COURBES PARAMÉTRÉES

Nous savons déjà que les graphiques des fonctions réelles d'une variable sont des *courbes planes*. Nous allons maintenant nous intéresser aux courbes planes en général. En effet, bien que certaines d'entre elles ne représentent pas des fonctions (il suffit de penser à un cercle), elles peuvent correspondre à un lieu géométrique possédant une propriété particulière, ou à la trajectoire d'un mobile.

La représentation graphique d'une telle courbe à partir de son équation cartésienne peut être malaisée. Il est parfois plus commode d'exprimer séparément l'abscisse et l'ordonnée d'un point de la courbe en fonction d'une troisième variable, appelée *paramètre*. On utilise alors les *équations paramétriques* de la courbe, et on parle de *courbe paramétrée*. Ainsi, en physique, l'abscisse et l'ordonnée d'un mobile dans un repère sont souvent exprimées séparément en fonction du temps, qui joue alors le rôle de paramètre.

1. Exemple introductif

Voir la fiche intitulée « Tir oblique d'un projectile ».

2. Courbe plane et équations paramétriques

<u>Définition</u> : une courbe plane est un ensemble $\boldsymbol{C}$ de couples $\left(f(t),g(t)\right)$, où f et g sont des fonctions définies sur un intervalle I.

Les équations $x = f(t)$ et $y = g(t)$, pour t appartenant à I, sont appelées *équations paramétriques* de $\boldsymbol{C}$ de *paramètre* t.

On peut aussi écrire $C \equiv \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ où $t \in I$.

<u>Exemple 1</u>

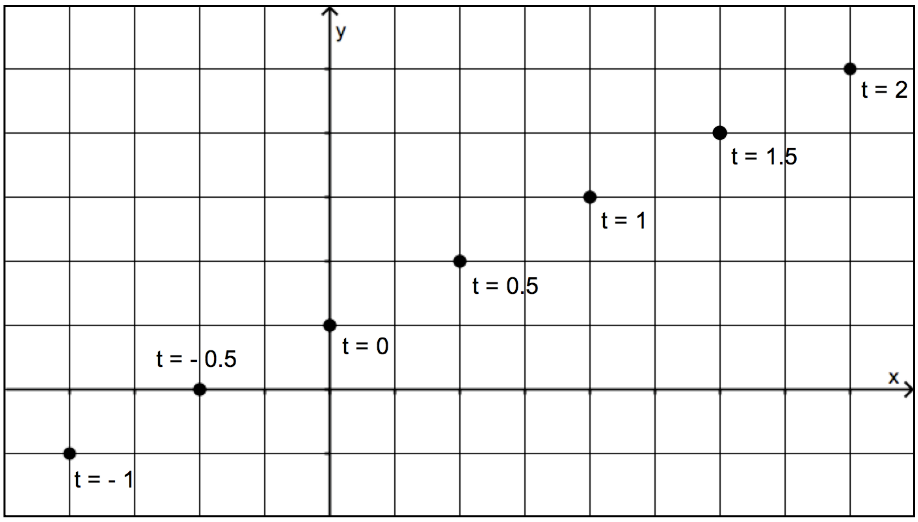
Représenter la courbe paramétrée $C \equiv \begin{cases} x = 4t \\ y = 2t+1 \end{cases}$ où $t \in \left[-1,2\right]$.

Dressons un tableau dans lequel nous indiquerons quelques valeurs de x et de y en fonction du paramètre t. Nous choisissons de faire croître t de -1 à 2 par pas de ½ .

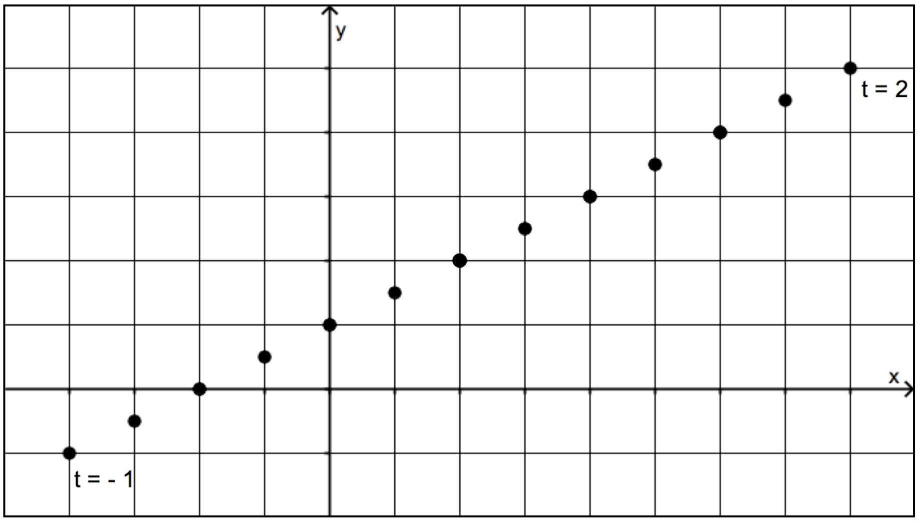
t	- 1	- 0.5	0	0.5	1	1.5	2
x	- 4	-2	0	2	4	6	8
y	-1	0	1	2	3	4	5

Il reste à placer tous ces points dans un repère. Si nous voulons une représentation plus précise de la courbe, il faut augmenter le nombre de points, c'est-à-dire réduire le pas d'accroissement de t .

Voici la représentation correspondant au tableau précédent.



Et voici les points que l'on obtient en faisant croître t de -1 à 2 par pas de ¼ .



La courbe paramétrée semble être le segment de droite reliant les points $(-4,-1)$ et $(8,5)$.

Une façon de s'en convaincre est d'éliminer le paramètre t entre les équations paramétriques :

- la première équation donne : $t = \dfrac{x}{4}$;
- substituant dans la deuxième, nous obtenons : $y = 2 \cdot \dfrac{x}{4} + 1$ ou encore $\boxed{y = \dfrac{x}{2} + 1}$.

Nous reconnaissons là l'équation d'une droite. Toutefois, il ne faut pas considérer cette droite dans son entièreté. En effet, comme $t \in [-1,2]$, et que $x = 4t$, nous avons $x \in [-4,8]$.

La courbe paramétrée est donc la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2} + 1$ *restreinte* aux abscisses de l'intervalle $[-4,8]$, c'est-à-dire un segment de droite.

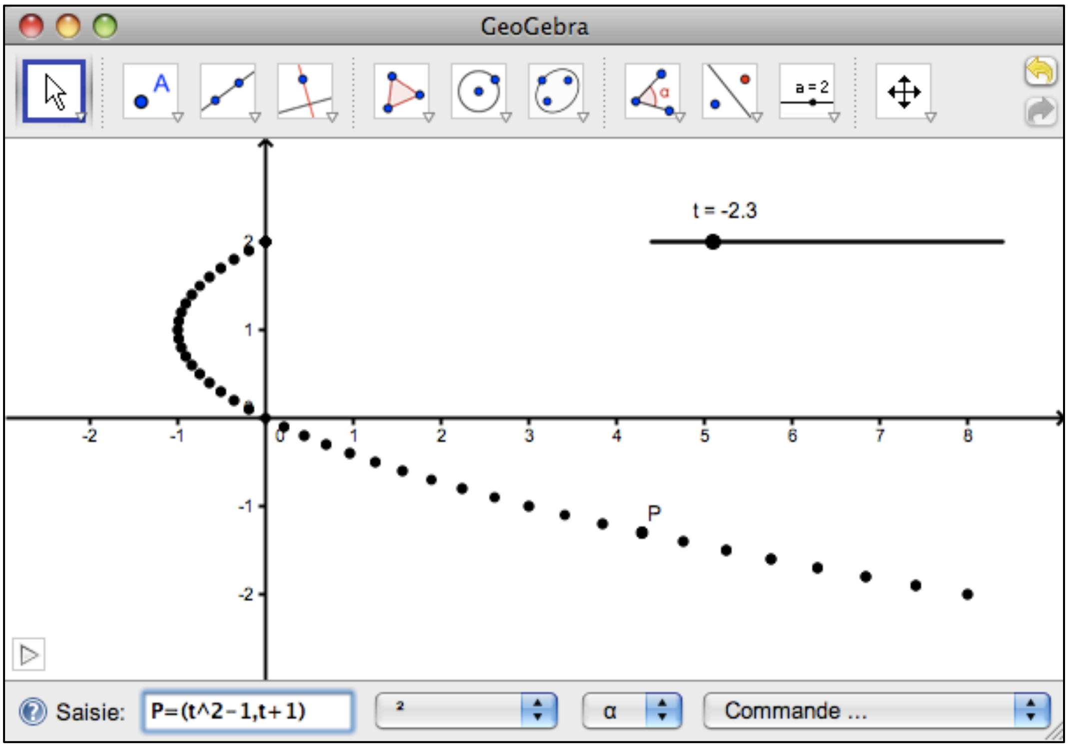
Exemple 2

Représenter la courbe paramétrée $C \equiv \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t + 1 \end{cases}$ où $t \in [-3,1]$.

Nous pouvons dresser un tableau comme dans l'exemple 1 , en faisant croître t de - 3 à 1 avec un pas suffisamment petit.
Une autre solution consiste à utiliser une calculette graphique en mode paramétrique ou, mieux encore, un logiciel tel que GEOGEBRA.

Voici la marche à suivre avec GEOGEBRA :

- insérer un curseur dans la fenêtre graphique et le renommer « *t* » ;
- dans les propriétés du curseur, indiquer la valeur minimale du paramètre (-3) , la valeur maximale (1) , et choisir le pas appelé *incrément* (par exemple 0.1) ;
- dans la ligne de saisie, définir et entrer le point $P = (t^2 - 1, t + 1)$;
- dans les propriétés du point P , cocher « trace activée » ;
- faire varier les valeurs du paramètre en agissant sur le curseur (il est aussi possible d'animer le curseur).



Les traces laissées par le point P nous suggèrent que la courbe est une portion de parabole.

Pour vérifier, éliminons le paramètre : la deuxième équation nous donne $t = y - 1$;

substituant dans la première, nous obtenons : $x = (y-1)^2 - 1$ ou encore $\boxed{(y-1)^2 = x + 1}$.

Nous reconnaissons l'équation cartésienne d'une parabole horizontale ouverte à droite, de sommet $(-1,1)$.
Toutefois, comme $t \in [-3,1]$, et que $x = t^2 - 1$, nous avons $x \in [0,8]$ (expliquer).
La courbe paramétrée est donc la parabole décrite ci-dessus *restreinte* aux abscisses comprises entre 0 et 8 .

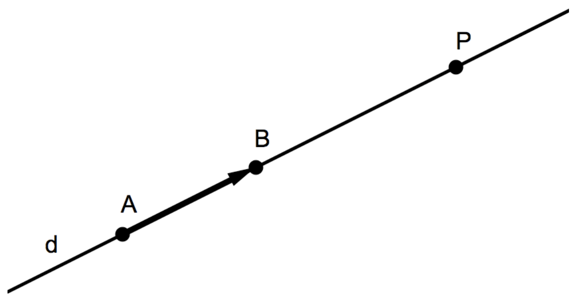
3. Paramétrisations de quelques courbes usuelles

3.1. Droites

Dans le plan, considérons une droite passant par les points $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$.
Une des façons de paramétrer cette droite est de partir de son équation vectorielle.
Cette démarche a déjà été utilisée pour les droites de l'espace dans le chapitre « Géométrie analytique de l'espace » (cours de 5e). Rappelons-nous et adaptons …

Si le point P appartient à la droite AB , alors les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires :

$$\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad (k \in R) .$$



En remplaçant chaque vecteur par ses composantes, nous obtenons :

$$(x - x_A, y - y_A) = k \cdot (x_B - x_A, y_B - y_A) .$$

Il en résulte le système suivant : $\begin{cases} x = k \cdot (x_B - x_A) + x_A \\ y = k \cdot (y_B - y_A) + y_A \end{cases}$.

Le vecteur directeur $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ est parfois noté $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Avec cette notation, nous pouvons formuler ce qui suit.

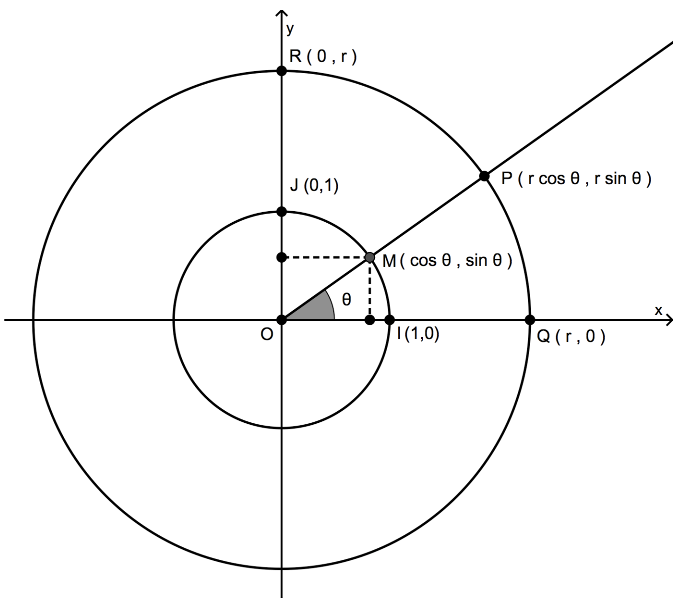
> Dans un repère orthonormé du plan, une droite comprenant le point $A(x_A,y_A)$, et de vecteur directeur $\vec{v} = (v_1,v_2)$ a pour système d'équations paramétriques
>
> $$\begin{cases} x = k \cdot v_1 + x_A \\ y = k \cdot v_2 + y_A \end{cases} \quad (k \in R) .$$

3.2. Cercles

Pensons d'abord à un cercle bien connu : le cercle trigonométrique.
Chaque point M de ce cercle a pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$, où θ est l'amplitude de l'angle orienté $I\hat{O}M$.

Pour un autre cercle, centré à l'origine et de rayon r , chaque point aura pour coordonnées $(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta)$.

Étant donné que le lien entre l'abscisse et l'ordonnée d'un point du cercle se fait via le réel θ , il est naturel de choisir celui-ci comme paramètre.



Dans un repère orthonormé du plan, un cercle centré à l'origine et de rayon r, a pour système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases} \quad (\theta \in R) .$$

Il est intéressant de procéder à l'élimination du paramètre θ pour trouver l'équation cartésienne.
Pour chacune des équations paramétriques, élevons les deux membres au carré :

$$\begin{cases} x^2 = r^2 \cdot \cos^2\theta \\ y^2 = r^2 \cdot \sin^2\theta \end{cases} .$$

Additionnons ces deux égalités membre à membre :

$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \cos^2\theta + r^2 \cdot \sin^2\theta$$

Mettons r^2 en évidence et tenons compte de la relation fondamentale $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$:

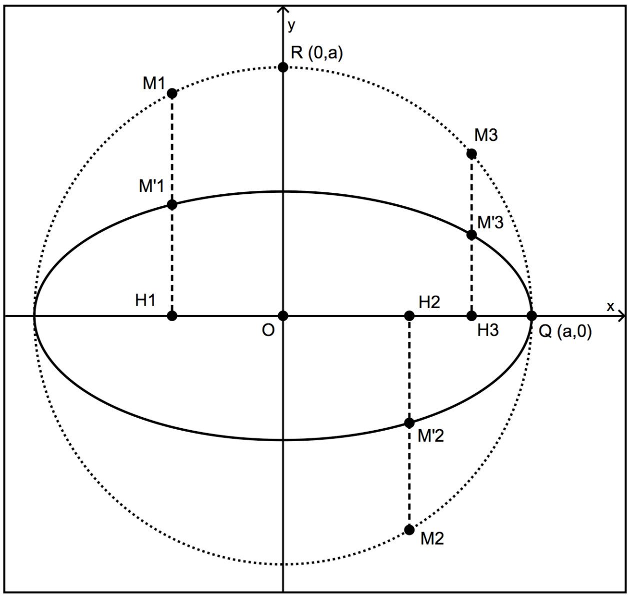
$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot (\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Nous retrouvons bien l'équation d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon r (cours de 4[e]) !

3.3. Ellipses

Une ellipse peut être définie comme la courbe transformée d'un cercle par une *affinité orthogonale*. Explicitons cela avec un exemple.



Soit un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $r = a$. Quelle est son image par une affinité orthogonale d'axe x et de rapport ½ ?
Pour construire l'image d'un point M du cercle par cette affinité, considérons le point H, pied de la perpendiculaire à l'axe x passant par M.
L'image de M est le point M', sur cette perpendiculaire, tel que :

$$d(H,M') = \frac{1}{2} \cdot d(H,M) .$$

On dit parfois que le cercle a subi une *compression* de rapport ½ perpendiculairement à l'axe des x.

Nous allons maintenant vérifier que la courbe obtenue est bien une ellipse.

En effet, les équations paramétriques du cercle sont : $\begin{cases} x = a \cdot \cos\theta \\ y = a \cdot \sin\theta \end{cases} \quad (\theta \in R)$.

Pour la nouvelle courbe, les abscisses ne changent pas, tandis que les ordonnées sont divisées par 2 . Dès lors, les équations paramétriques de cette courbe sont :

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos\theta \\ y = \frac{a}{2} \cdot \sin\theta \end{cases} \quad (\theta \in R) .$$

Pour chacune des équations paramétriques, élevons les deux membres au carré (après avoir multiplié les deux membres de la seconde par 2) :

$$\begin{cases} x^2 = a^2 \cdot \cos^2\theta \\ 4y^2 = a^2 \cdot \sin^2\theta \end{cases} .$$

Additionnons ces deux égalités membre à membre :

$$x^2 + 4y^2 = a^2 \cdot \cos^2\theta + a^2 \cdot \sin^2\theta$$

$$x^2 + 4y^2 = a^2 \cdot (\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$x^2 + 4y^2 = a^2$$

Divisons les deux membres par a^2 :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{4}} = 1}$$

Nous avons bien l'équation d'une ellipse de centre $(0,0)$, de grand axe a et de petit axe $\frac{a}{2}$.

Généralisons …

Dans un repère orthonormé du plan, une ellipse d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, a pour système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos\theta \\ y = b \cdot \sin\theta \end{cases} \quad (\theta \in R) .$$

Il suffit de voir cette ellipse comme l'image d'un cercle de rayon a par une affinité orthogonale d'axe x et de rapport b/a .

Question : que deviennent les équations paramétriques si l'ellipse a un axe focal vertical ?

3.4. Hyperboles

Dans un repère orthonormé du plan, une hyperbole d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, a pour système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\theta} \\ y=b\cdot\tan\theta \end{cases} \quad (\theta\in R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in Z\}) .$$

Vérifier et adapter au cas d'une hyperbole verticale.

3.5. Paraboles

Dans un repère orthonormé du plan, une parabole d'équation cartésienne $y^2=2px$, a pour système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x=2p\cdot\cot^2\theta \\ y=2p\cdot\cot\theta \end{cases} \quad (\theta\in R\setminus\{k\pi \mid k\in Z\}) .$$

Vérifier et adapter aux cas des autres paraboles horizontales et verticales.

Exercices

1. Déterminer une équation cartésienne de chacune des courbes suivantes, dont les équations paramétriques sont données.
   Caractériser précisément et représenter chacune de ces courbes.

a) $\begin{cases} x = t-1 \\ y = 2t+2 \end{cases}$ ($t \in [-2,1]$)

b) $\begin{cases} x = t+1 \\ y = -t^2+2 \end{cases}$ ($t \in [-1,2]$)

c) $\begin{cases} x = 3\cdot\cos\theta \\ y = 6\cdot\sin\theta \end{cases}$ ($\theta \in R$)

d) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cdot\cos\theta \\ y = \cos(2\theta) \end{cases}$ ($\theta \in R$)

e) $\begin{cases} x = 4\cdot\cos\theta - 1 \\ y = 2\cdot\sin\theta - 2 \end{cases}$ ($\theta \in R$)

f) $\begin{cases} x = \frac{1}{\mu} \\ y = 2-\mu \end{cases}$ ($\mu \in]0,2]$)

---

2. Déterminer une paramétrisation (un système d'équations paramétriques) pour chacune des courbes suivantes.

a) La droite passant par les points $A(-1,4)$ et $B(0,2)$.

b) Le segment de droite reliant les points $A(-1,4)$ et $B(0,2)$.

c) Le cercle centré à l'origine et de rayon 3 .

d) La parabole d'équation $y = 3x^2 + 2$.

e) L'ellipse centrée à l'origine, de grand axe 5 et de petit axe 3 .

f) L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$.

---

3. Déterminer une équation cartésienne des courbes dont on donne une paramétrisation.

a) $\begin{cases} x = 2\cdot\cos\theta \\ y = 3\cdot\sin\theta \end{cases}$ ($\theta \in R$)

b) $\begin{cases} x = \frac{1}{\cos\theta} \\ y = 2\cdot\tan\theta \end{cases}$ ($\theta \in R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in Z\}$)

c) $\begin{cases} x = 4\cdot\cot^2\theta \\ y = 4\cdot\cot\theta \end{cases}$ ($\theta \in R \setminus \{k\pi \mid k \in Z\}$)