{0} = 0$.

(*) Cette notion ne s'applique pas au vecteur nul, car il n'a pas de direction déterminée.

Exercices

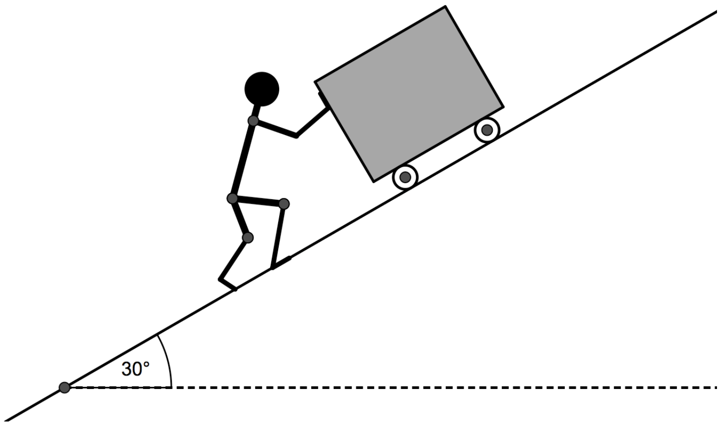
1. Une personne tire un chariot sur un sol horizontal. Elle exerce une force de $250\ (N)$ sur le timon qui forme un angle de $30°$ avec le sol.

   Calculez le travail effectué en tirant le chariot sur une distance de $40(m)$.



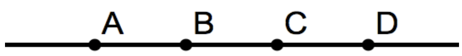
---

2. Sur un plan incliné dont la pente forme un angle de $30°$ avec l'horizontale, une personne pousse vers le haut un chariot pesant $500(N)$.
   Calculez le travail effectué pour compenser la force de gravitation si l'on pousse le chariot sur une distance de $24(m)$.



---

3. On donne quatre points alignés A , B , C et D tels que $|AB| = |BC| = |CD| = 1$.



   Calculez :

   a) $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{BD} \bullet \overrightarrow{DA}$ c) $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{CD}$ d) $\overrightarrow{AD}^2$ e) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BA}$

---

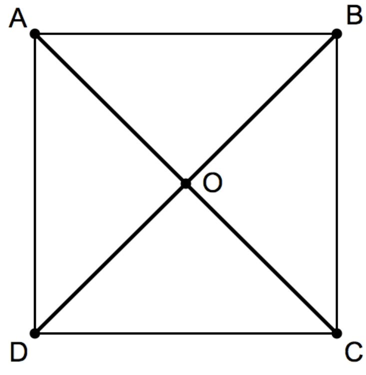
4. Soit un carré ABCD dont les côtés mesurent $4(cm)$ et dont les diagonales se coupent au point O .

   Calculez :

   a) $\overrightarrow{DB} \bullet \overrightarrow{DC}$ d) $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OC}$

   b) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{DC}$ e) $\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OC}$

   c) $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{DC}$



5. Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et α une mesure de l'angle entre ces deux vecteurs. Complétez le tableau suivant.

	$\|\vec{u}\|$	$\|\vec{v}\|$	α	$\cos\alpha$	$\vec{u}\bullet\vec{v}$
❶	3	4	60°		
❷	10	7		-0,5	
❸	2	5			5
❹	6	20			$-60\ .\ \sqrt{3}$
❺		3	30°		$18\ .\ \sqrt{3}$

5.3. Le produit scalaire obtenu par projection orthogonale d'un vecteur sur l'autre

Considérons les vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{OU}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OV}$.

Nous allons voir une façon plus géométrique d'obtenir leur produit scalaire.

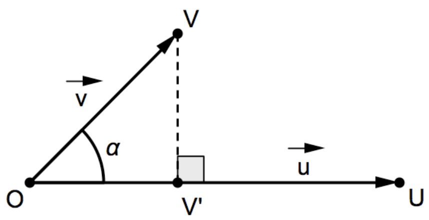
Revenons d'abord à la définition : $\vec{u}\bullet\vec{v} \;=\; \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\alpha$

Premier cas : l'angle entre les deux vecteurs est aigu.

Soit V' la projection orthogonale de V sur OU .

Dans le triangle rectangle OVV' nous avons :

$$\cos\alpha=\frac{\|\overrightarrow{OV'}\|}{\|\overrightarrow{OV}\|}\ .$$

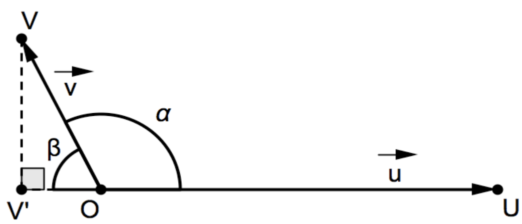


Nous trouvons ainsi : $\vec{u}\bullet\vec{v} \;=\; \|\overrightarrow{OU}\|.\|\overrightarrow{OV}\|.\dfrac{\|\overrightarrow{OV'}\|}{\|\overrightarrow{OV}\|} \;=\; \|\overrightarrow{OU}\|.\|\overrightarrow{OV'}\|$

Second cas : l'angle entre les deux vecteurs est obtus.

Soit à nouveau V' la projection orthogonale de V sur OU.
Dans le triangle rectangle OVV' nous avons :

$$\cos\beta=\frac{\|\overrightarrow{OV'}\|}{\|\overrightarrow{OV}\|}\ .$$



et donc $\cos\alpha=-\dfrac{\|\overrightarrow{OV'}\|}{\|\overrightarrow{OV}\|}$. En effet, $\cos\alpha \;=\; \cos(\pi-\beta) \;=\; -\cos\alpha$.

Nous obtenons ainsi : $\vec{u}\bullet\vec{v} \;=\; \|\overrightarrow{OU}\|.\|\overrightarrow{OV}\|.\left(-\dfrac{\|\overrightarrow{OV'}\|}{\|\overrightarrow{OV}\|}\right) \;=\; -\|\overrightarrow{OU}\|.\|\overrightarrow{OV'}\|$.

Conclusion

Appelons le vecteur $\overrightarrow{OV'}$ « projection orthogonale du vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{u}$ » et notons le $\overrightarrow{proj_u v}$. Nous obtenons :

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \pm \left\| \vec{u} \right\| . \left\| \overrightarrow{proj_u v} \right\|$$

De la même façon, nous aurions pu montrer que :

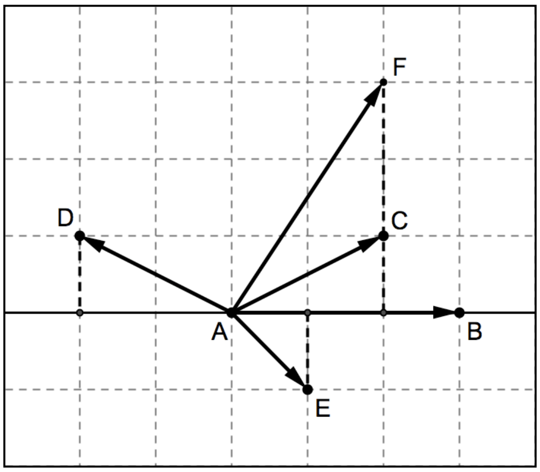
$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \pm \left\| \overrightarrow{proj_v u} \right\| . \left\| \vec{v} \right\|$$

où $\overrightarrow{proj_v u}$ est la projection orthogonale du vecteur $\vec{u}$ sur le vecteur $\vec{v}$.

Le produit scalaire de deux vecteurs s'obtient donc – en valeur absolue – en multipliant la longueur de l'un d'eux par la longueur de la projection orthogonale de l'autre sur le premier. Si l'angle entre les deux vecteurs est aigu, le signe du produit scalaire sera positif ; sinon, il sera négatif.

Exemples

On donne un vecteur $\overrightarrow{AB}$ de longueur 3 .



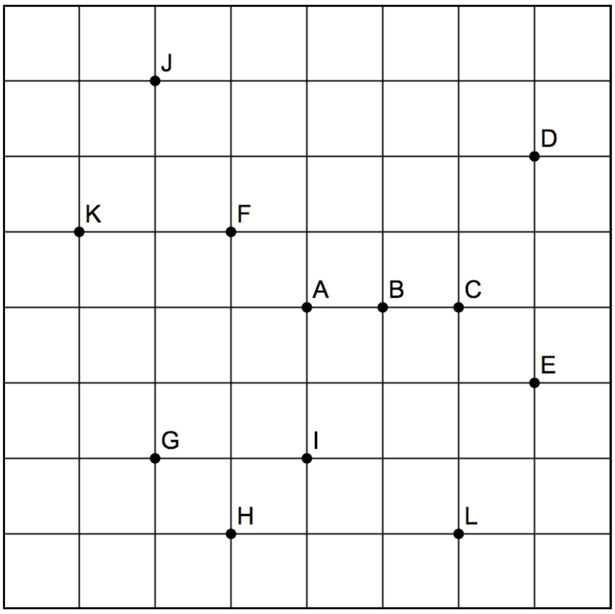
En projetant orthogonalement les autres vecteurs sur AB , nous obtenons les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 6$ b) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AF} = 6$ c) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = -6$ d) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AE} = 3$

e) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{DF} = 12$ f) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD} = -12$ g) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{DE} = 9$ h) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{EF} = 3$

Exercices

1. Voici quelques points placés dans un repère orthonormé du plan.

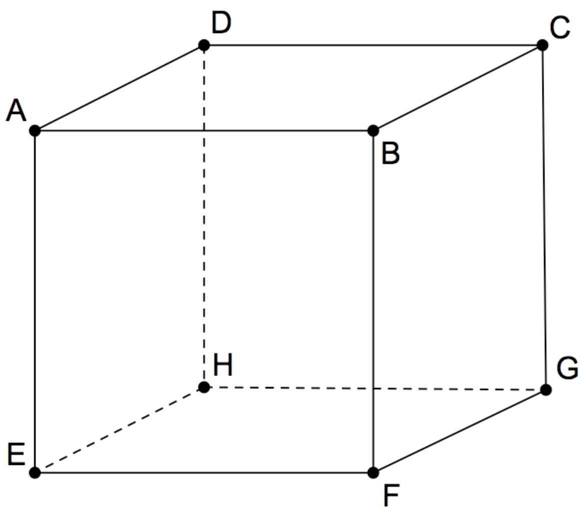


Calculez les produits scalaires suivants sachant que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 1$.

a) $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AL}$ c) $\overrightarrow{GI} \bullet \overrightarrow{KJ}$ d) $\overrightarrow{BE} \bullet \overrightarrow{DE}$ e) $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AE}$

f) $\overrightarrow{FH} \bullet \overrightarrow{AB}$ g) $\overrightarrow{GJ} \bullet \overrightarrow{DE}$ h) $\overrightarrow{KD} \bullet \overrightarrow{IG}$ i) $\overrightarrow{BF} \bullet \overrightarrow{LE}$ j) $\overrightarrow{KI} \bullet \overrightarrow{LC}$

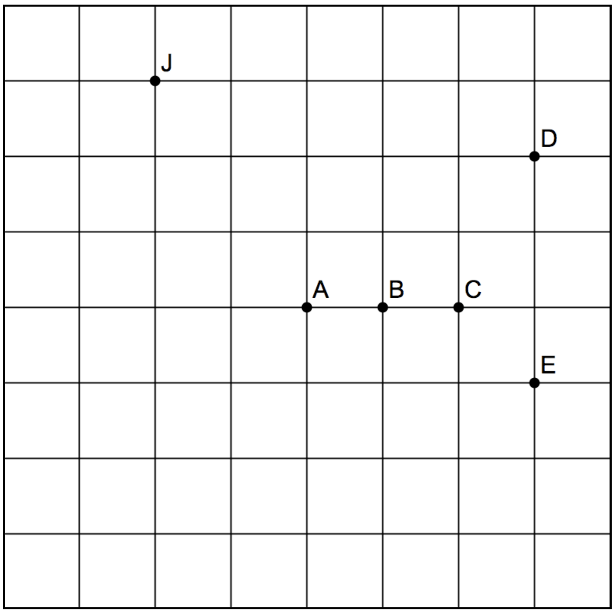
2. Revoici notre cube ABCDEFGH .



Calculez les produits scalaires suivants sachant que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 1$.

a) $\overrightarrow{GF} \bullet \overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{DC} \bullet \overrightarrow{AF}$ c) $\overrightarrow{CG} \bullet \overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{BF} \bullet \overrightarrow{AC}$ e) $\overrightarrow{AG} \bullet \overrightarrow{EC}$

3. Chaque petit carré du quadrillage ci-dessous a pour côté 1 .



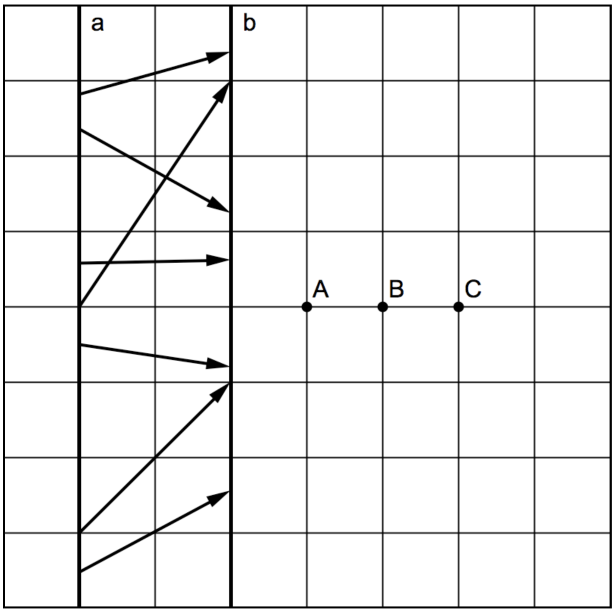
a) Représentez le lieu géométrique des points P tels que $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AP} = 6$.

b) Représentez le lieu géométrique des points Q tels que $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AQ} = -4$.

c) Représentez le lieu géométrique des points R tels que $\overrightarrow{DE} \bullet \overrightarrow{JR} = 18$.

d) Que deviennent ces lieux géométriques dans l'espace ?

e) <u>Propriété « de la cheminée »</u> : que vaut le produit scalaire de $\overrightarrow{AC}$ et d'un vecteur dont l'origine se trouve sur la droite a et l'extrémité sur la droite b (avec $a \,//\, b$) ?



f) Dessinez une « cheminée » de vecteurs - avec les origines sur la droite c et les extrémités sur la droite d - de telle manière que le produit scalaire de $\overrightarrow{AC}$ par l'un quelconque de ces vecteurs soit égal à - 6 .

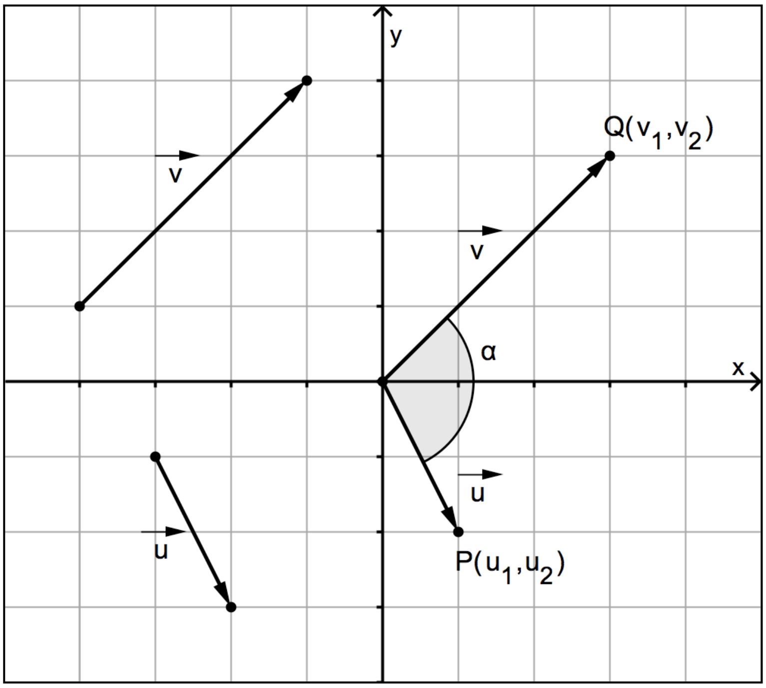
5.4. Produit scalaire de deux vecteurs en fonction de leurs composantes

Nous allons d'abord traiter cette question dans le plan muni d'un repère orthonormé. La démarche est analogue dans l'espace.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dont les composantes sont connues : $\vec{u}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Nous pouvons toujours représenter ces vecteurs par des segments orientés d'origine O .

Soient donc les points P et Q tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$.



Les coordonnées de ces points sont donc : $P(u_1,u_2)$ et $Q(v_1,v_2)$. Soit enfin α l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Dans le triangle OPQ , nous pouvons appliquer le théorème D'AL KASHI (relation au cosinus) :

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 &= \left\|\overrightarrow{OP}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OQ}\right\|^2 - 2.\left\|\overrightarrow{OP}\right\|.\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|.\cos\alpha \\ &= \left\|\overrightarrow{OP}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OQ}\right\|^2 - 2.\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OQ} \qquad \text{(définition du produit scalaire)} \end{aligned}$$

Utilisant la formule de la distance entre deux points (ou de la norme d'un vecteur), nous obtenons :

$$(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 = u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2.\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OQ}$$

$$(u_1^2 - 2.u_1.v_1 + v_1^2) + (u_2^2 - 2.u_2.v_2 + v_2^2) = u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2.\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OQ}$$

Après simplification, il reste :

$$-2\,.\,u_1\,.\,v_1 - 2\,.\,u_2\,.\,v_2 \;=\; -2\,.\,\overrightarrow{OP} \bullet \overrightarrow{OQ}$$

Divisant les deux membres de cette égalité par - 2 , nous trouvons : $\overrightarrow{OP} \bullet \overrightarrow{OQ} = u_1\,.\,v_1 + u_2\,.\,v_2$.

$$\text{Finalement } \vec{u} \bullet \vec{v} = u_1\,.\,v_1 + u_2\,.\,v_2 \; .$$

Avec des calculs tout à fait analogues, nous arriverions à la conclusion suivante :

> Dans un repère orthonormé de l'espace, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ est donné par :
>
> $$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$$

Exemples

- Calculez le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentés dans la figure de la page 24.

  Le graphique nous permet de trouver leurs composantes : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

  Nous obtenons ainsi : $\vec{u} \bullet \vec{v} = 1.3 + (-2).3 = -3$.

- Calculez le produit scalaire des vecteurs de l'espace $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

  Appliquant la formule encadrée, nous trouvons : $\vec{u} \bullet \vec{v} = 2.0 + (-5).(-3) + 11.2 = 37$.

- On donne les points de l'espace A(3,0,5) , B(-8,2,2) et C(6,4,6) . Calculez $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$.

  Calculons d'abord les composantes des vecteurs concernés : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Nous obtenons : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = -11.3 + 2.4 + (-3).1 = -28$.

Exercices

1. On donne les points du plan A(2,6) , B(-3,4) , C(5,0) et D(1,7) .
Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{CD}$ c) $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD}$ d) $\overrightarrow{AB}^2$

---

2. On donne les points de l'espace A(-1,4,0) , B(-3,1,1) , C(0,-3,2) et D(4,4,-6) .
Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{DB} \bullet \overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{BA}$ d) $\overrightarrow{DB}^2$

---

3. Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs sont perpendiculaires ou non.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$;

b) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ avec A(0,4,6) , B(3,9,0) , C(-1,0,4) et D(7,0,8) ;

c) $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ avec A(12,-5,1) , B(0,-1,3) et O l'origine du repère.

---

4. **Dans le plan, équation d'une droite perpendiculaire à une droite donnée**

On donne les points A(1,4) et B(3,7) . Déterminer une équation cartésienne de la droite *d* comprenant le point C(6,1) et perpendiculaire à la droite AB .

a) Résoudre cet exercice « comme en 4ème ».

b) **Autre méthode, basée sur le produit scalaire** : la droite *d* peut être vue comme l'ensemble des points P(x,y) tels que $\overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{AB}$ càd $\overrightarrow{CP} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$.

Développer cette condition avec les composantes des vecteurs $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{AB}$: l'égalité obtenue est une équation cartésienne de *d* ! Vérifier avec (a) .

c) Avec cette nouvelle méthode déterminer une équation cartésienne
1° de la droite *e* comprenant le point A et perpendiculaire à la droite BC ;
2° de la droite *f* comprenant le point B et perpendiculaire à la droite AC .

---

5. On donne les points de l'espace A(2,-1,0), B(10,4,-2) et C(5,-7,-3) .

a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

b) Calculer la longueur de chacun des côtés de ce triangle.

6. On donne les points de l'espace A(5,5,1) , B(7,3,-1) et C(2,0,2) .
   a) Déterminez les coordonnées d'un point P d'abscisse 4 et d'ordonnée 2 pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CP}$ soient perpendiculaires.
   b) Déterminez les coordonnées d'un point Q de l'axe des abscisses pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CQ}$ soient perpendiculaires.
   c) Déterminez les coordonnées d'un point R de l'axe des cotes pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CR}$ soient perpendiculaires.

---

7. Déterminez le réel k pour que les vecteurs du plan $\vec{u}\begin{pmatrix} k \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

---

8. Déterminez les réels a et b pour que les vecteurs de l'espace $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} b-2 \\ -3/4 \\ 2b/3 \end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

5.5. Recherche de l'angle entre deux vecteurs

> Si α est l'angle entre deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$.

Cet énoncé est une conséquence directe de la définition du produit scalaire.

Exemple d'application

On donne les points A(9,5,2) , B(10,3,0), C(0,0,3) et D(0,7,6) .

Calculez l'angle α entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

Calculons d'abord le cosinus de cet angle à l'aide de la formule $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{CD}\|}$.

Nous avons besoin des composantes des deux vecteurs : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Nous en déduisons (vérifiez) :

- 1° $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD} = -20$ 2° $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$ 3° $\|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{58}$

Remplaçons dans la formule : $\cos\alpha = \dfrac{-20}{3.\sqrt{58}} \approx -0{,}8754$. Finalement : $\boxed{\alpha \approx 151{,}0895°}$.

Exercices

1. Calculez l'angle entre les vecteurs du plan $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

---

2. Soient les points du plan A(4,1) , B(2,6), C(0,2) et D(3,8) .

   Calculez l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

---

3. Calculez l'angle entre les vecteurs de l'espace $\vec{u}=\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

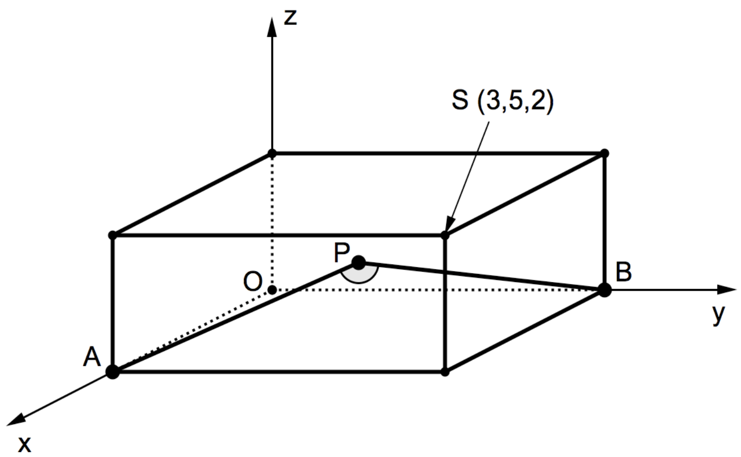
---

4. Soient les points de l'espace A(0,0,4) , B(0,0,7), C(0,0,-1) et D(2,2, $\sqrt{8}$ - 1) .

   Calculez l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

---

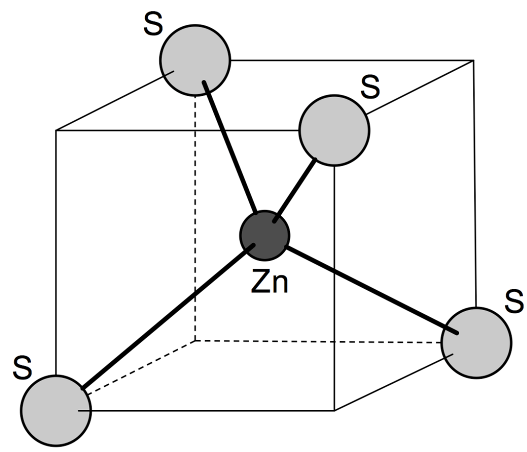
5. Le parallélépipède rectangle représenté ci-dessous a pour centre de gravité le point P et possède un sommet S de coordonnées (3,5,2) . Calculez l'angle $A\hat{P}B$.



---

6. Dans un certain minéral appelé « sphalérite », la structure est telle qu'un atome de zinc se trouve au centre d'un cube et est entouré de quatre atomes de soufre placés en des sommets de celui-ci (voir figure).

   Calculez l'angle de liaison θ formé par une combinaison S – Zn – S .



5.6. Propriétés du produit scalaire

Les trois propriétés suivantes se justifient aisément. Il suffit par exemple d'utiliser l'expression du produit scalaire de deux vecteurs en fonction de leurs composantes.

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan ou de l'espace, quel que soit le réel k :

❶ $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$ *(commutativité)*

❷ $\vec{u} \bullet \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$ *(le produit scalaire distribue l'addition des vecteurs)*

❸ $k \times (\vec{u} \bullet \vec{v}) = (k.\vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet (k.\vec{v})$ *(associativité mixte)*

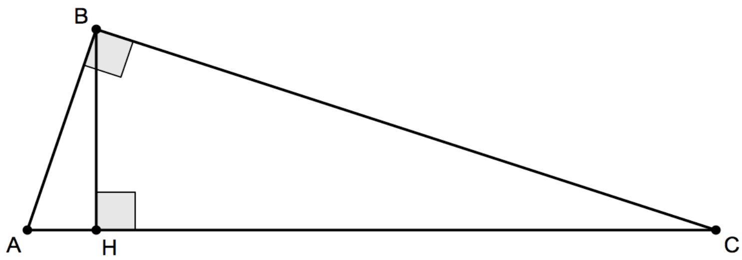
La troisième propriété porte bien son qualificatif « mixte ».
En effet, trois opérations différentes y apparaissent : la multiplication de deux réels ($\times$) , le produit scalaire de deux vecteurs ($\bullet$) et la multiplication d'un vecteur par un réel (.) .

5.7. Applications du produit scalaire à la géométrie

Le produit scalaire est également un outil pour établir certaines propriétés géométriques.
A titre d'exemple, nous allons démontrer un théorème déjà connu :

> Dans tout triangle rectangle, la longueur de la hauteur relative à l'hypoténuse est la moyenne proportionnelle entre les longueurs des segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

Soit un triangle ABC rectangle en B . Soit H le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse.



Il faut démontrer que : $\left\|\overrightarrow{BH}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AH}\right\| . \left\|\overrightarrow{HC}\right\|$.

D'après la loi de CHASLES, nous avons à la fois $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH}$.

Nous allons partir du premier membre de l'égalité à démontrer et utiliser chacune de ces deux substitutions.

$$\left\|\overrightarrow{BH}\right\|^2 = \overrightarrow{BH}^2 = \overrightarrow{BH} \bullet \overrightarrow{BH} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}\right) \bullet \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH}\right)$$

$$= \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{CH}$$

Nous avons donc : $\left\|\overrightarrow{BH}\right\|^2 = \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{CH}$

Passons en revue les termes du second membre :

1°/ $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = 0$ car $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$;

2°/ $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{HA} \bullet \overrightarrow{CH}$ car la projection orthogonale de $\overrightarrow{BA}$ sur $\overrightarrow{CH}$ est $\overrightarrow{HA}$;

3°/ $\overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{HC}$ car la projection orthogonale de $\overrightarrow{BC}$ sur $\overrightarrow{AH}$ est $\overrightarrow{HC}$;

4°/ nous maintenons $\overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{CH}$ inchangé.

Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{BH}\right\|^2 &= 0 + \overrightarrow{HA} \bullet \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{CH} \\
&= \overrightarrow{HA} \bullet \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} \bullet \overrightarrow{CH} \\
&= \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{HC} \\
&= \left\|\overrightarrow{AH}\right\| . \left\|\overrightarrow{HC}\right\|
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer !

<u>Exercices</u>

1. Dans tout triangle rectangle, la longueur d'un côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre la longueur de l'hypoténuse et la longueur de la projection orthogonale de ce côté sur l'hypoténuse.

---

2. Soit un triangle ABC et soit M le milieu du segment [BC] . Démontrer que :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = 2.\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2 + 2.\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 \quad \textit{(premier théorème de la médiane)}$$

---

3. Soit un triangle ABC et soit M le milieu du segment [BC] . Démontrer que :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = 2.\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{MA} \quad \textit{(second théorème de la médiane)}$$

---

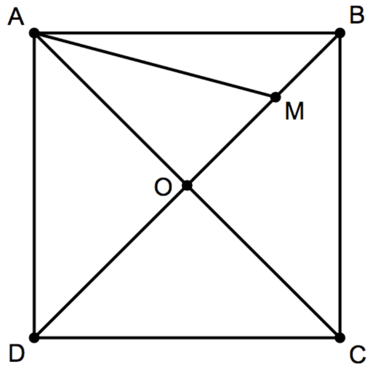
4. Si les points P et Q appartiennent à une droite perpendiculaire au segment [AB] ,

   démontrer que $\overrightarrow{PA}^2 - \overrightarrow{PB}^2 = \overrightarrow{QA}^2 - \overrightarrow{QB}^2$.

5. Soit le carré ABCD et M un point quelconque de la diagonale [BD] .

   Démontrer que $\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{MB} \bullet \overrightarrow{DM}$.

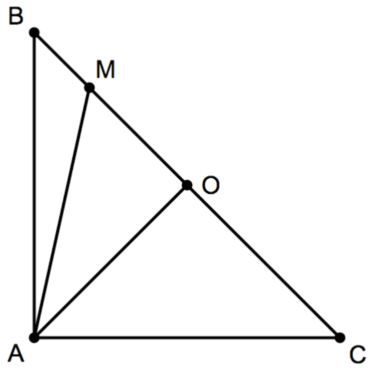
   Suggestion : utiliser le point O , intersection des diagonales du carré.



---

6. Soit le triangle isocèle ABC rectangle en A . Soit M un point quelconque de l'hypoténuse [BC] .

   Démontrer que $\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 2.\overrightarrow{MA}^2$ (suggestion : utiliser le point O , milieu de [BC]).



---

7. **Relation d'EULER**

   a) Si A , B , C et D sont quatre points quelconques du plan ou de l'espace, démontrer que

   $$\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD} \bullet \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{DC} = 0 .$$

   Suggestion : exprimer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ comme différence de vecteurs ayant D comme origine.

   b) À l'aide de la relation d'EULER, démontrer que si A , B , C et D sont les sommets d'un tétraèdre tels que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{DA}$, alors $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$.