# Fonctions cyclométriques

## ou les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

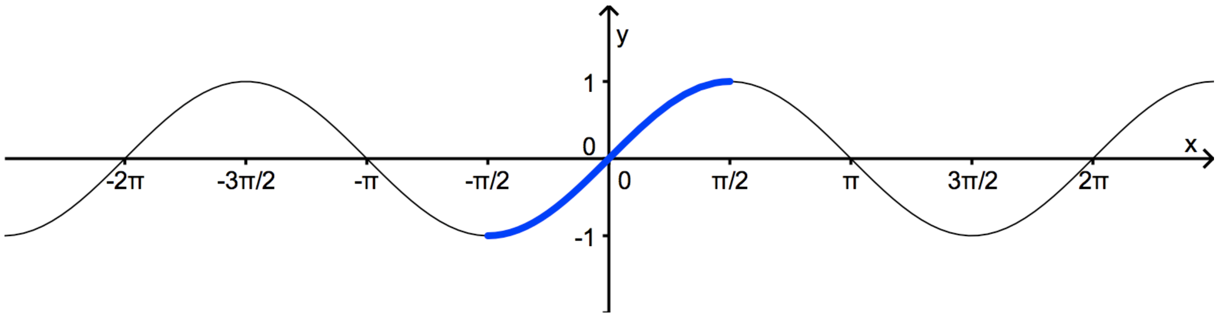
## 1. Définitions et exemples

### 1.1. La fonction « arcsinus »

Dans les problèmes de trigonométrie, il est courant de se poser des questions telles que « de quels réels ½ est-il le sinus ? » .
Il faut alors résoudre l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$ , ce qui donne une infinité de solutions :

$$x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6} + k.2\pi \quad (k \in \mathbf{Z}) .$$

La raison en est que la fonction « sinus » n'est pas une injection de **R** dans [ - 1 , 1 ] .
Si nous voulons lui attribuer une fonction réciproque, nous devons d'abord la restreindre à un intervalle bien choisi pour qu'elle soit injective.




Nous pouvons choisir la restriction de « sinus » à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ car elle y est strictement croissante et donc injective.
Sa fonction réciproque s'appelle « arc sinus » et nous noterons $f^{-1}(x) = \arcsin x$ .

$$\textbf{sin} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \overset{\textit{injection}}{\rightarrow} [-1,1] \ : \ x \rightarrow f(x) = \sin x$$

$$\textbf{arcsin} : [-1,1] \overset{\textit{injection}}{\rightarrow} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ : \ x \rightarrow f^{-1}(x) = \arcsin x$$

Par exemple, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ car $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Et bien sûr, écrire $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$ est tout à fait faux car $\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ !

$$\boxed{\forall \ x \in [-1,1] \ : \ y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \ \text{ et } \ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$$

### Représentation graphique

Quelques valeurs :

$\arcsin 0 = 0$

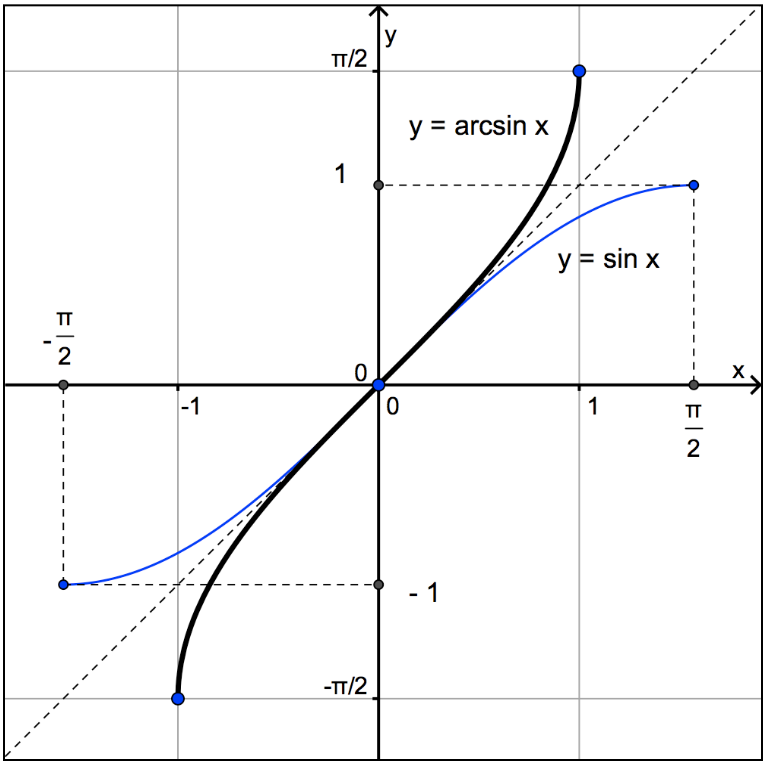
$\arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$

$\arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$

$\arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$

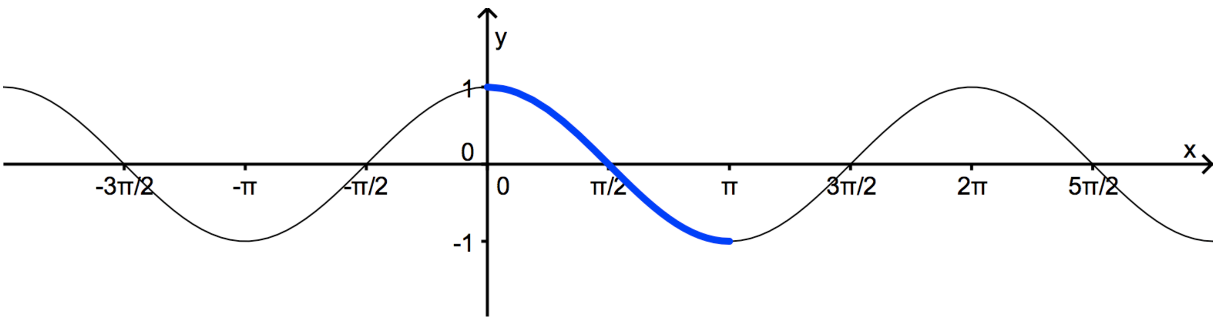
$\arcsin\left(\sin \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

…




## 1.2. La fonction « arccosinus »

Tout comme « sinus » , la fonction « cosinus » n'est pas une injection de **R** dans [ - 1 , 1] .




Nous pouvons choisir la restriction de « cosinus » à l'intervalle $[0,\pi]$ car elle y est strictement décroissante et donc injective.
Sa fonction réciproque s'appelle « arc cosinus » et nous noterons $f^{-1}(x) = \arccos x$ .

**cos** : $[0,\pi] \overset{injection}{\rightarrow} [-1,1] \ : \ x \rightarrow f(x) = \sin x$

**arccos** : $[-1,1] \overset{injection}{\rightarrow} [0,\pi] \ : \ x \rightarrow f^{-1}(x) = \arcsin x$

Exemple : arccos ½ = $\dfrac{\pi}{3}$ car $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{\pi}{3} \in [0,\pi]$ (et non $-\dfrac{\pi}{3}$ car $-\dfrac{\pi}{3} \notin [0,\pi]$ ! ) .

$$\boxed{\forall \ x \in [-1,1] \ : \ y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y \text{ et } y \in [0,\pi]}$$

**Représentation graphique**

Quelques valeurs :

$\arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$

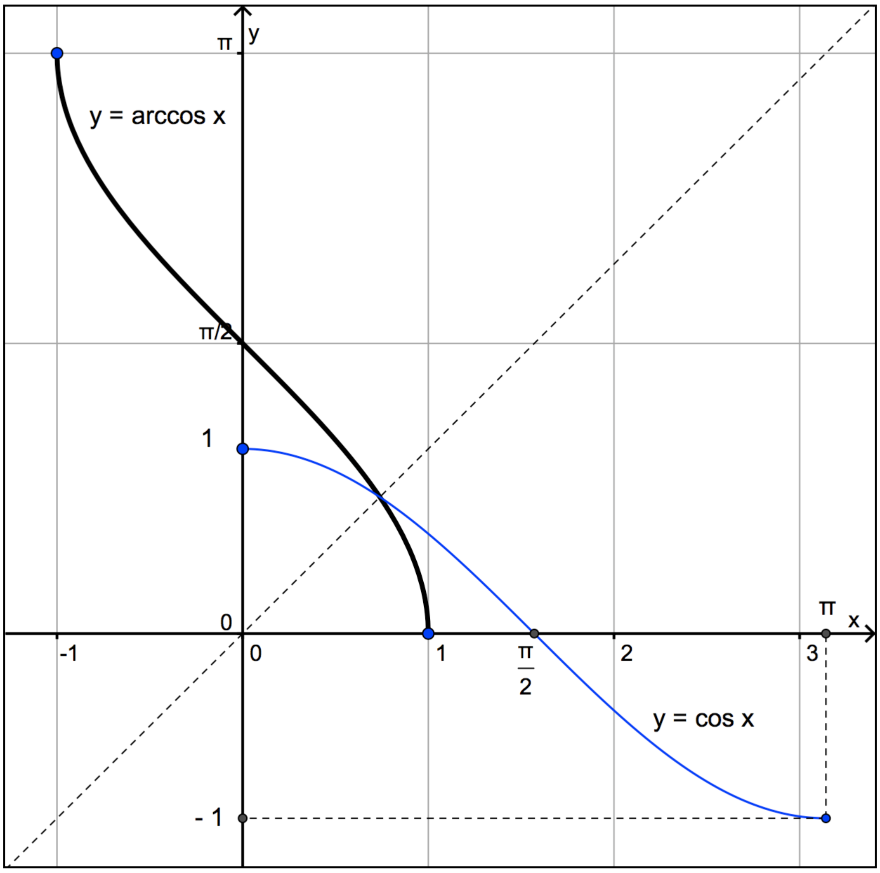
$\arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6}$

$\arccos 1 = 0$

$\arccos(-1) = \pi$

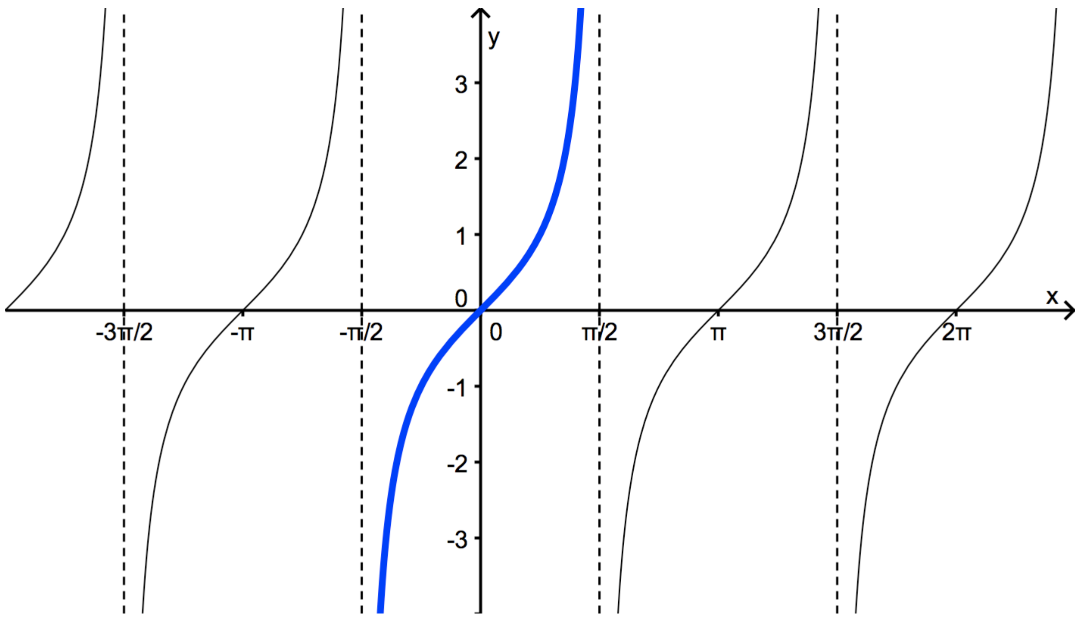
$\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = \dfrac{\pi}{2}$

…




## 1.3. La fonction « arctangente »

Une fois encore … la fonction « tangente » n'est pas une injection de son domaine dans $\mathbf{R}$ (rappelons que $dom\ \tan = \mathbf{R} \setminus \{ x \in \mathbf{R} \mid x = \pi/2 + k\pi \ (k \in \mathbf{Z}) \}$ ).




Afin de déterminer une fonction réciproque, restreignons la fonction « tangente » à l'intervalle $\left]-\pi/2 \,,\, \pi/2\right[$ . En effet, elle y est strictement croissante et donc injective.

La fonction réciproque s'appelle « arc tangente » et nous noterons $f^{-1}(x) = \arctan x$ .

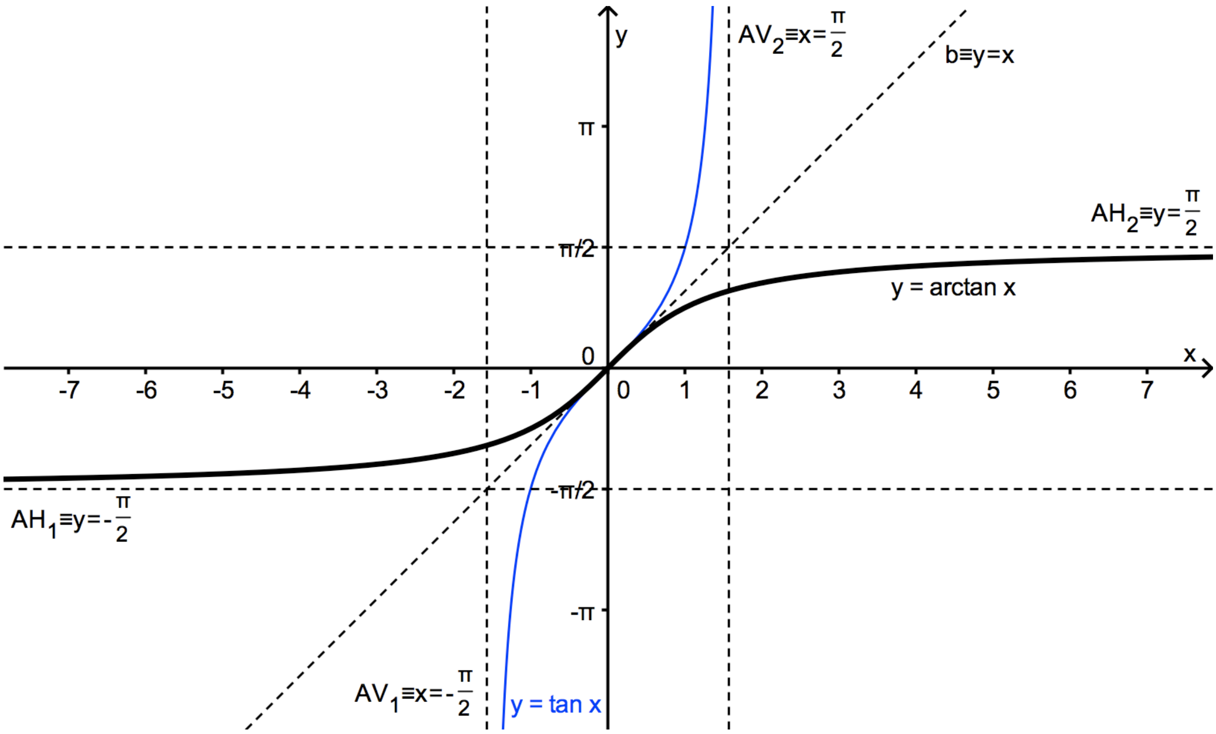
$$\textbf{tan} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \xrightarrow{injection} \mathbf{R} : x \to f(x) = \tan x$$

$$\textbf{arctan} : \mathbf{R} \xrightarrow{injection} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ : x \to f^{-1}(x) = \arctan x$$

Exemple : $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ car $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ et $\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (et non $\frac{5\pi}{4}$ car $\frac{5\pi}{4} \notin [0,\pi]$ ! ) .

$$\boxed{\forall\ x \in \mathbf{R} : y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y \text{ et } y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$$

**Représentation graphique**




Quelques valeurs :

$\arctan 0 = 0$ $\qquad \arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$ $\qquad \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$

$\arctan 3 \approx 1{,}249$ $\qquad \arctan\left(\tan\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$ $\qquad \ldots$

<u>Remarque</u> : la restriction de la fonction « tangente » à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ admet deux asymptotes verticales $AV_1 \equiv x = -\frac{\pi}{2}$ et $AV_2 \equiv x = \frac{\pi}{2}$ . La fonction « arctan » admet donc deux asymptotes horizontales $AH_1 \equiv y = -\frac{\pi}{2}$ et $AH_2 \equiv y = \frac{\pi}{2}$ .

# 2. Dérivées des fonctions cyclométriques

## 2.1. Dérivée de la fonction « arcsin »

Première méthode : utiliser la formule de dérivation d'une fonction réciproque.

Nous avons $f(\text{x}) = \sin x$ (et donc $f'(x) = \cos x$ ) et $f^{-1}(x) = \arcsin x$ .

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}\right)'(x) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \\
&= \frac{1}{f'\left(\arcsin x\right)} \\
&= \frac{1}{\cos\left(\arcsin x\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin x\right)}} && (1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && (2)
\end{aligned}$$

Deuxième méthode

Si nous posons d'abord $g(x) = \arcsin x$ , d'après la définition, nous avons :

$\sin g(x) = x$ .

Dérivons cette égalité membre à membre :

$$\cos g(x) \,.\, g'(x) = 1 \;\rightarrow\; g'(x) = \frac{1}{\cos\, g(x)} \;\rightarrow\; \left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\cos\left(\arcsin x\right)} \quad \text{etc.}$$

Le calcul se termine de la même façon que pour la première méthode avec la conclusion

$$\boxed{\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

## 2.2. Dérivée de la fonction « arccos »

$$\boxed{\left(\arccos x\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Exercice : démontrez cette formule en utilisant l'une des deux méthodes précédentes (veillez à bien justifier le choix du signe).

---

(1) En effet, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et donc $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ .
Comme $\arcsin x \in [\,-\pi/2\,,\,\pi/2]$ , son cosinus est positif et nous trouvons donc $\cos\left(\arcsin x\right) = +\sqrt{1-\sin^2 x}$ .

(2) En effet, $\sin(\arcsin x) = x$ et donc $\sin^2(\arcsin x) = x^2$ .

## 2.3. Dérivée de la fonction « arctan »

Première méthode : utiliser la formule de dérivation d'une fonction réciproque.

Nous avons $f(\mathrm{x}) = \tan x$ (et donc $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ ) [3] et $f^{-1}(x) = \arctan x$ .

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}\right)'(x) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \\
&= \frac{1}{f'\left(\arctan x\right)} \\
&= \frac{1}{1 + \tan^2\left(\arctan x\right)} \\
&= \frac{1}{1 + x^2} \quad {}^{(4)}
\end{aligned}$$

Deuxième méthode

Si nous posons d'abord $g(x) = \arctan x$ , d'après la définition, nous avons :

$\tan g(x) = x$ .

Dérivons cette égalité membre à membre :

$$\left(1 + \tan^2 g(x)\right).\ g'(x) = 1 \ \rightarrow\ g'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2 g(x)} \ \rightarrow\ \left(\arctan x\right)' = \frac{1}{1 + \tan^2\left(\arctan x\right)}$$

Le calcul se termine de la même façon que pour la première méthode avec la conclusion

$$\boxed{\left(\arctan x\right)' = \frac{1}{1 + x^2}}$$

---

(3) La dérivée de la fonction tangente est aussi connue sous la forme $\left(\tan x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ .

La forme utilisée ci-dessus est équivalente car $1 + \tan^2 x = 1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ .

(4) En effet, $\tan(\arctan x) = x$ et donc $\tan^2(\arctan x) = x^2$ .

**Exercices**

1. Donnez les valeurs exactes de …

a) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $\arctan\sqrt{3}$

d) $\arcsin\frac{1}{2}$

e) $\arctan\ 1$

f) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

---

2. Résolvez les équations suivantes, d'inconnue $x$ .

a) $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)=x$

b) $\arccos(2x)=-\frac{\pi}{4}$

c) $\arccos\left(\sin\frac{7\pi}{3}\right)=x$

d) $\arctan(2x)=-\frac{\pi}{3}$

e) $\arccos(\sin x)=\frac{\pi}{6}$

f) $\arctan\left(\sqrt{3}-x\right)=\frac{\pi}{6}$

---

3. Sans calculatrice, déterminez la valeur exacte de chacune des expressions suivantes.

a) $\arcsin\frac{3}{5}\ +\ \arcsin\frac{4}{5}$

b) $\arctan\frac{1}{2}\ +\ \arctan\frac{1}{3}$

---

4. Calculez (sans calculatrice évidemment … )

a) $\arcsin(\cos 15°)$

b) $\arccos(\sin 325°)$

---

5. Déterminez le domaine de définition et la fonction dérivée première de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x)=\arcsin(2x)$

b) $f(x)=\arccos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$

c) $f(x)=\arcsin(\pi-3x)$

d) $f(x)=\arccos(3x+\pi)$

e) $f(x)=\arccos\sqrt{x^2+1}$

f) $f(x)=\arctan(x+1)^2$

---

6. Démontrez que $\forall\ x\in[-1,1]:\ \arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ .

7. Déterminez le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes et tracez leur graphique.

a) $f(x) = \sin(\arcsin x)$

b) $f(x) = \arcsin(\sin x)$

---

8. Étudiez complètement la fonction suivante (domaine de définition, asymptotes, variations, concavités, etc) et tracez son graphique :

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right).$$

---

9. Démontrez les identités suivantes.

a) $\forall\ x \in\ ]-1, 1[\ :\ \tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $\forall\ x \in \mathbf{R} :\ \sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

c) $\forall\ x \in [\,1, +\infty\,[\ :\ \arcsin\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \arccos\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)$

---

10. Démontrez que $\arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{5} + \arctan\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$ .

---

11. Résolvez les équations suivantes d'inconnue x .

a) $\arctan x + \arctan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{4}$

b) $\arccos x = \arctan\dfrac{3}{4}$

c) $\arctan(x-1) + \arctan\dfrac{1}{x+1} = \arctan x$

---

12. Calculez les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{\arcsin x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{k.\arctan x - x}{k\,x - \arcsin x}$ ( $k \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ )

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{x - \arcsin x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \arctan\frac{1}{x-1}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \arctan\frac{x}{x-\frac{\pi}{3}}$

13. Retrouvez le graphique de chacune des fonctions suivantes. Justifiez.

a) $f(x) = \arccos|x|$

b) $g(x) = \arcsin\dfrac{1}{x}$

c) $h(x) = \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{x}{4}$

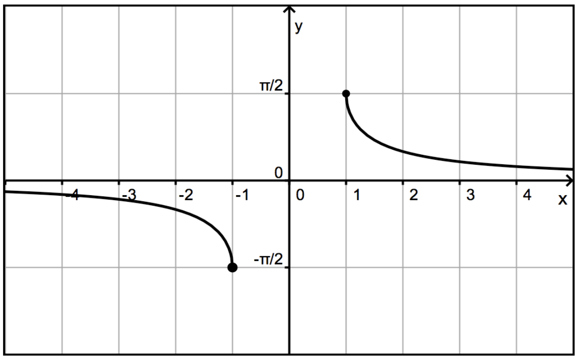
d) $i(x) = \arctan\dfrac{1}{x}$

e) $j(x) = \arcsin|x|$

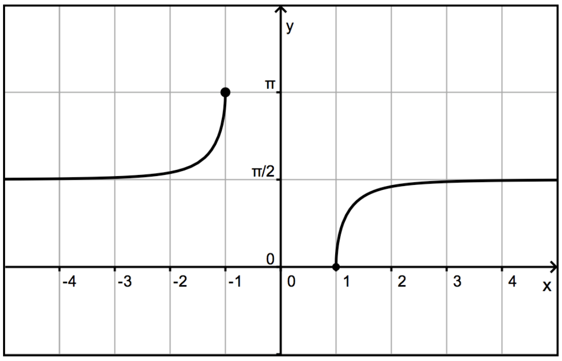
f) $k(x) = \arcsin\dfrac{x}{4}$

g) $l(x) = \arccos\dfrac{1}{x^3}$

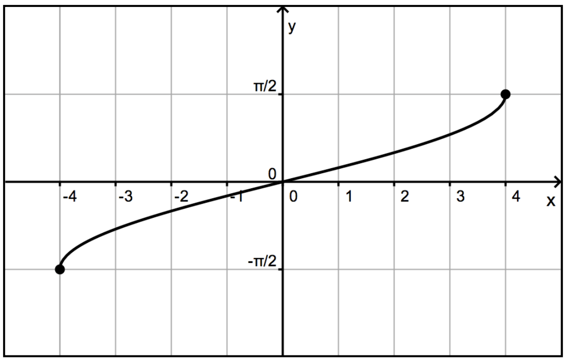
①



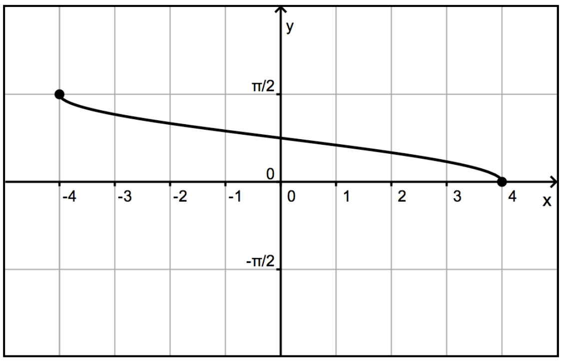

②



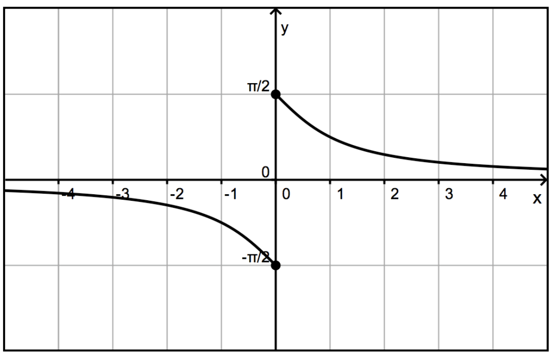

③



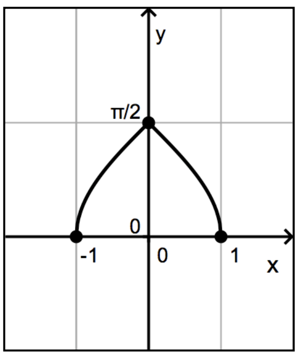

④




⑤




⑥




⑦