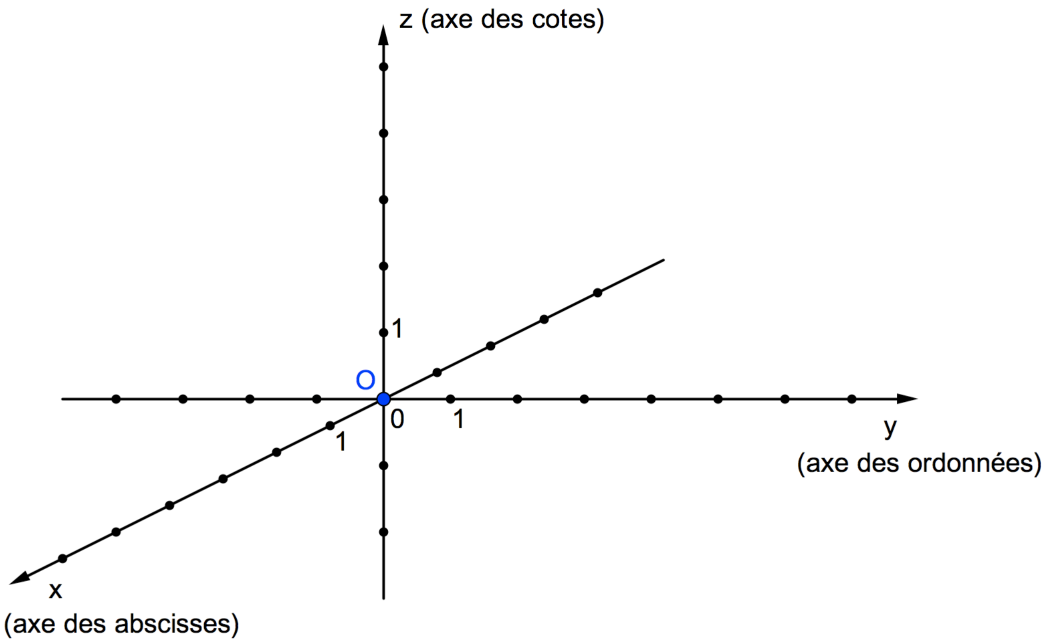
Géométrie vectorielle dans l'espace

1. Repère dans l'espace

Afin de décrire la position d'un point dans l'espace, il faut d'abord privilégier un point O. Par ce point, nous ferons passer trois droites non coplanaires x, y et z.
La droite x s'appelle « axe des abscisses », la droite y « axe des ordonnées » et la droite z « axe des cotes » (ou « hauteurs »).

Chacun de axes est orienté et gradué avec le point O comme origine.



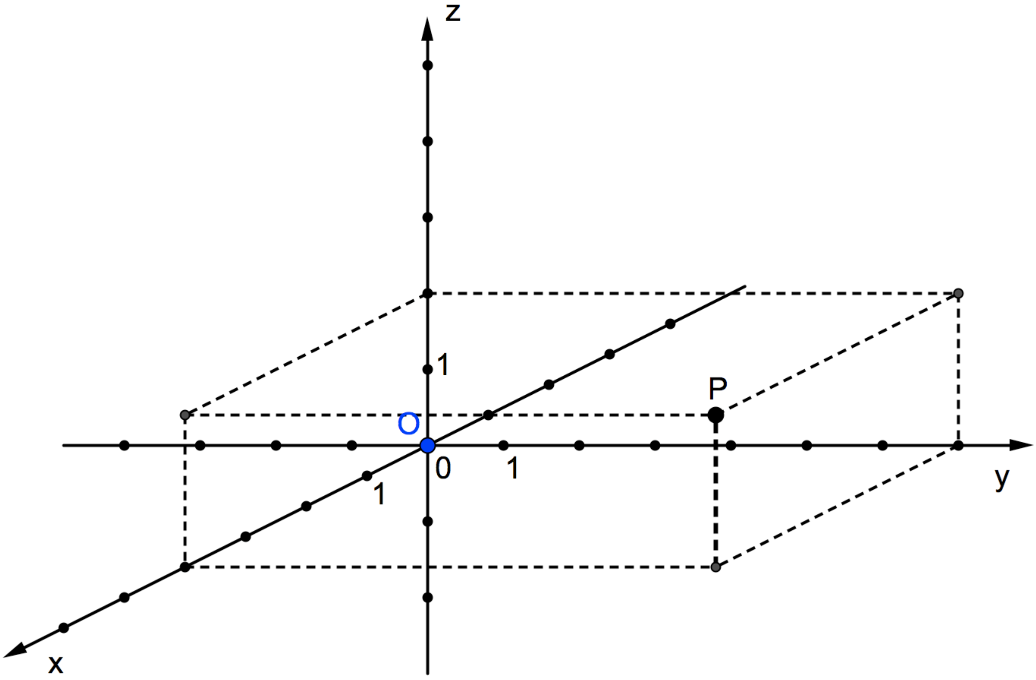
Le point O et les axes x, y et z forment un **repère** de l'espace que l'on note $\mathrm{O}xyz$.

Lorsque les axes sont perpendiculaires deux à deux et que l'unité de mesure est la même sur les trois axes, on dit que le repère est **orthonormé**.

Coordonnée d'un point dans l'espace

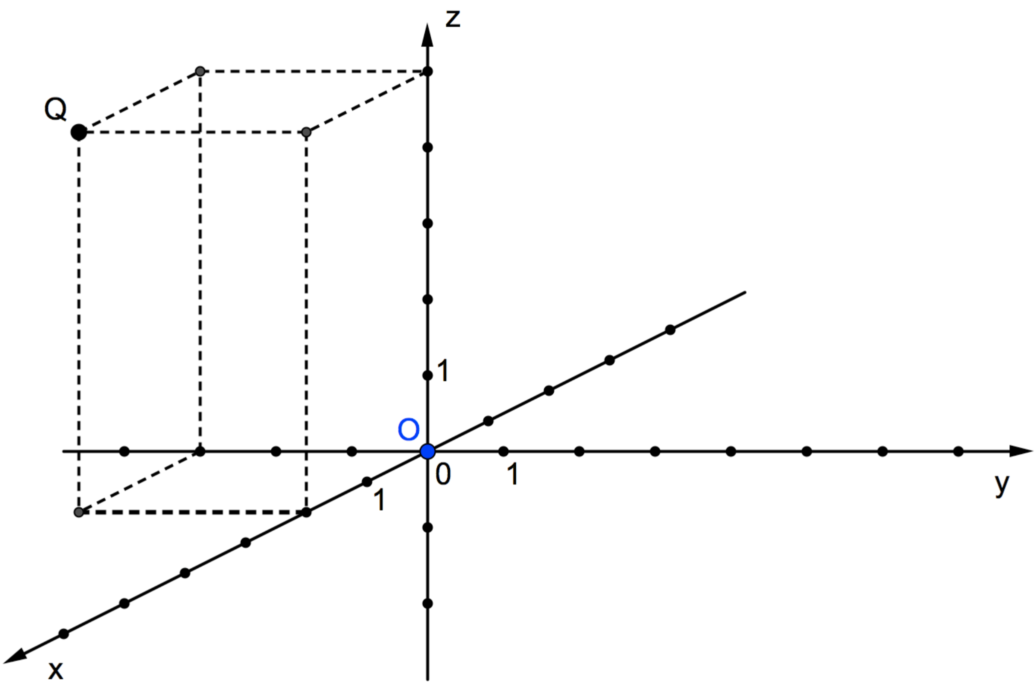
La position d'un point dans l'espace est déterminée par un triple de nombres réels appelé la **coordonnée** du point. Les coordonnées sont les nombres réels qui apparaissent dans ce triple.

Voyons deux exemples à la page suivante.



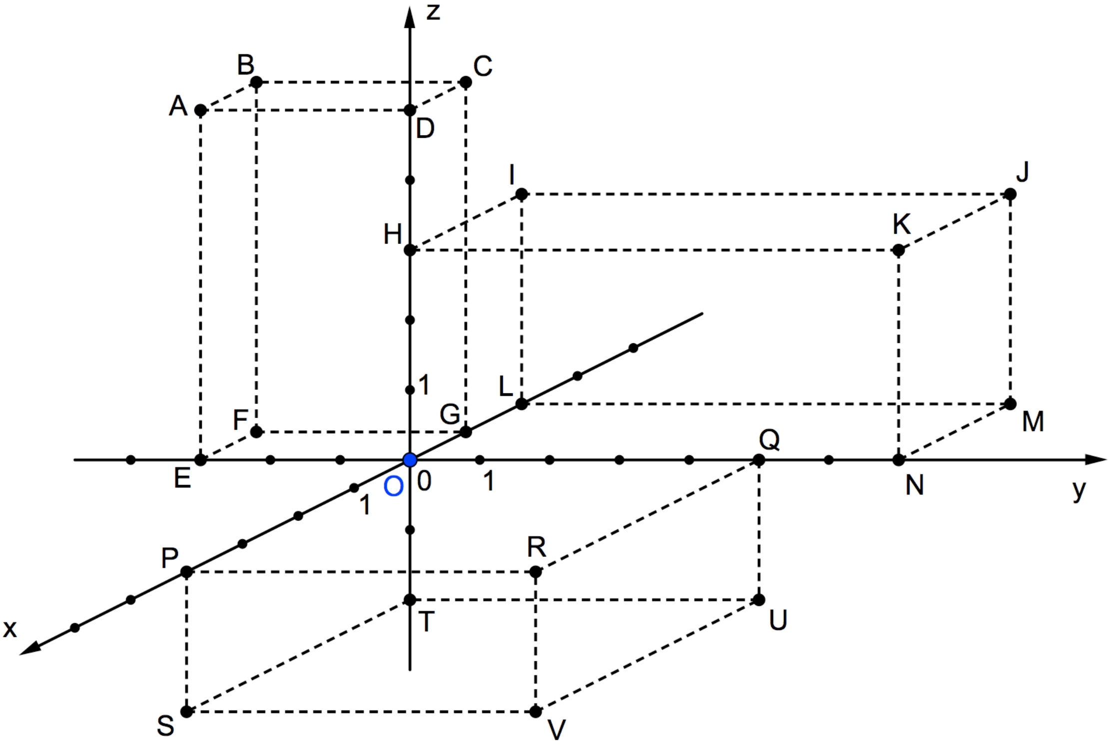
La coordonnée du point P représenté ci-dessus est le triple de réels (4,7,2). L'abscisse de P vaut 4, son ordonnée vaut 7 et sa cote vaut 2. Pour expliquer ce que cela signifie, on peut imaginer un trajet pour se rendre du point O au point P : au départ de O, avancer de 4 unités sur l'axe x ; ensuite, se déplacer de 7 unités vers la droite, parallèlement à l'axe y ; enfin, se déplacer de 2 unités vers le haut parallèlement à l'axe z.

Lorsqu'une coordonnée est négative, il faut se déplacer dans le sens négatif sur l'axe concerné. Ainsi, la coordonnée du point Q, représenté ci-dessous, est (2,-3,5).

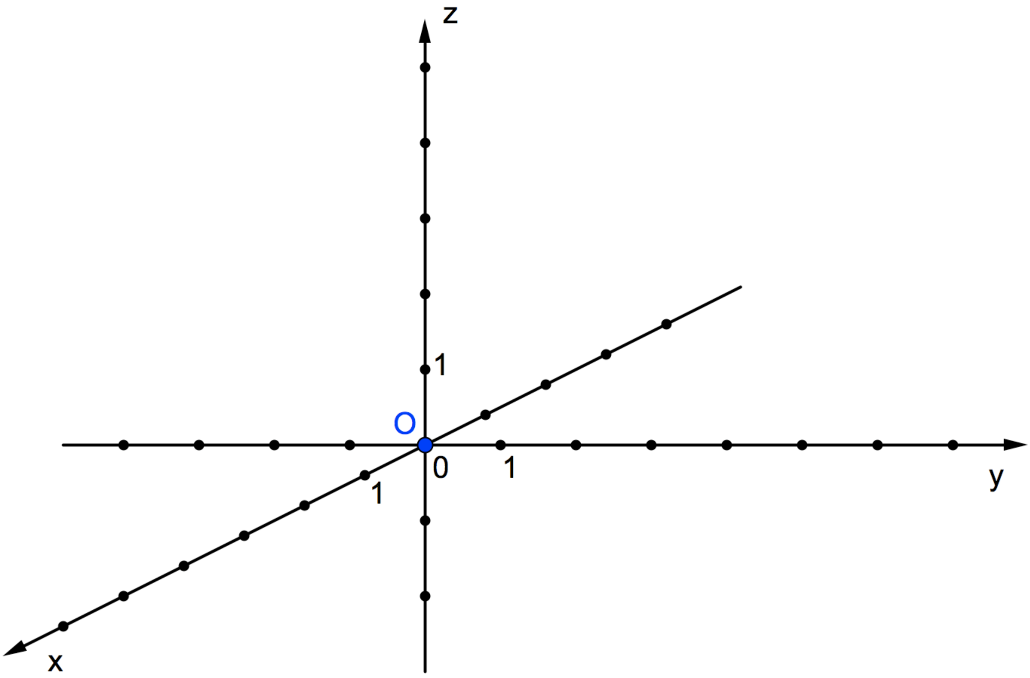


Exercices

1. Déterminer la coordonnée de chacun des points désignés par une lettre majuscule dans le schéma ci-dessous.



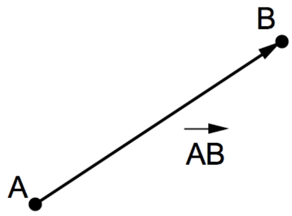
2. Placer les points suivants dans le repère Oxyz représenté ci-dessous :
A(4,0,0) ; B(2,5,-1) ; C(0,-4,0) ; D(-3,-2,0) ; E(0,0,3) ; F(2,6,3) et G(-2,6,1) .



2. Vecteurs de l'espace

Nous allons étendre à l'espace les notions de géométrie vectorielle plane vues en 4[ème].

2.1. Notions de base sur les vecteurs



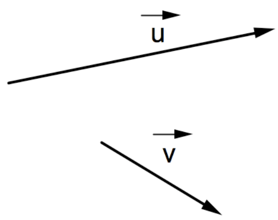
Deux points A et B de l'espace, pris dans cet ordre, représentent le vecteur que l'on note $\overrightarrow{AB}$.

Le point A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$, tandis que le point B est l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par

- Une direction (celle de la droite AB)
- Un sens (de A vers B)
- Une longueur (celle du segment [AB]) appelée norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

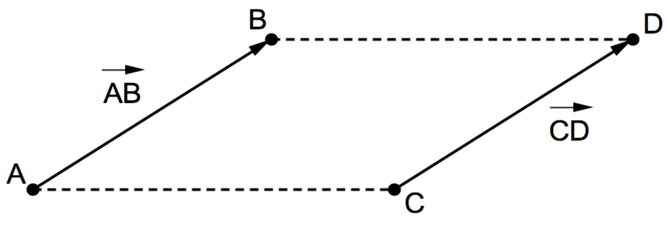
Le vecteur nul est un vecteur dont l'origine coïncide avec l'extrémité. Il est noté $\vec{0}$.
Par exemple : $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.



Il arrive que l'on désigne un vecteur seulement par une lettre minuscule : $\vec{u}, \vec{v}, \ldots$

On procède de cette façon lorsque l'origine et l'extrémité du vecteur n'ont pas d'importance particulière dans le contexte où l'on travaille.

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

et

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

Propriété

Si A , B , C et D sont quatre points de l'espace non alignés trois à trois, alors

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \quad \Leftrightarrow \quad ABCD \text{ est un parallélogramme}$$

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont parallèles si les droites AB et CD sont parallèles.
Notons que le vecteur nul, qui n'a pas de direction particulière, est parallèle à tout vecteur.

2.2. Composantes d'un vecteur

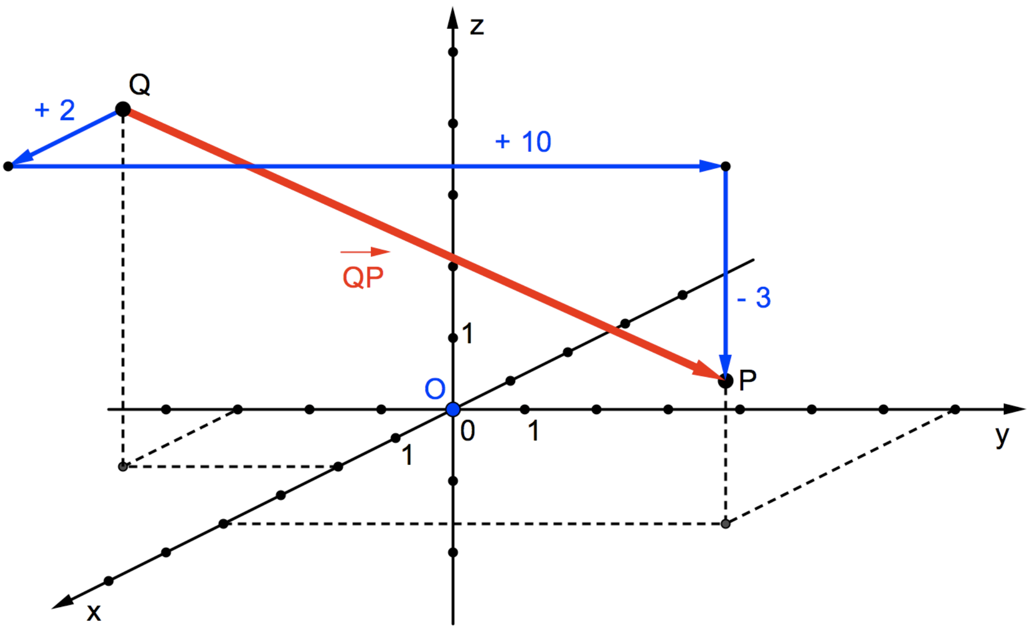
Dans un repère de l'espace, si la coordonnée du point A est (x_A, y_A, z_A) et si la coordonnée du point B est (x_B, y_B, z_B) , le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être représenté par le triple de réels $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ appelé « triple de composantes » du vecteur.

On note alors $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ ou encore $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

<u>Exemple</u> : considérons par le vecteur $\overrightarrow{QP}$ avec les points Q(2,-3,5) et P(4,7,2) .

Nous aurons alors : $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 7-(-3) \\ 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$.

L'interprétation de ce triple de composantes peut être la suivante : pour se rendre du point Q au point P , il faut d'abord avancer de 2 unités au départ de Q parallèlement à l'axe x , ensuite se déplacer de 10 unités vers la droite parallèlement à l'axe y et enfin descendre de 3 unités parallèlement à l'axe z .



Notons que si deux vecteurs sont égaux, ils ont les mêmes composantes.
Réciproquement, si deux vecteurs ont les mêmes composantes, alors ils sont égaux.

On résume cela en disant : « **une condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs soient égaux est qu'ils aient les mêmes composantes** ».

Remarquons enfin que les trois composantes du vecteur nul sont nulles : $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercices

1. On donne les points A(-2,0,5) , B(0,3,4) et C(2,-1,7) .

   a) Calculer les triples de composantes de chacun des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.

   b) Calculer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

   c) Calculer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EB}$.

---

2. On donne les points A(3,-2,-4) , B(1,3,-2) , C(2,4,4) et D(4,-1,2) . Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

---

3. Déterminer le réel a pour que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3+a \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 8-a \end{pmatrix}$ soient égaux.

---

4. Déterminer les réels a et b pour que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a+2 \\ 2a-b \\ b+3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} b+3 \\ 3 \\ a+2 \end{pmatrix}$ soient égaux.

2.3. Norme (longueur) d'un vecteur

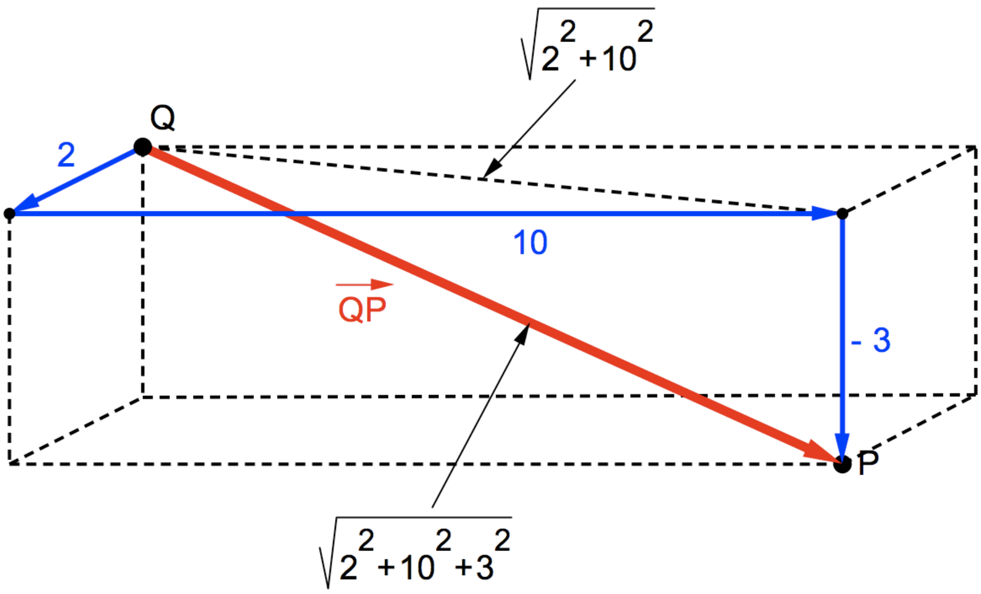
Dans un repère orthonormé de l'espace, si la coordonnée du point A est (x_A, y_A, z_A) et si la coordonnée du point B est (x_B, y_B, z_B), alors la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donnée par

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Reprenons l'exemple du vecteur $\overrightarrow{QP}$ avec les points Q(2,-3,5) et P(4,7,2).

Nous trouvons : $\left\|\overrightarrow{QP}\right\| = \sqrt{(4-2)^2 + (7-(-3))^2 + (2-5)^2} = \sqrt{113} \approx 10{,}63$.

L'examen de la figure ci-dessous nous montre que la longueur du vecteur $\overrightarrow{QP}$ peut s'obtenir en appliquant le théorème de PYTHAGORE deux fois de suite.



Exercice

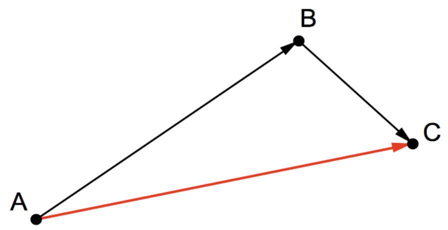
Calculez la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec A(3,-2,6) et B(1,8,4).

2.4. Opérations sur les vecteurs

En 4ème année, nous avons vu les propriétés de la somme de deux vecteurs du plan et du produit d'un vecteur du plan par un réel (cette dernière opération étant encore appelé *multiplication scalaire*). Ces propriétés se conservent dans l'espace, tant au point de vue géométrique qu'au point de vue algébrique.

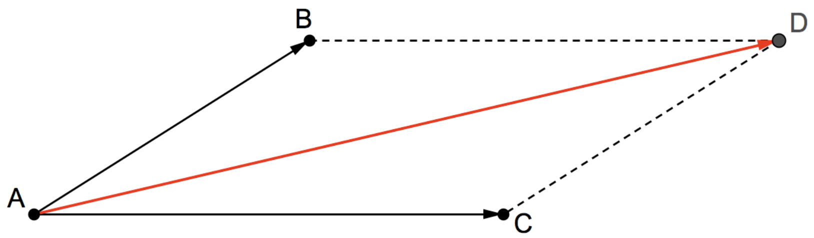
2.4.1. Somme de vecteurs

La loi de Chasles



Si A, B et C sont des points de l'espace, alors on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

La loi du parallélogramme



Si A, B, C et D sont des points de l'espace tels que A, B et C ne sont pas alignés, alors on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme}$$

Composantes d'une somme de vecteurs

Les composantes d'une somme de vecteurs sont égales à la somme des composantes des vecteurs.

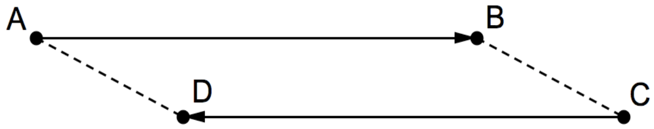
En langage formel, cela donne : soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour triple de composantes $\begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}$.

Exemple : on donne les points A(2,0,7) , B(5,-1,2) , C(1,-2,0) et D(0,4,-3) .

Nous avons $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$. Dès lors, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Tout vecteur possède un vecteur opposé



Dans le cas de la figure ci-dessus : $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA}$, ou encore $-\overrightarrow{AB}$.
La somme de deux vecteurs opposés est le vecteur nul : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Les composantes de deux vecteurs opposés sont opposées.

Par exemple, si l'on a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, alors on a $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

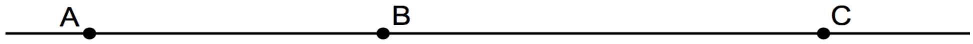
2.4.2. Produit d'un vecteur par un réel

Vecteurs parallèles

Si A , B et C sont des points de l'espace et r un nombre réel, alors on a :

$\overrightarrow{AC} = r \,.\, \overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad$ A , B et C sont alignés et $\left\| \overrightarrow{AC} \right\| = |r| \,.\, \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$

les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont parallèles



$\overrightarrow{AC} = 2{,}5 \,.\, \overrightarrow{AB}$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs non nuls de l'espace et k un nombre réel, alors on a :

$\vec{u} = k \,.\, \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles

Composantes d'un multiple d'un vecteur

Si un vecteur $\vec{u}$ est multiple d'un vecteur $\vec{v}$ (parallèle à un vecteur $\vec{v}$), alors les composantes de $\vec{u}$ sont multiples de celles de $\vec{v}$.

En langage formel : soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$; si $\vec{u} = k\,.\vec{v}$, alors $\begin{cases} u_1 = k.v_1 \\ u_2 = k.v_2 \\ u_3 = k.v_3 \end{cases}$.

Exemple

On donne les points A(5,6,-7) et B(0,10,1) .
Calculez le triple de composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et celui du vecteur $\vec{u} = 3\,.\overrightarrow{AB}$.

Nous avons $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ et donc $\vec{u} = \begin{pmatrix} -15 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix}$.

2.4.3. Combinaison linéaire de deux vecteurs

Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, un vecteur $\vec{w}$ égal à $r.\vec{u}+s.\vec{w}$ (où r et s sont des nombres réels) est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exemple : le vecteur $7\vec{u}-4\vec{v}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

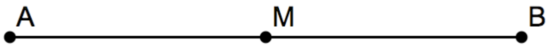
Si l'on connaît les composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on peut calculer celles de $\vec{w}$.

Par exemple, si nous avons $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$, nous aurons $7\vec{u}-4\vec{v} = \begin{pmatrix} -14 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ -4 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ 26 \\ -28 \end{pmatrix}$.

2.5. Milieu d'un segment

Le milieu d'un segment peut être défini de la façon suivante :

Le point M est le milieu du segment [AB] $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$



$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\,.\,\overrightarrow{AB}$$

Soient les points A (x_A , y_A , z_A) et B (x_B , y_B , z_B) .   Le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

En effet, soit M (x_M , y_M , z_M) le milieu du segment [AB] .
Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MB}$ étant égaux, ils ont les mêmes composantes :

$$\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \\ z_M - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_M \\ y_B - y_M \\ z_B - z_M \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_M - x_A = x_B - x_M \\ y_M - y_A = y_B - y_M \\ z_M - z_A = z_B - z_M \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} 2x_M = x_B + x_A \\ 2y_M = y_B + y_A \\ 2z_M = z_B + z_A \end{cases}$$

On en déduit la thèse.

Exercices

1. Dans un repère orthonormé, on donne les points A(4,1,-2) , B(6,0,3) et C(0,-5,1) . Calculez les composantes de chacun des vecteurs suivants :

   a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ b) $-4\,.\overrightarrow{AC}$ c) $6\,.\overrightarrow{AB} - 3\,.\overrightarrow{AC}$ d) $\frac{1}{2}\,.\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\,.\overrightarrow{AC}$

---

2. Dans un repère orthonormé, on donne les points A(3,0,-4) , B(1,1,5) et C(-2,1,-1) . Calculez la norme du vecteur $2\,.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

---

3. Dans un repère orthonormé, on donne les points A(0,0,2) , B(-1,4,3) et C(3,2,1) .

   Calculez la norme du vecteur $\frac{1}{2}\,.\overrightarrow{BC} + 2\,.\overrightarrow{AC}$.

4. Déterminez le réel a pour que les vecteurs donnés soient parallèles.

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ a-1 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix} a+1 \\ 2a-4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5-a \\ 4-a \\ 2 \end{pmatrix}$

---

5. Dans un repère orthonormé, on donne les points A(-2,1,3) , B(0,1,-2) , C(-3,0,2) et D(4,-4,5) . Calculez la longueur du segment [MP] sachant que M est le milieu de [AB] et que P est le milieu de [CD] .

---

6. Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Calculez les réels a et b pour que $a.\vec{u}+b.\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

---

7. Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6/5 \end{pmatrix}$.

Écrivez $\vec{w}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

---

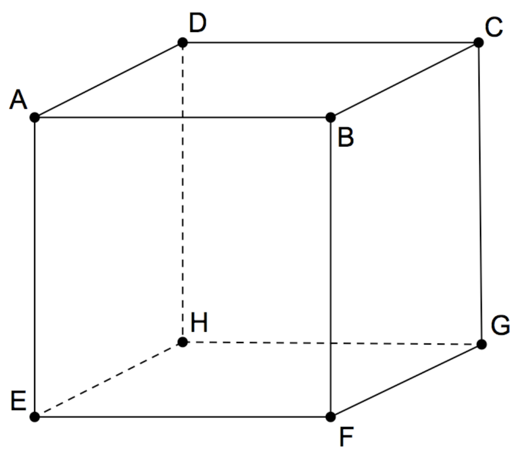
8. Voici le cube ABCDEFGH .
Construisez les points satisfaisant aux conditions données.

a) P tel que $\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{DC}$

b) Q tel que $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}.\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{FG}\right)$

c) R tel que $\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{GC}$

d) S tel que $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{HD}-\overrightarrow{HG}$



---

9. Déterminez le réel a pour que les points M(-1,2,0) , N(1,-3,4) et P(-3,7,a) soient colinéaires.

---

10. Calculez les réels m , p et r pour que le point M(3,-2,1) soit le milieu de [AB] ,

lorsque la coordonnée de A est $(2m-1\,,\,1\,,\,r-3)$ et celle de B est $\left(2,\frac{p-1}{2},1-\frac{r}{3}\right)$.

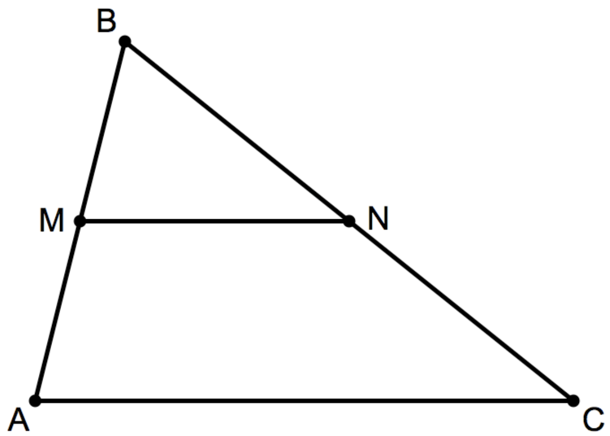
3. L'outil vectoriel en géométrie

Les vecteurs peuvent être très efficaces pour démontrer des propriétés géométriques planes ou spatiales.

Exemple 1 : le « petit » théorème de THALÈS

Démontrer que le segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle mesure la moitié de la longueur du troisième côté et est parallèle à celui-ci.

Soit le triangle ABC et les points M et N milieux respectifs des côtés [AB] et [BC] .



Ce que nous devons démontrer s'exprime vectoriellement par : $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AC}$.

En effet, cette égalité exprime que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont parallèles et que la longueur du premier est la moitié de celle du second.

Nous avons successivement :

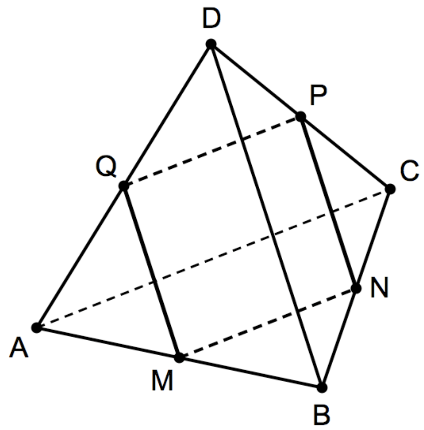
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} && \text{(relation de CHASLES)} \\
&= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AC} && \text{(commutativité)} \\
&= \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{AC} && \text{(car } \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NB} \text{ par hypothèse)} \\
&= \left(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BM}\right) + \overrightarrow{AC} && \text{(commutativité et associativité)} \\
&= \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{AC} && \text{(relation de CHASLES)}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AC} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} \;\Leftrightarrow\; 2.\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AC}$$

Exemple 2

Soit le tétraèdre ABCD et les points M , N , P et Q les milieux respectifs des arêtes [AB] , [BC] , [CD] et [AD] . Démontrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.



Il suffit par exemple de démontrer que $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{PN}$ (voir la propriété de la page 3).

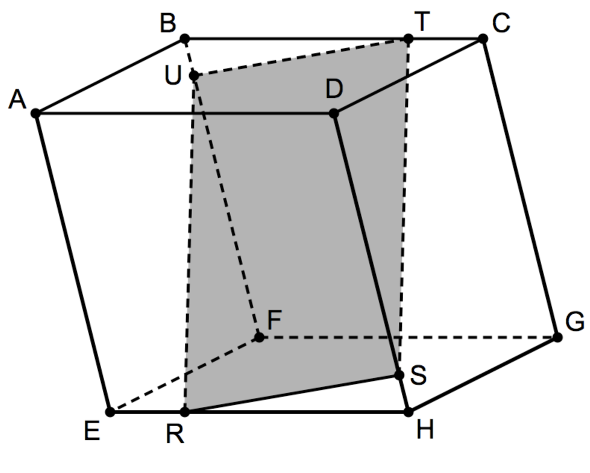
D'après le « petit » théorème de Thalès, nous avons :

- dans le triangle ABD : $\overrightarrow{QM} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{DB}$
- dans le triangle BCD : $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{DB}$

Par conséquent, $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{PN}$ et MNPQ est un parallélogramme.

Exercices

1. Soit le parallélépipède ABCDEFGH . Soit le point R sur [EH] , le point S sur [HD] , le point T sur [BC] et le point U sur [BF] tels que $\overrightarrow{BU} = \overrightarrow{SH}$ et $\overrightarrow{ER} = \overrightarrow{TC}$.



Démontrez vectoriellement que le quadrilatère RSTU est un parallélogramme.

2. Soit un segment [AB] de milieu M . Soit P un point quelconque de l'espace.

   Démontrez que $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}.\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\right)$.

---

3. Démontrez que dans un trapèze, le segment joignant les milieux des côtés non parallèles est parallèle aux bases et a pour longueur la demi somme des longueurs des bases.

---

4. Soient un parallélogramme ABCD et O un point n'appartenant pas au plan de ce parallélogramme.
   Démontrez vectoriellement que les points A' , B' , C' et D' milieux des segments [OA] , [OB] , [OC] et [OD] sont les sommets d'un parallélogramme.

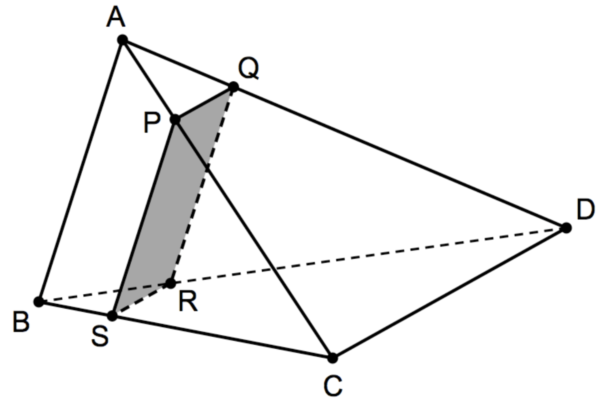
---

5. Dans le tétraèdre ABCD , on fixe les points P , Q , R et S tels que :

   $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{4}.\overrightarrow{AD}$,

   $\overrightarrow{BR} = \frac{1}{4}.\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{4}.\overrightarrow{BC}$.

   Démontrez que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

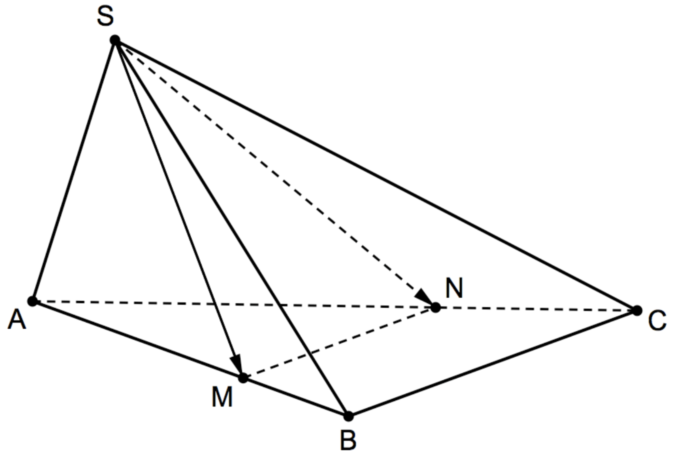


---

6. On donne le tétraèdre SABC .

   Soient le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}.\overrightarrow{AB}$ et le point N tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}.\overrightarrow{AC}$.

   Démontrez que $\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SN} = \frac{2}{3}.\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right)$.



4. Structure d'espace vectoriel

Les propriétés que nous allons énumérer maintenant concernent aussi bien les vecteurs du plan que de l'espace.

Voici d'abord les propriétés de l'addition des vecteurs.

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

❶ $\vec{u}+\vec{v}$ est un vecteur *(l'addition est interne et partout définie)*

❷ $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ *(associativité de l'addition)*

❸ $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ *(commutativité de l'addition)*

❹ $\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ *(le vecteur nul est neutre pour l'addition)*

❺ le vecteur $-\vec{u}$ existe et $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$

(tout vecteur possède un « symétrique » pour l'addition : son vecteur opposé)

On résume ces propriétés en disant que l'addition confère à l'ensemble des vecteurs (du plan ou de l'espace) une structure de **groupe commutatif**.

Voyons maintenant les propriétés de la multiplication des vecteurs par un réel (encore appelée multiplication simple ou multiplication « scalaire »).

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, quels que soient les réels r et s :

❻ $r.\vec{u}$ est un vecteur

❼ $(r+s).\vec{u}=r.\vec{u}+s.\vec{u}$ *(la multiplication simple distribue l'addition des réels)*

❽ $r.(\vec{u}+\vec{v})=r.\vec{u}+r.\vec{v}$ *(la multiplication simple distribue l'addition des vecteurs)*

❾ $r.(s.\vec{u})=(r.s).\vec{u}$ *(associativité ... avec deux types de multiplication)*

❿ $1.\vec{u}=\vec{u}$ *(le réel 1 est neutre pour la multiplication simple)*

On résume les 10 propriétés précédentes en disant que l'addition des vecteurs et la multiplication des vecteurs par un réel confèrent à l'ensemble des vecteurs (du plan ou de l'espace) une structure d'**espace vectoriel**.