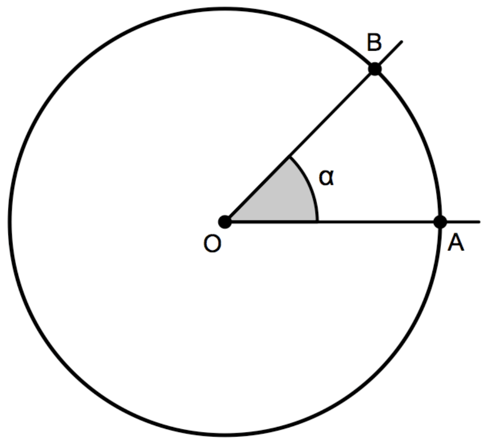
Compléments de trigonométrie

1. Rappels

1.1. Degrés et radians : deux façons de mesurer les angles

Étant donné un angle $\hat{\alpha}$ de sommet O, on peut toujours tracer un cercle de centre O autour de cet angle.



Celui-ci intercepte alors un arc de cercle AB et l'angle $\hat{\alpha}$ égale l'angle AÔB

Si la longueur de l'arc AB est égale à 1 / 360 de la circonférence, on dit que l'angle $\hat{\alpha}$ mesure <u>un degré</u> (1°) .

D'où la définition :

Le degré est la mesure d'un angle qui intercepte 1 / 360 d'un cercle centré en son sommet.

Si la longueur de l'arc AB est égale au rayon du cercle, on dit que $\hat{\alpha}$ mesure <u>un radian</u> (1 rad). D'où la définition :

Le radian est la mesure d'un angle qui intercepte, sur un cercle centré en son sommet, un arc dont la longueur est le rayon de ce cercle.

Comment passer des degrés aux radians et inversement ?

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0{,}0175 \text{ rad} \Leftrightarrow 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57{,}2958° \approx 57°\ 17'\ 45''$$

Degrés	0	30	45	60	90	180	270	360
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Exercices

1. Calculer une mesure en degrés d'un angle de

a) $\frac{\pi}{12} rad$ b) $\frac{11\pi}{6} rad$ c) $\frac{7\pi}{4} rad$ d) $\frac{3\pi}{4} rad$ e) $\frac{5\pi}{3} rad$

2. Calculer une mesure en radians (utiliser un multiple rationnel de π) d'un angle de

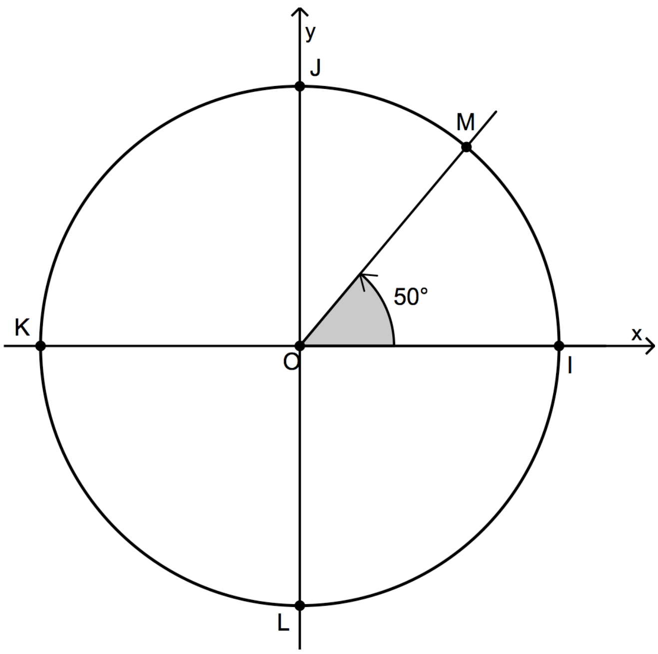
a) 210° b) 150° c) 315° d) 240° e) 75°

1.2. Mesures d'un angle orienté

Rappelons que dans un repère orthonormé, le cercle trigonométrique est le cercle

- centré à l'origine du repère
- dont le rayon est 1
- orienté positivement dans le sens anti horloger

Voici un angle orienté $\alpha = IM$ rapporté au cercle trigonométrique. La demi-droite origine est toujours [OI tandis que la demi-droite extrémité est [OM .



Dans le cas de l'exemple, l'angle α possède une infinité de mesures de la forme :

$$50° + k.360° \text{ , ou, en radians } \frac{5\pi}{18} + k.2\pi \quad (k \in Z).$$

Il est intéressant de remarquer qu'une mesure en radians de l'angle IÔM correspond à une <u>abscisse curviligne</u> du point M .

Cela signifie notamment que la mesure $\frac{5\pi}{18}$ de l'angle IÔM est égale à la longueur de l'arc de cercle IM ($\approx 0,8727$) .

Exercices

1. Calculer la mesure en radians d'un arc de 15 (cm) de longueur sur un cercle dont le rayon mesure 25 (cm) .

2. Calculer la mesure en degrés d'un arc de 18 (cm) de longueur sur un cercle dont la circonférence mesure 90 (cm).

3. Calculer la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de 20° sur un cercle dont le rayon mesure 36 (cm) .

4. Calculer la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de 2 radians sur un cercle dont le rayon mesure 8 (cm) .

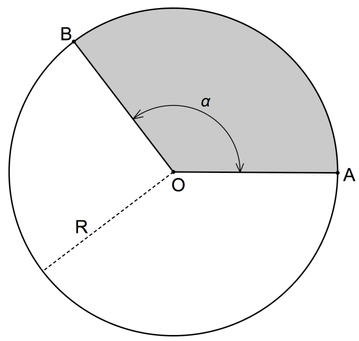
5. Calculer l'aire du secteur de disque découpé par un angle au centre de $\pi / 8$ radians dans un disque de 3 (m) de rayon.

6. Un angle au centre d'un disque y découpe un secteur dont l'aire vaut 400 (cm^2) . Sachant que l'amplitude de l'angle est de $2\pi / 3$ radians, calculer le rayon du disque.

7. Soit un cercle de centre O et de rayon R , et soit un angle au centre $A\hat{O}B$ dont l'amplitude en radians est α .

   a) Démontrer que la longueur de l'arc AB est égale à $\alpha \,.\, R$ (unités de longueur).

   b) Démontrer que l'aire du secteur de disque AOB est égale à $\alpha \,.\, R^2$ (unités d'aire).

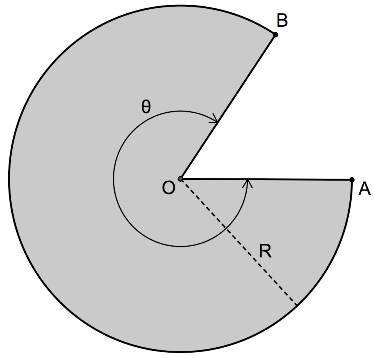


longueur (arc AB) = α . R

aire (secteur AOB) = α . R²/ 2

8. ***Problème posé en 2011 à un examen d'admission (Université de Liège - Faculté des sciences appliquées)***

   On découpe dans une feuille de papier un secteur circulaire de rayon R et d'ouverture θ comme représenté ci-contre. En appliquant l'un sur l'autre les points A et B , on forme ensuite un cône de sommet O .



   a) Montrer que le volume du cône est donné par une expression du type

$$V(\theta) = \alpha R^3 \theta^2 \sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

   où α est une constante positive à déterminer et où θ est exprimé en radians.

   b) Le rayon R étant fixé, déterminer le volume maximum du cône pouvant être construit de la sorte. Justifier.[1]

---

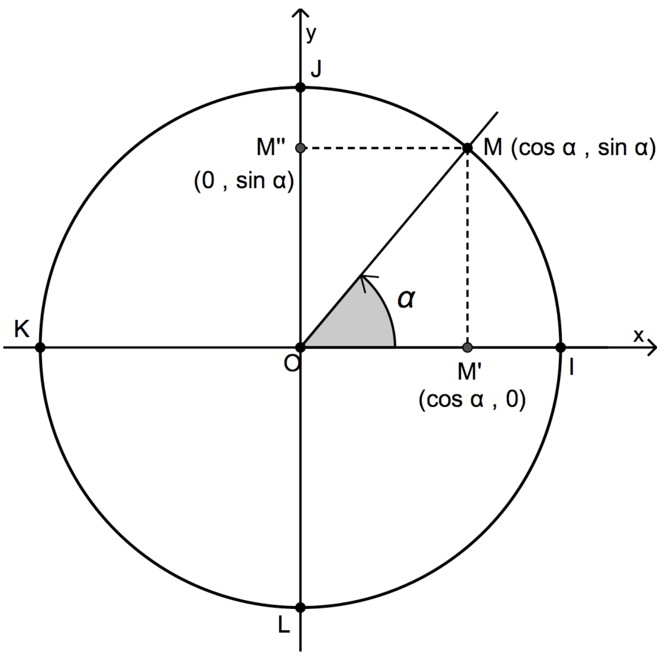
[1] *Ce problème nécessite de connaître la notion de dérivée. Si ce n'est pas encore votre cas, cherchez une solution approximative à l'aide d'un tableur ou d'un logiciel graphique.*

1.3. Nombres trigonométriques

1.3.1. Dans un triangle rectangle

- Le <u>cosinus</u> d'un angle aigu est le rapport de la mesure du côté de l'angle droit <u>adjacent</u> à cet angle par la mesure de l'hypoténuse.
- Le <u>sinus</u> d'un angle aigu est le rapport de la mesure du côté de l'angle droit <u>opposé</u> à cet angle par la mesure de l'hypoténuse.
- La <u>tangente</u> d'un angle aigu est le rapport de la mesure du côté de l'angle droit <u>opposé</u> à cet angle par la mesure du côté de l'angle droit <u>adjacent</u> à cet angle.
- La <u>cotangente</u> d'un angle aigu est le rapport de la mesure du côté de l'angle droit <u>adjacent</u> à cet angle par la mesure du côté de l'angle droit <u>opposé</u> à cet angle.

1.3.2. Dans le cercle trigonométrique



<u>Définitions</u> : dans un repère orthonormé du plan, si le point M est l'unique point du cercle trigonométrique déterminé par l'angle orienté α , alors

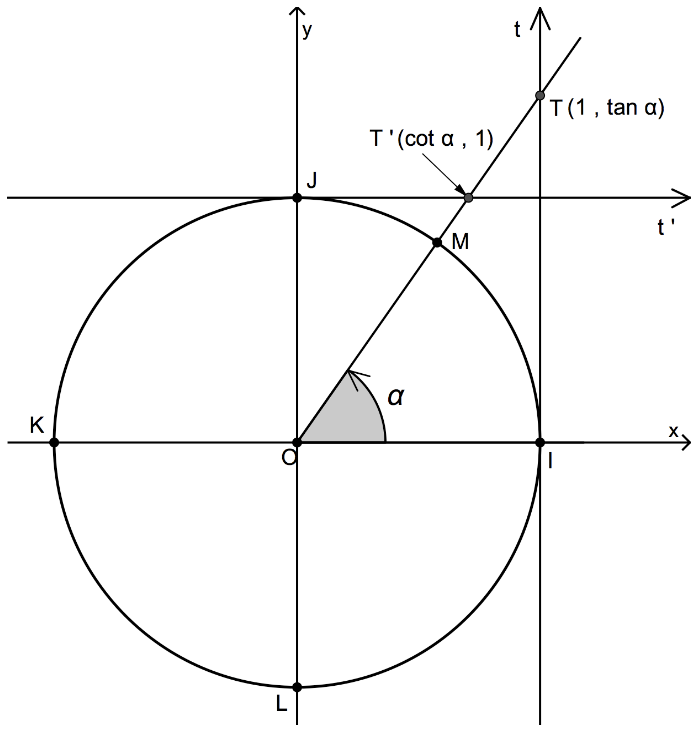
- le **cosinus de α** , noté $\cos\alpha$, est l'**abscisse** de M
- le **sinus de α** , noté $\sin\alpha$, est l'**ordonnée** de M

D'après ces définitions, les coordonnées du point M sont donc $(\cos\alpha , \sin\alpha)$. En ce qui concerne les projections de M sur les axes, nous avons $M'(\cos\alpha , 0)$ et $M''(0 , \sin\alpha)$.

Quel que soit l'angle α , on a nécessairement :

$$\boxed{-1 \le \cos\alpha \le 1 \quad \text{et} \quad -1 \le \sin\alpha \le 1}$$

Traçons maintenant les droites t et t ' , tangentes au cercle trigonométrique respectivement au point I et au point J .



Dans un repère orthonormé du plan, si le point M est l'unique point du cercle trigonométrique déterminé par l'angle orienté α , alors

- la **tangente** de α est l'**ordonnée** du point T intersection des droites t et OM (si le point T existe)
- la **cotangente** de α est l'**abscisse** du point T ' intersection des droites t ' et OM (si le point T ' existe)

D'après ces définitions, les coordonnées du point T sont donc (1 , tan α) et celles de T ' sont (cot α , 1) .

Remarques

1/ $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; la tangente n'existe que si $\cos\alpha \neq 0$ c'est-à-dire si $\alpha \neq 90° + k.180°$
ou $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)

2/ $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; la cotangente n'existe que si $\sin\alpha \neq 0$ c'est-à-dire si $\alpha \neq k.180°$ ou
ou $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)

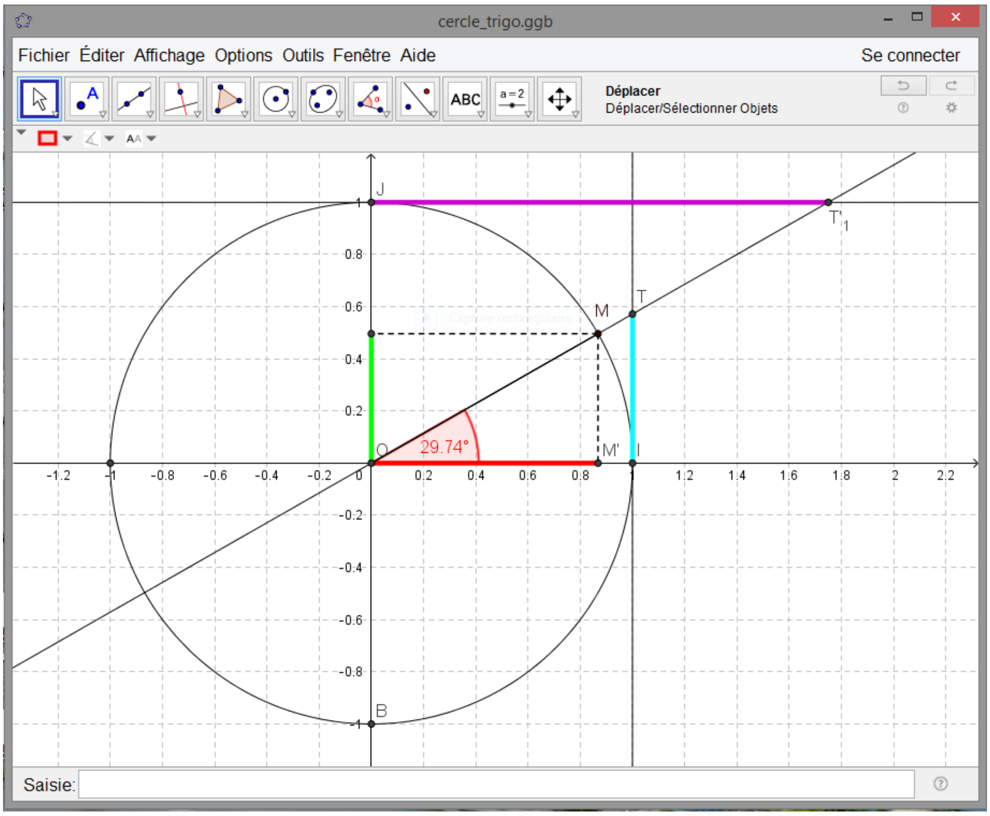
3/ lorsqu'elles existent simultanément, les tangente et cotangente d'un angle orienté α sont des nombres réels inverses l'un de l'autre :

$$\tan\alpha \,.\, \cot\alpha = 1 \qquad \text{ou encore} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

1.3.3. Une animation GeoGebra pour « voir » les nombres trigonométriques d'un angle orienté

Téléchargez le logiciel GeoGebra (www.geogebra.org) et rendez-vous ensuite sur votre site préféré www.ismll.be et entrez dans l'espace interactif.
Dans le dossier « Mathématiques » vous trouverez le sous-dossier « Constructions géométriques ». Téléchargez le fichier « cercle_trigo.ggb ».

Il s'agit d'un fichier « dynamique » : en modifiant la position du point M sur le cercle, vous verrez se modifier les nombres trigonométriques de l'angle $\widehat{IOM}$. Cela permet notamment de mieux comprendre certaines valeurs particulières.



1.4. Relation fondamentale de Pythagore

Quel que soit l'angle orienté α, on a : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

1.4.1. Exercice

Dans chacun des cas suivants, on donne un des nombres trigonométriques de α ainsi qu'une condition. Sans utiliser la calculatrice, calculer les autres nombres trigonométriques de α.

a) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ et α est un angle du 2^e quadrant ;

b) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ et α est un angle du 3^e quadrant :

c) $\cos\alpha = \frac{1}{7}$ et $\tan\alpha < 0$;

d) $\tan\alpha = ¾$ et α est un angle du 1^er quadrant.

1.4.2. Autres formules utiles découlant de la relation fondamentale

Quel que soit l'angle orienté α, on a :

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{et} \quad 1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Ces formules sont utiles pour résoudre un exercice comme le (d) du paragraphe précédent.

Exercices

1. Démontrez les formules ci-dessus.
2. Sachant que $\tan\alpha = -3$ et que α est un angle du 2e quadrant, calculer les autres nombres trigonométriques de α.

1.5. Tableau récapitulatif des nombres trigonométriques d'angles particuliers

	0° 0 rad	30° π/6 rad	45° π/4 rad	60° π/3 rad	90° π/2 rad	180° π rad	270° 3π/2 rad
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X	0	X
Cot	X	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	X	0

1.6. Les angles associés

Voici, exprimées en radians, des relations entre angles …

opposés	supplémentaires	complémentaires	antisupplémentaires	anticomplémentaires
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$	$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$
$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$	$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$
$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$	$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

Vous devez être capable de les retrouver rapidement en réalisant un schéma, ou en utilisant un outil tel que le « trigonomètre ».

Exercice

Exprimer en fonction d'un nombre trigonométrique de α .

a) $\cos(\pi + \alpha)$

b) $\sin(3\pi + \alpha)$

c) $\tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$

d) $\cos(\frac{5\pi}{2} - \alpha)$

e) $\cos(90° + \alpha)$

f) $\tan(\pi - \alpha)$

g) $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$

h) $\cot(540° + \alpha)$

i) $\cot(180° + \alpha)$

j) $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$

1.7. Equations trigonométriques fondamentales

Dans le tableau ci-dessous, a est un nombre réel, α est une mesure d'angle en radians (trouvée à l'aide du tableau ou de la calculatrice) et k est un nombre entier.

Type d'équation	Solutions
$\sin x = a$	• $x = \alpha + k \cdot 2\pi$ ou $x = (\pi - \alpha) + k \cdot 2\pi$ • pas de solution si $a < -1$ ou si $a > 1$ • si $a = 1$: $x = \pi/2 + k \cdot 2\pi$ • si $a = -1$: $x = -\pi/2 + k \cdot 2\pi$ • si $a = 0$: $x = k \cdot \pi$
$\cos x = a$	• $x = \alpha + k \cdot 2\pi$ ou $x = -\alpha + k \cdot 2\pi$ • pas de solution si $a < -1$ ou si $a > 1$ • si $a = 1$: $x = 0 + k \cdot 2\pi$ • si $a = -1$: $x = \pi + k \cdot 2\pi$ • si $a = 0$: $x = \pi/2 + k \cdot \pi$
$\tan x = a$	Quelle que soit la valeur de a : $x = \alpha + k \cdot \pi$

Remarque : pour résoudre une équation avec cotangente, il faut se ramener à une équation équivalente avec tangente (sauf dans le cas des valeurs particulières).

Par exemple, résoudre $\cot x = 10$ revient à résoudre $\tan x = \frac{1}{10}$.

Exercices

1. Résoudre les équations suivantes sans calculatrice.

a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\sin(3x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\sin\dfrac{x}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\tan(x + \dfrac{\pi}{3}) = 1$

g) $\tan(-x) = \sqrt{3}$

h) $\sin(2x - \dfrac{\pi}{6}) = 0$

i) $\cos(x + \dfrac{\pi}{4}) = -1$

j) $\cos(3x - \dfrac{\pi}{6}) = 0$

---

2. Résoudre les équations suivantes sans calculatrice.

a) $10.\cos(3x) + 5 = 0$

b) $2.\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} = 0$

c) $3.\tan\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 3 = 0$

d) $5.\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$

---

3. Résoudre les équations suivantes avec la calculatrice.

a) $\sin(2x) = 0{,}7$

b) $5.\cos x + 1 = 0$

c) $\tan(3x) = -0{,}6$

d) $2.\sin(3x) = 3$

2. Formules d'addition

Rappelons d'abord ce que l'on entend par « nombres trigonométriques d'un nombre réel a » : il s'agit des nombres trigonométriques de l'angle orienté dont une mesure en radians est a .

Exemples

$\sin 2 = \sin(2rad) \approx 0{,}9093$

$\tan\frac{\pi}{3} = \tan(\frac{\pi}{3}rad) = \sqrt{3}$

$\cos 60 = \cos(60rad) \approx -0{,}9524$ (et non ½ !)

Nous pouvons maintenant aborder la question des nombres trigonométriques de la <u>somme</u> (ou de la <u>différence</u>) de deux réels.

Par exemple, si $a = \frac{\pi}{6}$ et $b = \frac{\pi}{3}$, que vaut $\sin(a+b)$?

$$\sin(a+b) = \sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Nous voyons rapidement que ce résultat diffère de $\sin a + \sin b$:

$$\sin a + \sin b = \sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \neq 1$$

En général, $\sin(a+b) \neq \sin a + \sin b$.

Voyons maintenant les bonnes formules !

Etant donnés des réels a et b :

❶ $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$

❷ $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

❸ $\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$

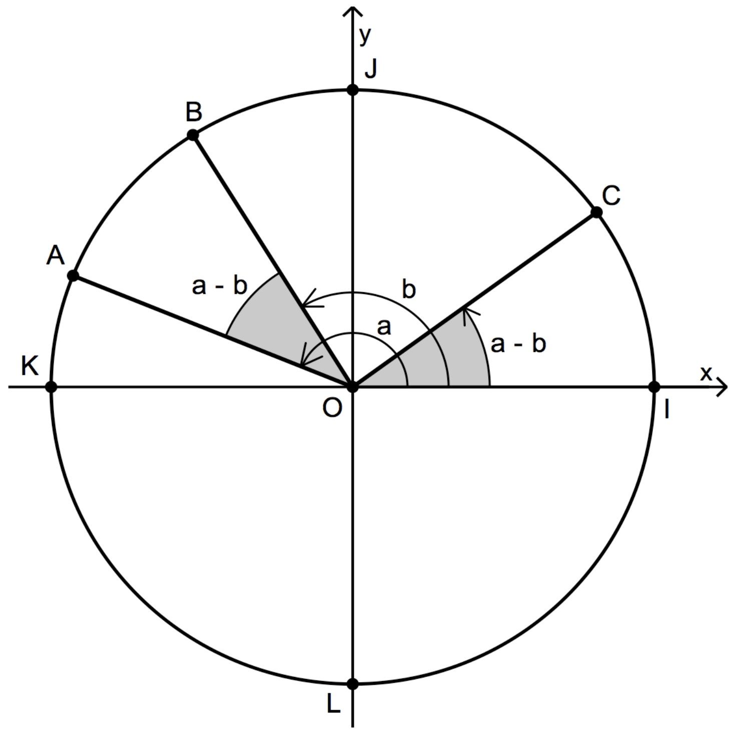
❹ $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$

❺ $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a . \tan b}$ si $a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ et $a-b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

❻ $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1-\tan a . \tan b}$ si $a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ et $a+b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Démonstrations

❶ Sur le cercle trigonométrique, soit le point I(1,0) .
Plaçons les points A , B et C tels que $I\hat{O}A = a$, $I\hat{O}B = b$ et $I\hat{O}C = a - b$.



Nous avons donc les coordonnées $A(\cos a, \sin a)$, $B(\cos b, \sin b)$ et $C(\cos(a-b), \sin(a-b))$.

Les angles $I\hat{O}C$ et $B\hat{O}A$ sont des angles au centre de même amplitude $a - b$.
Ils interceptent donc des cordes de même longueur : $\overline{IC} = \overline{AB}$.

Ces longueurs peuvent être calculées à l'aide de la formule de la distance entre deux points en repère orthonormé vue en 4ème :

$$\sqrt{\left[\cos(a-b) - 1\right]^2 + \left[\sin(a-b) - 0\right]^2} = \sqrt{(\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2}$$

En élevant les deux membres au carré et en développant, nous trouvons :

$$\underline{\cos^2(a-b)} - 2.\cos(a-b) + 1 + \underline{\sin^2(a-b)} = \underline{\underline{\cos^2 a}} - 2.\cos a.\cos b + \underline{\cos^2 b} + \underline{\underline{\sin^2 a}} - 2.\sin a.\sin b + \underline{\sin^2 b}$$

La relation fondamentale de PYTHAGORE permet de réduire les termes soulignés

$$2 - 2.\cos(a-b) = 2 - 2.\cos a.\cos b - 2.\sin a.\sin b$$

Divisons membre à membre par 2

$$1 - \cos(a-b) = 1 - \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$$

Finalement

$$\cos(a-b) = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b$$

❷ Il suffit de remplacer b par (-b) dans la formule précédente pour obtenir la formule ❷ .

En effet, $\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos a \cdot \cos(-b) + \sin a \cdot \sin(-b)$.

Or, nous savons que $\cos(-b) = \cos b$ et que $\sin(-b) = -\sin b$.

Donc : $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

❸ D'après les relations concernant les « angles associés » nous savons que le sinus d'un angle est égal au cosinus de son complémentaire : $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

Donc,

$$\sin(a-b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a-b)\right] = \cos\left[(\frac{\pi}{2} - a) + b\right]$$

Utilisant la formule ❷ nous obtenons : $\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\sin b$

Comme $\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin a$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a$, nous trouvons

$$\sin(a-b) = \sin a \,.\cos b - \cos a \,.\sin b$$

❹ Remplaçons b par (-b) dans la formule ❸ .

$$\sin(a+b) = \sin(a-(-b)) = \sin a.\cos(-b) - \cos a.\sin(-b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$$

❺ Par définition, $\tan(a+b) = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$. Utilisons maintenant les formules ❷ et ❹ .

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

$$= \frac{\sin a.\cos b + \cos a.\sin b}{\cos a.\cos b - \sin a.\sin b}$$

Dans le but de faire apparaître $\tan a$ et $\tan b$, divisons le numérateur et le dénominateur de cette fraction par $\cos a.\cos b$.

$$= \frac{\dfrac{\sin a \,.\cos b}{\cos a \,.\cos b} + \dfrac{\cos a \,.\sin b}{\cos a \,.\cos b}}{\dfrac{\cos a \,.\cos b}{\cos a \,.\cos b} - \dfrac{\sin a \,.\sin b}{\cos a \,.\cos b}}$$

$$= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$$

❻ Replaçons b par (-b) dans la formule ❺ et tenons compte de tan(-b) = - tan b .

$$\tan(a-b) = \tan(a-(-b)) = \frac{\tan a + \tan(-b)}{1 - \tan a.\tan(-b)} = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$$

Exercices

1. En tenant compte que 15° = 45° - 30° et que 75° = 45° + 30° , calculer les nombres trigonométriques de 15° et de 75° . Vérifier à l'aide de la calculatrice.
2. Calculer les nombres trigonométriques de $11\pi/12$ et de $17\pi/12$. Vérifier à l'aide de la calculatrice.
3. Montrer que l'expression suivante est indépendante de x :

$$\sin x + \sin(x + \frac{2\pi}{3}) + \sin(x + \frac{4\pi}{3}) \ .$$

4. Exprimer en fonction des nombres trigonométriques du réel a : $\cos(\frac{\pi}{4} + a) - \sin(a - \frac{3\pi}{4})$.
5. Calculer les nombres trigonométriques de $a + b$ et de $a - b$ sachant que :

$$\sin a = -\frac{1}{2} \text{ et } a \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] ; \quad \cos b = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } b \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] .$$

6. On donne $\sin(a+b) = \frac{21}{29}$ et $\cos(a+b) < 0$ ainsi que $\sin a = \frac{4}{5}$ et $\cos a < 0$.
   Calculer $\sin b$ et $\cos b$.
7. Vérifier si les égalités suivantes sont vraies ou fausses.

   a) $\cos(a-b).\cos(a+b) = \cos^2 a - \sin^2 b$

   b) $\sin(a-b).\sin(a+b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

   c) $\cos(x+y).\cos(x-y) - \sin(x+y).\sin(x-y) = \cos 2x$ (trouver une méthode rapide)

   d) $\tan(\frac{\pi}{4} + x).\tan(\frac{\pi}{4} - x) = 1$

   e) $\dfrac{\sin(a-b) + \cos(a+b)}{\sin(a+b) + \cos(a-b)} = \dfrac{1 - \tan b}{1 + \tan b}$

8. Sachant que $\tan a = 1/5$ et que $a + b = 3\pi/4$, calculer b .
9. Sachant que $\tan b = 2/3$ et que $a + b = \pi/4$, calculer a .
10. Résoudre l'équation suivante dans R : $\sin x.\cos\frac{\pi}{5} + \cos x.\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}$.
11. Soit la fonction $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{3}) + 2.\tan x$. Déterminer son domaine de définition, étudier sa parité et calculer ses racines.
12. Si $a + b + c = \pi$, démontrer que $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a.\tan b.\tan c$.

3. Formules de duplication

Etant donné un réel a :

❶ $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

Ainsi que les « **formules de Carnot** » : $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

❷ $\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$

❸ $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ si $2a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ et $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

<u>Démonstration</u>

Les formules de duplication s'obtiennent à partir des formules d'addition en remplaçant b par a.

❶ A l'aide de la formule 1.2.❷ , cela donne :

$$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a.\cos a - \sin a.\sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

En combinant cette formule avec la relation fondamentale de Pythagore, nous obtenons les deux formules de Carnot.

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1-\cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = (1-\sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$$

❷ Même procédé avec la formule 1.2.❹ …

$$\sin 2a = \sin(a+a) = \sin a.\cos a + \sin a.\cos a = 2\sin a.\cos a$$

❸ … et avec la formule 1.2.❻ .

$$\tan 2a = \tan(a+a) = \frac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a.\tan a} = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

<u>Exemple</u> : calculer $\sin 2a$ sachant que $\cos a = -2/3$ et que $a \in \left[\pi/2, \pi\right]$.

Calculons d'abord $\sin a$: $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = 1 - 4/9 = 5/9$.
Comme $a \in \left[\pi/2, \pi\right]$, nous avons $\sin a > 0$ et donc : $\sin a = \sqrt{5}/3$.
Enfin : $\sin 2a = 2.\sin a.\cos a = 2.\sqrt{5}/3 . -2/3 = -4\sqrt{5}/9$.

4. Formules en tan(a/2)

Quel que soit le réel a tel que $\frac{a}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$:

❶ $\cos a = \dfrac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$

❷ $\sin a = \dfrac{2 . \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$

❸ $\tan a = \dfrac{2 . \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}$ si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Ces formules sont parfois présentées autrement. Si l'on pose $\tan \frac{a}{2} = t$, on obtient :

$$\cos a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \sin a = \frac{2t}{1 + t^2} \qquad \tan a = \frac{2t}{1 - t^2}$$

<u>Démonstrations</u>

❶ Utilisons la formule de duplication 1.3.❶ en remplaçant a par $a/2$.

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} = \frac{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}} \quad \text{(division par 1 !)}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}}}{\dfrac{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$$

❷ Il faut utiliser la formule de duplication 1.3.❷ et les mêmes artifices de calcul que dans la démonstration précédente (exercice).

❸ La troisième formule est immédiate (remplacer a par $a/2$ dans la formule 1.3.❸) .

Exercices (formules d'addition, de duplication et en tan (*a*/2))

1. On donne $\tan a = \frac{1}{7}$ $(0 < a < \pi)$ et $\tan b = \frac{1}{3}$ $(0 < b < \pi)$.

   Calculer $\tan(a+2b)$ et ensuite $a+2b$.

2. Calculer les nombres trigonométriques de $3a$ en fonction des nombres trigonométriques de a .

3. Calculer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$.

4. Démontrer que a) $\cos 2x = \cos^4 x - \sin^4 x$

   b) $\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

5. Calculer les nombres trigonométriques de $\frac{\pi}{8}$ et de $\frac{3\pi}{8}$.

6. Exprimer en fonction de $t = \tan\frac{a}{2}$

   $A = \frac{1-\cos a}{\sin a}$; $B = \frac{1-\sin a}{\cos a}$; $C = \frac{\sin a}{1+\cos a}$.

7. Résoudre les équations suivantes en posant $t = \tan\frac{a}{2}$.

   a) $\sin x + \cos x = 1$

   b) $3\cos x - 2\sin x - 3 = 0$

5. Formules de factorisation (Simpson)

Étant donnés les réels p et q :

❶ $\sin p + \sin q = 2.\sin\dfrac{p+q}{2}.\cos\dfrac{p-q}{2}$

❷ $\sin p - \sin q = 2.\sin\dfrac{p-q}{2}.\cos\dfrac{p+q}{2}$

❸ $\cos p + \cos q = 2.\cos\dfrac{p+q}{2}.\cos\dfrac{p-q}{2}$

❹ $\cos p - \cos q = -2.\sin\dfrac{p+q}{2}.\sin\dfrac{p-q}{2}$

❺ $\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p.\cos q}$, si $p \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ et $q \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)

❻ $\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p.\cos q}$, si $p \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ et $q \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)

Démonstration

❶ Nous savons que $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a$
et que $\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a$

Additionnons ces deux égalités membre à membre :

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = (\sin a.\cos b + \sin b.\cos a) + (\sin a.\cos b - \sin b.\cos a) = 2.\sin a.\cos b$$

Donc, $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2.\sin a.\cos b$ (*)

Si nous notons $a + b = p$ et $a - b = q$, nous obtenons $a = \dfrac{p+q}{2}$ et $b = \dfrac{p-q}{2}$.

En substituant dans l'égalité (*) nous trouvons la première formule de Simpson :

$$\sin p + \sin q = 2.\sin\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$$

Les formules ❷ , ❸ et ❹ se démontrent d'une façon analogue et sont laissées à titre d'exercices au lecteur.

❺ Exprimons les tangentes en fonction des sinus et cosinus et réduisons au même dénominateur. Au numérateur, nous reconnaissons alors le second membre de la formule d'addition 1.2.❹

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin p}{\cos p} + \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p.\cos q + \sin q.\cos p}{\cos p.\cos q} = \frac{\sin(p+q)}{\cos p.\cos q}$$

La formule ❻ se démontre d'une façon analogue (exercice).

Exemples d'application

1. Transformer l'expression $A = \sin a + \sin 2a + \sin 3a$ en un produit de facteurs.

$$\begin{aligned}
A &= \underline{\sin a} + \sin 2a + \underline{\sin 3a} \\
&= \underline{\sin a} + \underline{\sin 3a} + \sin 2a \\
&= 2.\sin\frac{a+3a}{2}.\cos\frac{a-3a}{2} + 2.\sin a.\cos a \\
&= 2.\sin 2a.\cos(-a) + 2.\sin a.\cos a \\
&= 2.\sin 2a.\cos a + 2.\sin a.\cos a \\
&= 2.\cos a.(\sin 2a + \sin a) \\
&= 2.\cos a.2.\sin\frac{2a+a}{2}.\cos\frac{2a-a}{2} \\
&= 4.\cos a.\sin\frac{3a}{2}.\cos\frac{a}{2}
\end{aligned}$$

2. Transformer l'expression $B = \sin 5x.\sin 3x$ en une somme.

Puisqu'il s'agit d'un produit de sinus, nous allons utiliser la formule de Simpson 1.5.❹ .

$$\cos p - \cos q = -2.\sin\frac{p+q}{2}.\sin\frac{p-q}{2}$$

$$-\frac{1}{2}.(\cos p - \cos q) = \sin\frac{p+q}{2}.\sin\frac{p-q}{2}$$

Comparant avec l'expression B , nous poserons $\frac{p+q}{2} = 5x$ et $\frac{p-q}{2} = 3x$.

Nous avons donc $B = -\frac{1}{2}.(\cos p - \cos q)$ où p et q sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \frac{p+q}{2} = 5x \\ \frac{p-q}{2} = 3x \end{cases}$$

Pour trouver p , additionnons les deux équations membre à membre (on trouve $p = 8x$) ; pour trouver q , soustrayons membre à membre (on trouve $q = 2x$).

Finalement : $B = \sin 5x.\sin 3x = -\frac{1}{2}.(\cos 8x - \cos 2x) = \frac{1}{2}.(\cos 2x - \cos 8x)$

Exercices

1. Transformer en produit :

a) $\sin 2a + \sin 6a$

b) $\cos 2a - \cos a$

c) $\sin 5a - \sin 4a$

d) $\cos 3a + \cos 4a$

e) $\cos 3a + \cos a + 2.\cos a.\cos 5a$

f) $\sin 3a + \sin 4a - 2\,.\cos\frac{a}{2}\,.\sin a$

---

2. Transformer en une somme ou une différence.

a) $2.\cos a.\cos 3a$

b) $2\,.\sin a\,.\sin 5a$

c) $\sin(a+b).\cos(a-b)$

d) $\sin(b-2a).\cos(a-2b)$

e) $\sin(\frac{\pi}{4}-a).\sin(\frac{\pi}{4}+a)$

f) $\cos(\frac{\pi}{3}+a).\sin(\frac{2\pi}{3}+3a)$

---

3. Résoudre l'équation $\cos(\frac{\pi}{3}-x)+\cos(\frac{\pi}{3}+x)=1$.

---

4. Transformer en produit :

a) $1+\cos 2x + 2\cos x$

b) $\cos^2 2x - \cos^2\frac{x}{2}$

c) $\cos^2\frac{5x}{2} - \sin^2\frac{3x}{2}$

d) $\cos a + \cos 2a + \cos 3x + \cos 4a$

e) $1+\cos 2x + \cos 4x$

---

5. Transformer en produit : $\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$.

---

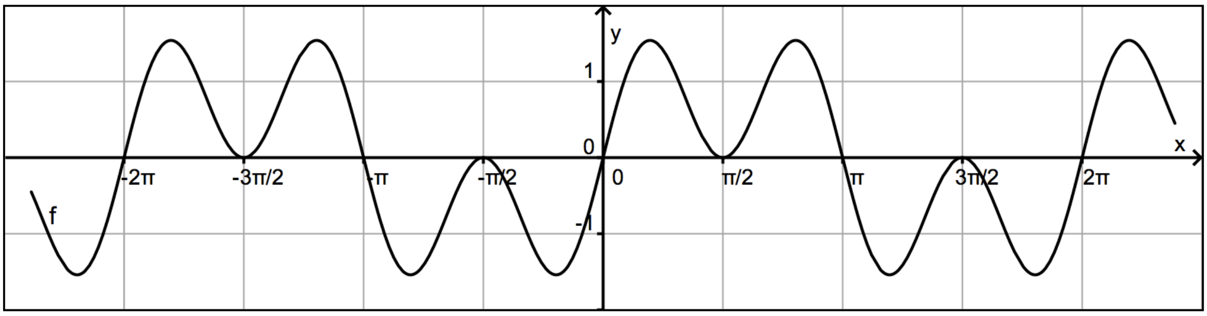
6. a) Démontrer que $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\,.\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

b) Transformer $\cos x - \sin x$.

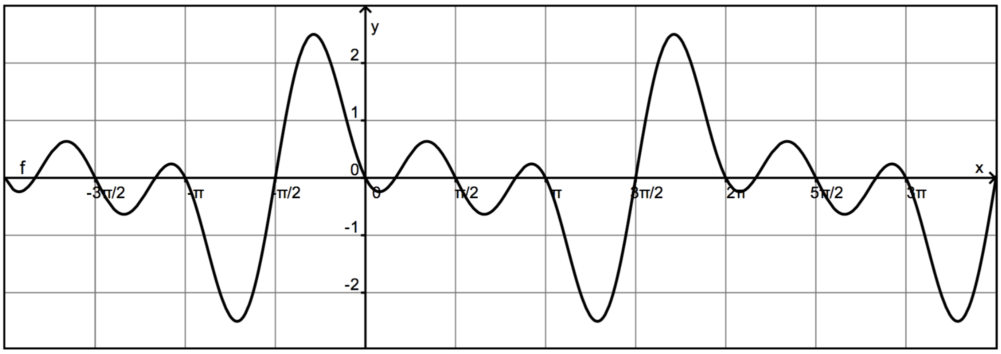
c) Des résultats précédents, déduire que $\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

7. Déterminer les racines des fonctions suivantes et vérifier sur leur graphique.

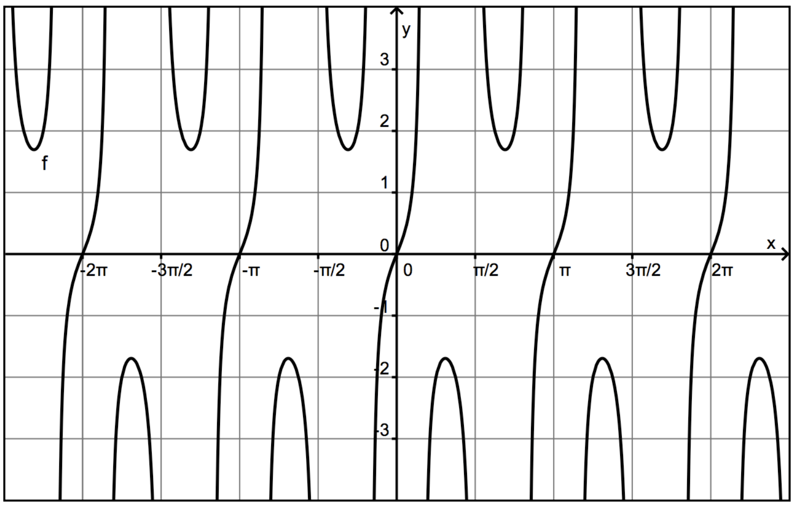
a) $f(x) = \sin x + \sin 3x$



b) $f(x) = \cos x - \cos 3x - \sin 2x$



c) $f(x) = \tan 3x - \tan x$



---

8. Vérifier les identités suivantes et donner les conditions d'existence.

a) $\dfrac{\sin 3x + \sin 5x}{\cos 3x - \cos 5x} = \cot x$

b) $\sin(a + x) + \sin(a - x) - 2.\sin a.\cos x = 0$

c) $\dfrac{\sin x + 2.\sin 2x + \sin 3x}{\sin 3x + 2.\sin 4x + \sin 5x} = \dfrac{1}{2.\cos 2x}$

6. Équations et inéquations trigonométriques

6.1. Équations fondamentales

A l'aide des propriétés vues en quatrième, voici quelques types d'équation que nous sommes déjà capables de résoudre.

Type d'équation	Solutions
$\sin u = \sin v$	$u = v + k.2\pi$ ou $u = (\pi - v) + k.2\pi$
$\cos u = \cos v$	$u = v + k.2\pi$ ou $u = -v + k.2\pi$
$\tan u = \tan v$	$u = v + k.\pi$
$\cos u = \sin v$	Transformer l'équation en $\cos u = \sin(\frac{\pi}{2} - u)$ ou $\sin v = \cos(\frac{\pi}{2} - v)$; on est alors ramené à l'un des premiers cas.

Exemple : résoudre l'équation $\cos 2x = \cos(x + \frac{\pi}{3})$.

Nous obtenons successivement

$$2x = x + \frac{\pi}{3} + k.2\pi \quad \text{ou} \quad 2x = -x - \frac{\pi}{3} + k.2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k.2\pi \quad \text{ou} \quad 3x = \frac{\pi}{3} + k.2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k.2\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{9} + k.\frac{2\pi}{3}$$

Remarquons que ce type d'équation peut aussi se résoudre à l'aide des formules de SIMPSON.

6.2. Équations se ramenant à un produit nul

Exemple : résoudre l'équation $\cos x - \sin 2x = 0$.

Utilisons la formule de duplication 1.2.❷ : $\cos x - 2.\sin x.\cos x = 0$.

Nous pouvons maintenant mettre $\cos x$ en évidence : $\cos x.\left(1 - 2.\sin x\right) = 0$

Il reste à résoudre les équations $\cos x = 0$ et $1 - 2.\sin x = 0$. Elles fournissent les solutions

$$x = \frac{\pi}{2} + k.\pi \qquad x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \qquad x = \frac{5\pi}{6} + k.2\pi$$

6.3. Équations du second degré

Exemple : résoudre l'équation $\tan^2 x + 4.\tan x + 3 = 0$.

Comme toujours lorsque l'équation contient $\tan x$, il faut poser des conditions d'existence (dans le cas présent : $x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$) .

Ensuite, on pose $y = \tan x$. L'équation devient $y^2 + 4y + 3 = 0$.
Elle fournit les solutions $y = -1$ et $y = -3$.
Il reste à résoudre les équations fondamentales $\tan x = -1$ et $\tan x = -3$ et à vérifier si les solutions obtenues respectent les conditions d'existence.

6.4. Équations homogènes en $\sin x$ et $\cos x$

Une équation est homogène de degré n en $\sin x$ et $\cos x$ si, pour chacun de ses termes, la somme des puissances de $\sin x$ et de $\cos x$ est égale à n .

Exemple 1 : l'équation suivante est homogène de degré 3 en $\sin x$ et $\cos x$.

$$\sin^3 x - 3.\sin x.\cos^2 x + 2.\cos^3 x = 0$$

Pour la résoudre, divisons chaque membre de l'équation par la plus haute puissance de $\cos x$, c'est-à-dire par $\cos^3 x$ afin d'obtenir une équation en $\tan x$ (il faut vérifier que les solutions de $\cos x = 0$ ne sont pas des solutions de l'équation homogène).
Nous obtenons successivement :

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} - 3.\frac{\sin x.\cos^2 x}{\cos^3 x} + 2.\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x} = 0$$

$$\tan^3 x - 3.\tan x + 2 = 0$$

Posons $y = \tan x$. Nous obtenons l'équation $y^2 - 3y + 2 = 0$ qui peut se résoudre par la méthode des diviseurs du terme indépendant (voir cours de $4^{\text{ème}}$).
Les solutions sont $y_1 = 1$ et $y_2 = -2$.
Il reste à résoudre les équations fondamentales $\tan x = 1$ et $\tan x = -2$.

Exemple 2 : résoudre l'équation homogène de degré 4 suivante.

$$\cos^4 x + \cos^3 x.\sin x = 2.\sin^2 x.\cos^2 x$$

Divisons chaque membre par $\cos^4 x$ (vérifier que …). Nous obtenons :

$$1 + \tan x = 2.\tan^2 x \quad \text{ou encore} \quad 2.\tan^2 x - \tan x - 1 = 0$$

En posant $y = \tan x$, l'équation $2y^2 - y - 1 = 0$ fournit les solutions $y = 1$ et $y = -\frac{1}{2}$. Il reste donc à résoudre les équations $\tan x = 1$ et $\tan x = -\frac{1}{2}$.

6.5. Équations du type $a.\cos x + b.\sin x = c$ (a et b étant des réels non nuls)

- Si c = 0 , il s'agit d'une équation homogène (voir paragraphe précédent)
- Si c ≠ 0 , divisons les deux membres de l'équation par a :

$$\cos x + \frac{b}{a}.\sin x = \frac{c}{a}$$

Posons $\frac{b}{a} = \tan\varphi$. Nous obtenons successivement :

$$\cos x + \tan\varphi.\sin x = \frac{c}{a}$$

$$\cos x + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.\sin x = \frac{c}{a}$$

$$\cos x.\cos\varphi + \sin\varphi.\sin x = \frac{c}{a}.\cos\varphi$$

D'après la formule d'addition 1.2.❶ , nous obtenons une équation fondamentale :

$$\boxed{\cos(x-\varphi) = \frac{c}{a}.\cos\varphi}$$

<u>Exemple</u> : résoudre l'équation $\cos x + \sqrt{3}.\sin x = \sqrt{2}$.

Posons $\tan\varphi = \frac{b}{a} = \sqrt{3}$ avec $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Utilisons la dernière forme de l'équation obtenue ci-dessus et remplaçons a , c et φ :

$$\cos(x-\varphi) = \frac{c}{a}.\cos\varphi$$

$$\cos x + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.\sin x = \frac{c}{a}$$

$$\cos(x-\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Les solutions sont :

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k.2\pi \qquad \text{ou} \qquad x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + k.2\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{12} + k.2\pi \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{\pi}{12} + k.2\pi$$

Exercices : résolutions d'équations trigonométriques

1. Équations fondamentales

a) $\sin 3x = \sin 2x$

b) $\cos 3x = \cos 2x$

c) $\tan 3x = \tan x$

d) $\cos 3x = \sin 2x$

e) $\cos 4x - \cos x = 0$

f) $\sin x = \sin(3x - \frac{\pi}{2})$

g) $\sin 3x + \sin(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$

h) $\cos 2x = \sin(x - \frac{\pi}{4})$

i) $\cos 2x + \cos x = 0$

j) $\tan 4x + \tan 3x = 0$

2. Équations se ramenant à un produit nul

a) $\sin x . \tan x = \sin x$

b $4.\sin^2 x . \tan x - \tan x = 0$

c) $1 - \cos^2 2x = 0$

d) $2.\cos^2 x + \cos x = 0$

e) $\sin 2x + \sin^2 x = 0$

f) $\cos x - \sin 2x = 0$

g) $\cos 2x + \sin x - 1 = 0$

h) $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$

i) $\tan 2x = 2.\tan x$

j) $2 . (1 - \cos 2x) = \sin x$

3. Équations du second degré

a) $2.\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

b) $2.\cos^2 x = \sin^2 x - \frac{1}{4}$

c) $2.\sin^2 x - \cos x = 0$

d) $12.\cos^2 x = 5 + 8.\sin x$

e) $\sin^2 x - \cos 2x + 1 = 0$

f) $2.\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$

g) $\tan^2 x + 3.\tan x + 2 = 0$

h) $5.\cos^2 x + 3.\cos x - 2 = 0$

i) $12.\sin^2 x - 5.\sin x - 2 = 0$

j) $12.\cos^2 x = 5 + 8.\sin x$

4. Équations homogènes

a) $\sin x + 2.\cos x = 0$

b) $3.\sin x - 2.\cos x = 0$

c) $2.\cos^3 x - 3.\sin^2 x . \cos x = 0$

d) $\sin^4 x + \cos^4 x = 4.\cos^2 x . \sin^2 x$

5. Soit l'équation $2.\sin^2 t - 4.\sin t . \cos t - 4.\cos^2 t = -3$.

Montrer qu'il est possible de la rendre homogène du second degré en sin t et cos t .
Ensuite, résoudre l'équation.

6. Équations du type $a.\cos x + b.\sin x = c$ **(** $a \in R_0$ **et** $b \in R_0$**)**

a) $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$

b) $\cos x + \sin x = -1$

c) $2.\cos x + 2.\sin x + 1 = 0$

d) $\cos x + \sqrt{3}.\sin x = 1$

e) $\cos x + \sqrt{3}.\sin x + 2 = 0$

f) $\cos\dfrac{x}{2} + \sqrt{3}.\sin\dfrac{x}{2} = -\sqrt{3}$

g) $3.\cos x + 2.\sin x = 2$

h) $-6.\cos x + 8.\sin x = 3$

i) $1{,}72.\cos x - 2{,}13.\sin x = 0{,}61$

j) $3.\cos x + \sin x + 3 = 0$

7. Résoudre l'équation $3.\cos x + \sin x + 3 = 0$ de deux façons différentes :

a) par la méthode de factorisation du premier membre (voir page 23 et exercice 6 (j) sur cette page)

b) en substituant cos x et sin x en fonction de tan(x/2) (formules page 15).
La deuxième méthode est-elle aussi performante que la première ? Pourquoi ?

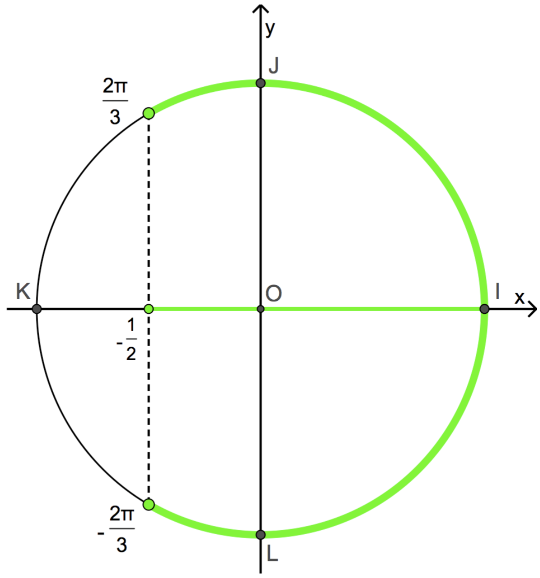
8. En répondant aux questions de l'exercice 7 , résoudre l'équation suivante :

$$2.\cos x.\sin x + 2.\sin x + \cos x + 1 = 0 \ .$$

6.6. Inéquations trigonométriques

La résolution d'une inéquation se ramène souvent à la résolution de l'équation correspondante et à une lecture convenable des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exemple 1 : résoudre l'inéquation $\cos x \geq -\frac{1}{2}$.



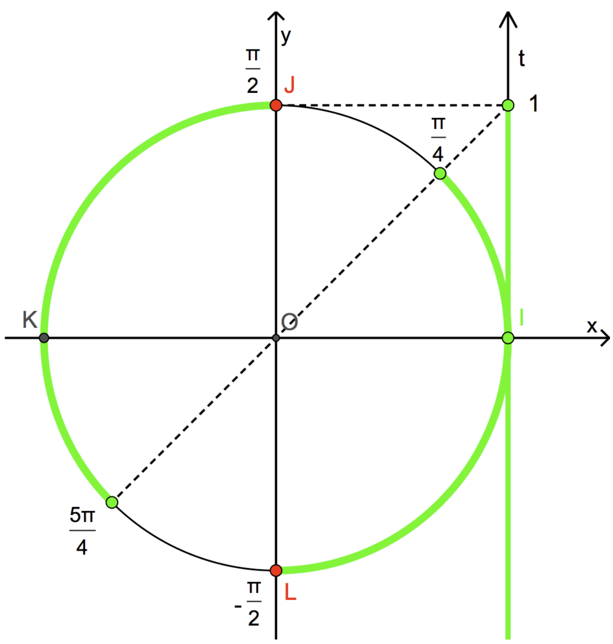
Résolvons d'abord l'équation $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Solutions : $x = \frac{2\pi}{3} + k.2\pi$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} + k.2\pi$.

Sur l'axe des abscisses, déterminons les points qui correspondent à un cosinus supérieur ou égal à - ½ . Ensuite, indiquons sur le cercle trigonométrique les angles qui respectent cette condition. Nous obtenons l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$S = \ldots \cup \left[-\frac{8\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right] \cup \ldots \text{ ou } S = \bigcup_{k \in Z} \left[-\frac{2\pi}{3} + k.2\pi, \frac{2\pi}{3} + k.2\pi\right]$$

Exemple 2 : résoudre l'inéquation $\tan x \leq 1$.



Résolvons d'abord l'équation $\tan x = 1$.

Solutions : $x = \frac{\pi}{4} + k.\pi$.

Sur l'axe t , déterminons les points qui correspondent à une tangente inférieure ou égale à 1 .

Ensuite, indiquons sur le cercle trigonométrique les angles qui respectent cette condition.

Nous obtenons l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$S = \ldots \cup \left]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{9\pi}{4}\right] \cup \ldots \text{ ou } S = \bigcup_{k \in Z} \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$$

Exemple 3 : résoudre l'inéquation $2.\sin 2x - 1 \leq 0$.

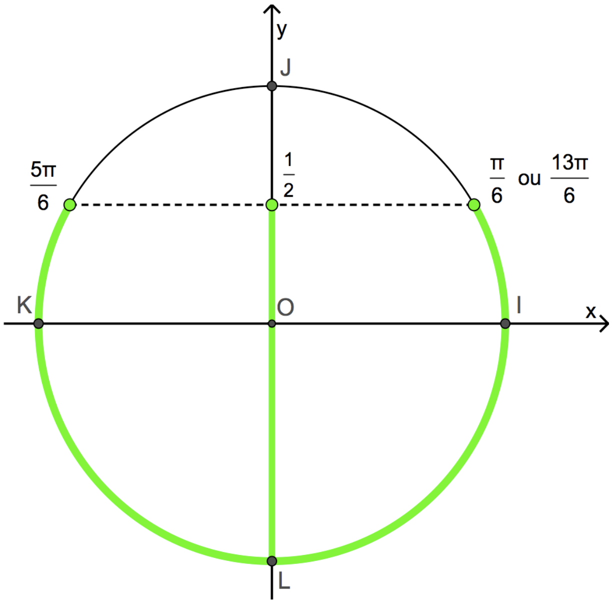
L'inéquation étant équivalente à $\sin 2x \leq \frac{1}{2}$,

résolvons d'abord l'équation $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

Solutions :

$$2x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + k.2\pi \ .$$

Sur l'axe des ordonnées, déterminons les points qui correspondent à un sinus inférieur ou égal à ½ . Ensuite, indiquons sur le cercle trigonométrique les angles qui respectent cette condition. Notons bien qu'il s'agit des solutions en « $2x$ » .



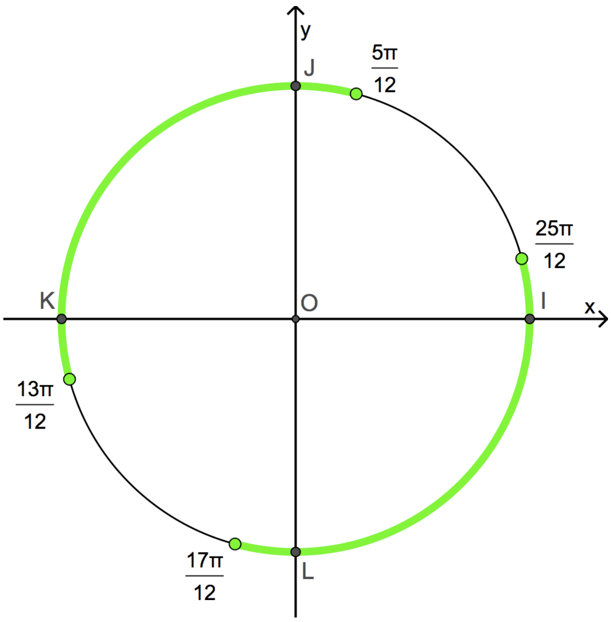
Attention : il serait maintenant faux d'écrire $\frac{5\pi}{6} + k.2\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{6} + k.2\pi$ car $\frac{5\pi}{6} > \frac{\pi}{6}$!

Il faut donc écrire $\frac{5\pi}{6} + k.2\pi \leq 2x \leq \frac{13\pi}{6} + k.2\pi$ qui conduit à $\frac{5\pi}{12} + k.\pi \leq x \leq \frac{13\pi}{12} + k.\pi$.

L'ensemble des solutions est donc

$$S = \bigcup_{k \in Z} \left[\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{13\pi}{12} + k\pi \right]$$

et voici sa représentation ci-contre.



Exercice : résoudre les inéquations suivantes.

a) $2.\cos x > \sqrt{3}$

b) $3.\tan x - \sqrt{3} \geq 0$

c) $\sin 2x < 0$

d) $\sin^2 x \leq 3/4$

e) $1 - 2.\cos 3x < 0$

f) $2.|\cos x| - 1 > 0$