LIEUX GÉOMÉTRIQUES

Nous savons depuis longtemps qu'un lieu géométrique est l'ensemble de tous les points possédant une certaine propriété. Parmi les premiers lieux que l'on rencontre dans un cours de géométrie, citons le *cercle* (ensemble de tous les points du plan situés à égale distance d'un point fixe) et la *médiatrice* d'un segment (ensemble de tous les points du plan situés à égale distance des extrémités de ce segment). Les *coniques* ont également été définies comme des lieux géométriques.
Parfois, un lieu correspond à une *trajectoire*. Ainsi, la *cycloïde* est-elle le lieu géométrique coïncidant avec la trajectoire d'un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite (figure 1).

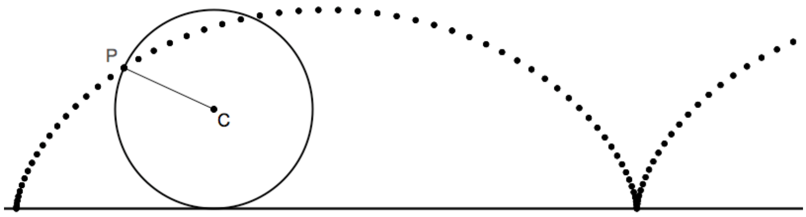


Fig. 1

Dans le même ordre d'idée, si l'on considère un *point mobile* dans une figure géométrique, on peut étudier les répercussions sur d'autres points et déterminer le lieu de toutes les positions possibles de ceux-ci. Un exemple classique est celui d'un triangle dont la base est fixe et dont le troisième sommet est mobile (sur une droite, sur un cercle, …). On peut alors s'interroger sur le lieu du centre de gravité du triangle (figure 2), de son orthocentre, etc.

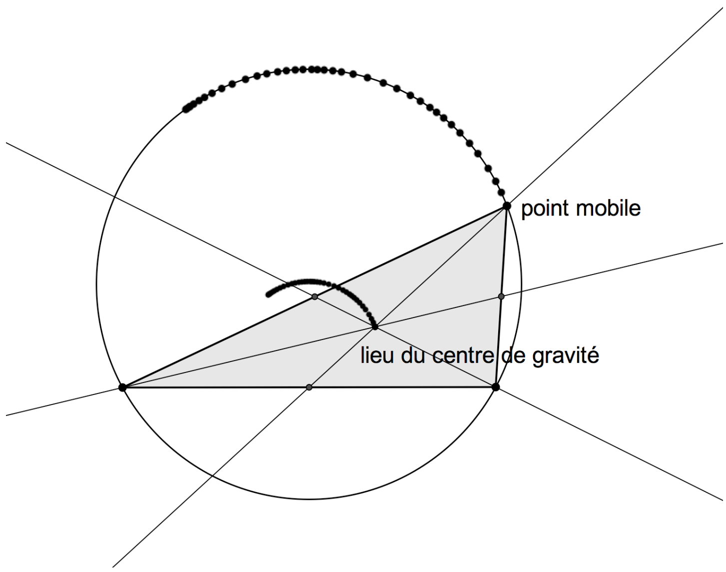


Fig. 2

L'étude des lieux géométriques est un sujet très vaste qui mobilise toutes les connaissances géométriques acquises auparavant. Certains problèmes sont très difficiles à résoudre. Souvent, pour se faire une première idée du lieu, on en construit quelques points particuliers. Les logiciels de géométrie dynamique sont ici d'une aide précieuse, car ils rendent plus aisée la formulation d'une conjecture … qui doit ensuite être démontrée !

Nous allons maintenant voir les trois principales méthodes de recherches de lieux.

1. La méthode synthétique

Cette méthode se base essentiellement sur l'utilisation des définitions des figures, ainsi que de leurs propriétés géométriques, y compris vectorielles. En principe, on n'utilise pas de repère ni de calcul sur des coordonnées comme dans les méthodes que nous verrons par après.

Exemple 1

On donne un triangle ABC dont les sommets B et C sont fixes. Le point A est mobile, mais l'angle $B\hat{A}C$ est constant. Déterminer le lieu géométrique

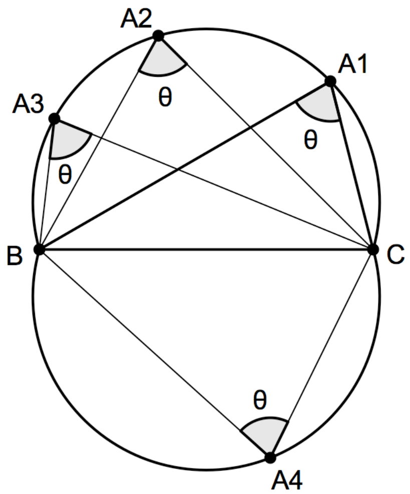
a) du sommet A ;
b) du centre I du cercle inscrit au triangle ABC.

Solution

a) L'ensemble de tous les points d'où l'on voit un segment sous un même angle est un lieu connu (voir cours de 3^{e}).
Dans notre cas, il s'agit des deux arcs capables de l'angle $B\hat{A}C$ construits sur le segment $\left[BC\right]$.

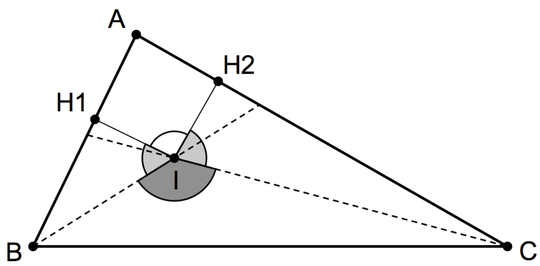
La figure ci-contre montre différentes positions de A et les angles $B\hat{A_i}C$ qui ont tous pour amplitude θ.

Attention : les points B et C sont à exclure du lieu (expliquer) ; on les appelle *points parasites*.



b) Le centre du cercle inscrit est le point I, intersection des bissectrices intérieures du triangle. On peut naturellement se poser la question « sous quel angle voit-on le segment $\left[BC\right]$ à partir du point I ? ».

Traçons d'abord les hauteurs issues de I, relativement aux côtés $\left[AB\right]$ et $\left[AC\right]$.

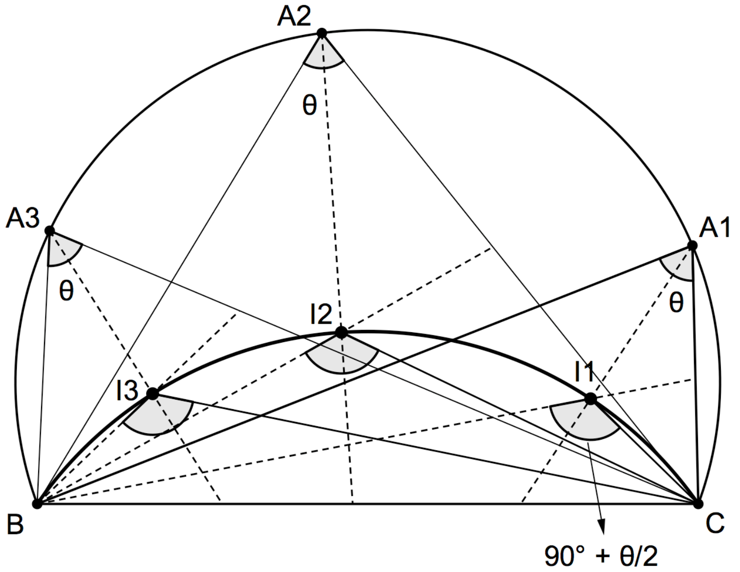


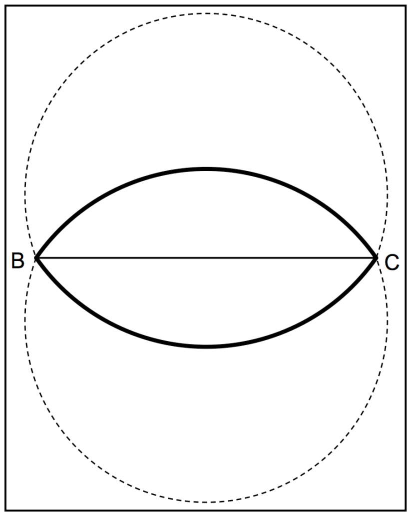
Nous avons successivement :

$$
\begin{aligned}
B\hat{I}C &= 360° - B\hat{I}H_1 - H_1\hat{I}H_2 - C\hat{I}H_2 \\
&= 360° - \left(90° - \frac{A\hat{B}C}{2}\right) - \left(180° - B\hat{A}C\right) - \left(90° - \frac{A\hat{C}B}{2}\right) \\
&= \frac{A\hat{B}C}{2} + B\hat{A}C + \frac{A\hat{C}B}{2} = \left(\frac{A\hat{B}C}{2} + \frac{B\hat{A}C}{2} + \frac{A\hat{C}B}{2}\right) + \frac{B\hat{A}C}{2} = 90° + \frac{B\hat{A}C}{2}
\end{aligned}
$$

Nous (re)trouvons ainsi une propriété intéressante : l'angle sous lequel on voit un côté d'un triangle à partir du centre du cercle inscrit, est égal à la somme d'un angle droit et de la moitié de l'angle sous lequel on voit le segment à partir du sommet opposé.

Dans notre problème, l'angle $B\hat{A}C$ étant constant, l'angle $B\hat{I}C$ l'est aussi. Le lieu géométrique de I est donc la réunion des deux arcs capables de l'angle $B\hat{I}C$ construits sur le segment $[BC]$.





La figure de gauche montre trois triangles dans lesquels on a chaque fois tracé deux bissectrices (en pointillés) afin de déterminer le centre I du cercle circonscrit. Le sommet A est situé au-dessus du segment $[BC]$, de sorte que le lieu de I est également situé au-dessus de ce segment. Le lieu complet est représenté dans la figure de droite ; il faut encore en exclure les points B et C.

Exemple 2

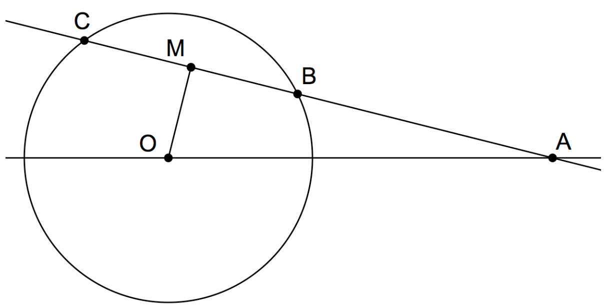
On donne un cercle $\boldsymbol{C}$ et un point A n'appartenant pas à $\boldsymbol{C}$. Déterminer le lieu des milieux des cordes découpées par le cercle sur les droites qui pivotent autour du point A.

Solution

Cherchons d'abord des points particuliers du lieu :

- le centre O du cercle en est un ; en effet, si la droite passant par A découpe un diamètre du cercle, le milieu du diamètre est le point O ;
- si la droite mobile est tangente au cercle, la corde découpée est réduite à un point ; les points de tangence font donc aussi partie du lieu.

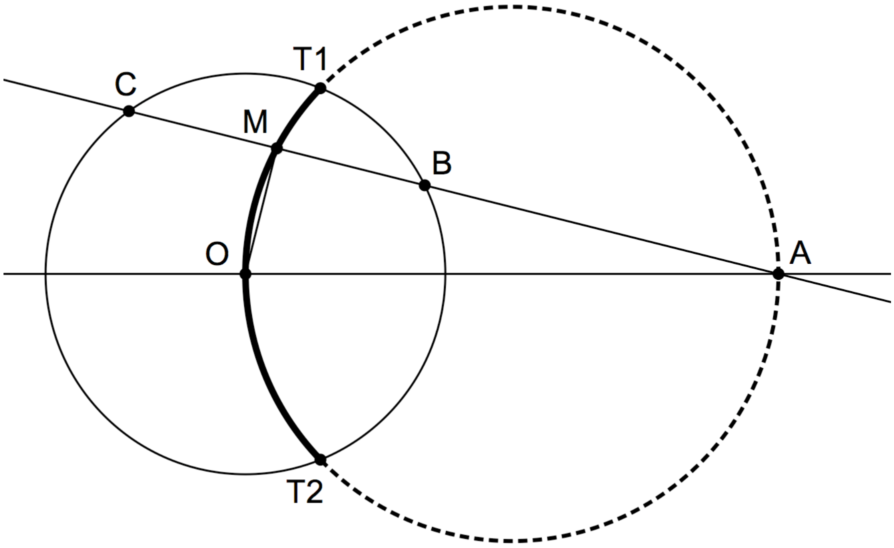
Considérons ensuite une droite quelconque, sur laquelle le cercle découpe la corde $[BC]$ de milieu M (figure ci-contre).



Comme le point O est équidistant de B et de C, il appartient à la médiatrice de ce segment. Donc $OM \perp AB$. Le triangle OMA étant rectangle en M, il est inscrit dans un cercle de diamètre $[OA]$.

Construisons ce cercle. La *partie utile* de celui-ci est l'arc intérieur au cercle $\boldsymbol{C}$, y compris les points T_1 et T_2 , qui sont les points de contact entre $\boldsymbol{C}$ et les tangentes issues de A .

Le lieu géométrique cherché est donc l'arc représenté en gras sur la figure ci-dessous.



Remarque importante

Pour démontrer qu'une courbe $\boldsymbol{C}$ est effectivement le lieu géométrique des points possédant la propriété P , il faut prouver que

1. tout point de $\boldsymbol{C}$ possède la propriété P ;
2. tout point possédant la propriété P appartient à $\boldsymbol{C}$ (ou la contraposée[1]).

Dans le cas de l'exemple précédent, cela signifie qu'il faut prouver que :

1. **Tout point M de l'arc $T_1\widehat{O}T_2$, est le milieu d'une corde découpée par le cercle sur une droite issue de A .**

   En effet, le point M appartient aussi au cercle de diamètre $[OA]$, et le triangle OMA est donc rectangle en M . Soit $[BC]$ le segment découpé par le cercle sur la droite AM .
   La droite OM est la médiatrice du segment $[BC]$ car elle lui est perpendiculaire et que O est équidistant de B et de C . Le point M est donc le milieu de la corde $[BC]$.

2. **Tout point qui est le milieu d'une corde découpée par le cercle sur une droite issue de A appartient à l'arc $T_1\widehat{O}T_2$.**

   Soit $[BC]$ cette corde. Comme le point O est équidistant de B et de C , il appartient à la médiatrice de ce segment. Donc $OM \perp AB$. Cela signifie que le triangle OMA est rectangle en M , et qu'il est donc inscrit dans le cercle de diamètre $[OA]$.
   Le point M est donc aussi sur ce cercle, sur l'arc $T_1\widehat{O}T_2$.

[1] C'est-à-dire que tout point qui n'appartient pas à $\boldsymbol{C}$ ne possède pas la propriété P .

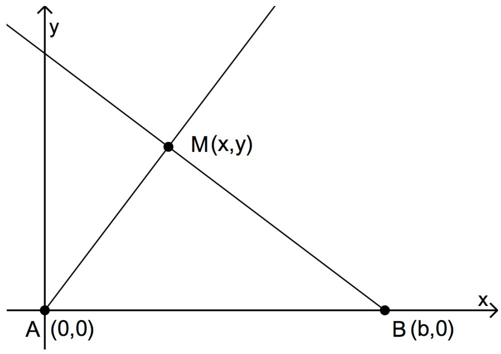
2. La méthode analytique de traduction

Cette méthode consiste d'abord à choisir un repère bien adapté au problème, et ensuite à utiliser les coordonnées des points, ainsi que les équations des droites ou autres courbes qui entrent en jeu. La recherche du lieu passe par la traduction, dans le repère choisi, de la propriété d'appartenance d'un point au lieu. C'est d'ailleurs de cette façon que nous avons procédé pour déterminer les équations cartésiennes des coniques.

Exemple 1

On donne deux points fixes distincts A et B. Déterminer le lieu géométrique des projections orthogonales de B sur les droites comprenant A.

Solution



Comme la notion d'orthogonalité intervient dans ce problème, nous allons choisir un repère orthonormé.

Nous choisissons :

- l'origine en A ;
- la droite AB comme axe des abscisses, en attribuant les coordonnées $(b,0)$ au point B ;
- la perpendiculaire à AB comprenant A comme axe des ordonnées.

Comment traduire la propriété du point M, à savoir qu'il est la projection orthogonale de B sur une droite comprenant A ? Il s'agit simplement d'exprimer que la droite MA est perpendiculaire à la droite MB.
Cela peut se faire via les coefficients angulaires, mais nous allons plutôt choisir d'exprimer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux :

$$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BM} = 0 \qquad \text{(le produit scalaire est nul)}$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \bullet (x-b,y) = 0 \qquad \text{(utilisation des composantes des vecteurs)}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (x-b) + y \cdot y = 0 \qquad \text{(expression du produit scalaire dans un RON)}$$

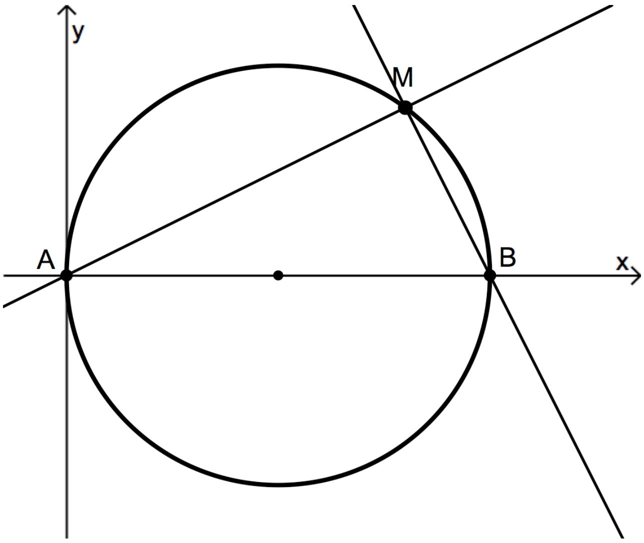
$$\Leftrightarrow x^2 - bx + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 2\frac{b}{2}x + \frac{b^2}{4}\right) + y^2 = \frac{b^2}{4} \qquad \text{(pour obtenir un trinôme carré parfait)}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{b^2}{4}$$

Nous reconnaissons l'équation cartésienne d'un cercle de centre $\left(\frac{b}{2},0\right)$ et de rayon $\frac{b}{2}$.

Le lieu cherché est donc le cercle de diamètre $[AB]$ (figure page suivante).



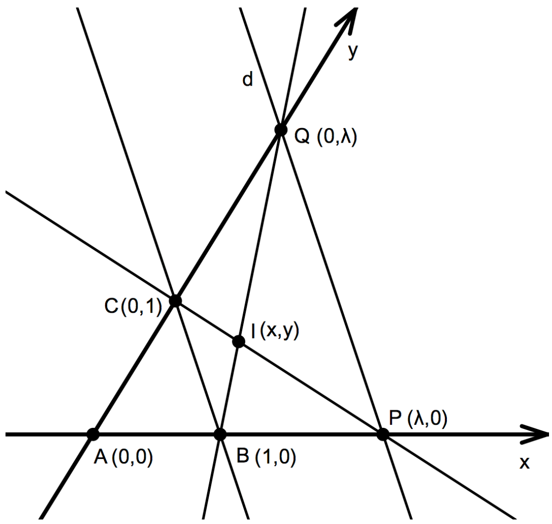
<u>Remarque</u> : ce lieu pouvait facilement être trouvé par la méthode synthétique (exercice).

<u>Exemple 2</u>

On donne trois points fixes non alignés A, B et C. Une droite d parallèle à BC coupe les droites AB et AC respectivement en P et en Q. Déterminer le lieu géométrique du point d'intersection des droites BQ et CP.

<u>Solution</u>

Dans ce problème n'interviennent que des propriétés *affines*, c'est-à-dire des propriétés où il n'est question ni de distances, ni d'amplitudes d'angles. Il n'est donc pas nécessaire, ni indiqué, de choisir un repère orthogonal.
Il vaut mieux choisir le point A comme origine, la droite AB comme axe des abscisses, et la droite AC comme axe des ordonnées.
Pour encore faciliter le travail, nous attribuons au point B les coordonnées $(1,0)$, et au point C les coordonnées $(0,1)$ (figure ci-contre).



La droite variable d coupe l'axe des abscisses au point $P(\lambda,0)$ où λ est un paramètre réel. Grâce au théorème de THALÈS, nous pouvons déduire que d coupe l'axe des ordonnées au point $Q(0,\lambda)$.
Nous cherchons le lieu géométrique du point I, intersection des droites BQ et CP. Afin de trouver les coordonnées de I, il faut résoudre le système formé par les équations cartésiennes de BQ et de CP (déterminer ces équations).

$$\begin{cases} BQ \equiv y = -\lambda x + \lambda & (1) \\ CP \equiv y = -\dfrac{1}{\lambda} x + 1 & (2) \end{cases} \quad \text{(avec } \lambda \neq 0 \text{)}$$

Réglons immédiatement le cas où $\lambda = 0$: la droite d comprend l'origine, et les points P, Q et I sont confondus avec celle-ci. L'origine est donc un point particulier du lieu.

Présentons maintenant les équations (1) et (2) sous forme implicite, en multipliant la seconde par λ. Le but est de discuter le système en fonction du paramètre λ, à l'aide de la méthode de CRAMER :

$$\begin{cases} \lambda x + y = \lambda \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$$

Calculons les déterminants nécessaires :

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \qquad D_x = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda \qquad D_y = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda$$

Discussion

- Si $D = 0$ (c'est-à-dire si $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$)

  1er cas : $\lambda = 1$: le système devient $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$.

  Il est simplement indéterminé et admet pour solutions tous les points de la droite d'équation $x + y = 1$, c'est-à-dire BC. Il s'agit de la partie dite *singulière* du lieu[2].
  D'un point de vue géométrique, si $\lambda = 1$, les droites d, BQ et CP sont confondues avec BC. Dès lors, les droites BQ et CP ont une infinité de points communs qui constituent une partie du lieu cherché.

  2e cas : $\lambda = -1$: le système devient $\begin{cases} -x + y = -1 \\ x - y = -1 \end{cases}$.

  Le système est impossible car ses équations sont incompatibles.

- Si $D \neq 0$ (c'est-à-dire si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -1$)

  Le système admet une solution unique :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\lambda^2 - \lambda}{\lambda^2 - 1} = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \quad \text{et} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda^2 - \lambda}{\lambda^2 - 1} = \frac{\lambda}{\lambda + 1}$$

  Les points I correspondants appartiennent à la droite d'équation $y = x$.

Toutefois, nous ne pouvons pas encore en déduire que toute la droite $y = x$ est une partie du lieu ! Il faut encore être prudent, et l'exploration de la trajectoire de I avec un logiciel de géométrie dynamique peut nous mettre sur la voie …
En effet, si l'on déplace la droite d vers le haut, pour des valeurs de plus en plus grandes du paramètre λ, nous constatons que la droite BQ tend à devenir parallèle à l'axe des ordonnées, sans jamais l'être. La même remarque vaut pour la droite CP par rapport à l'axe des abscisses. Le point $(1,1)$ ne sera donc jamais intersection de BQ et CP !
En voici la confirmation algébrique : comme λ est toujours différent de $\lambda + 1$, les coordonnées x et y ne peuvent pas être égales à 1.

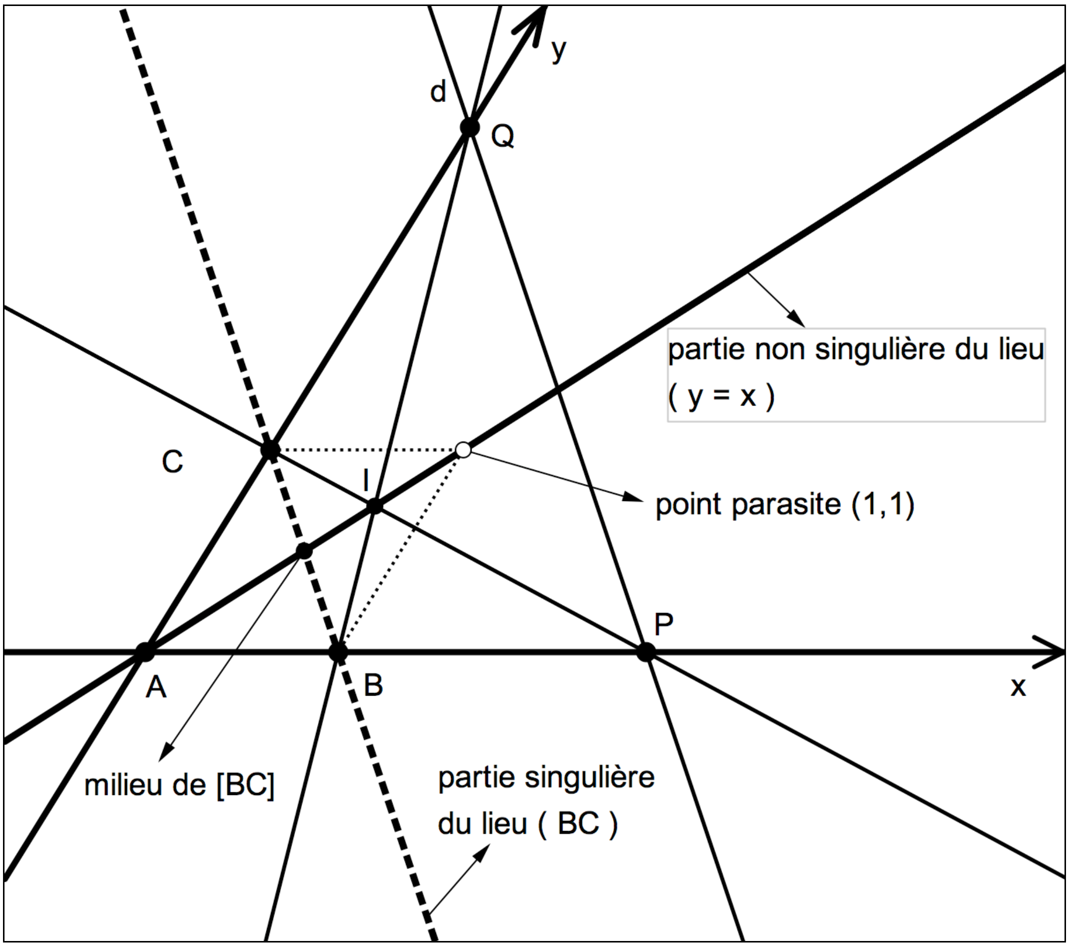
On dit que $(1,1)$ est un *point parasite* du lieu.

[2] Le qualificatif « singulière » se justifie par le fait qu'il s'agit d'une partie inattendue, qui dévie de la trajectoire « naturelle » de I.

Conclusion

Le lieu géométrique cherché est la réunion de

- la *partie non singulière* du lieu : la droite comprenant A et le milieu de $[BC]$, de laquelle on a ôté le point $I(1,1)$;
- la *partie singulière* du lieu : la droite BC.



3. La méthode analytique des génératrices

Il arrive souvent que le lieu géométrique cherché soit l'ensemble des points se trouvant à l'intersection de deux familles de courbes, dont les équations cartésiennes dépendent d'un ou de plusieurs paramètres. Ces deux familles de courbes sont appelées les *génératrices* du lieu.

La méthode consiste à déterminer des équations cartésiennes des génératrices, et à éliminer les paramètres afin de trouver une équation cartésienne du lieu.

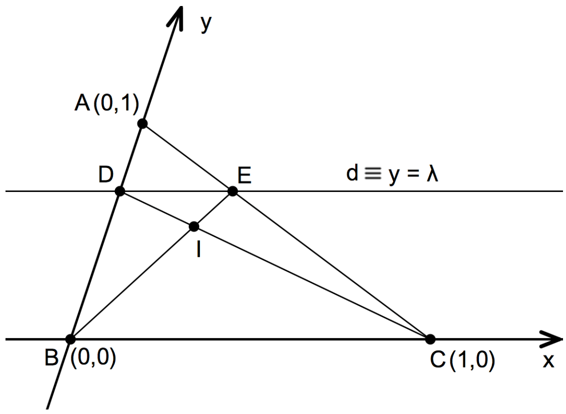
<u>Exemple 1</u>

Soit un triangle ABC et une parallèle d à la base BC, coupant AB en D et AC en E. La droite d se déplace entre la base et le sommet. Déterminer le lieu géométrique des points se trouvant à l'intersection des <u>segments</u> $[BE]$ et $[DC]$.

<u>Solution</u>

L'énoncé nous autorise à choisir un repère affine comme dans la figure ci-contre.
La droite d étant parallèle à l'axe des abscisses, le paramètre est l'ordonnée de cette droite : $d \equiv y = \lambda$ (avec $0 \leq \lambda \leq 1$).

Nous cherchons le lieu du point I, intersection des segments $[BE]$ et $[DC]$. Ces segments sont donc les génératrices du lieu, et nous devons commencer par en déterminer les équations cartésiennes.



D'abord, cherchons les coordonnées des points variables D et E.
On vérifie aisément que : $D(0,\lambda)$ et $E(1-\lambda,\lambda)$ (car $E \in AC \equiv y = 1 - x$).

Dès lors : $BE \equiv y = \dfrac{\lambda}{1-\lambda} \cdot x$ (avec $\lambda \neq 1$) et $CD \equiv y = -\lambda \cdot x + \lambda$.

Traitons d'abord le cas où $\lambda = 1$. La droite d passe alors par le point A, et les points D, E et I sont confondus avec A. Celui-ci est un point particulier du lieu.

Pour trouver une équation cartésienne du lieu, il faut éliminer le paramètre du système formé par les équations des génératrices, que nous aurons mises sous forme implicite :

$$\begin{cases} \lambda \cdot x - (1-\lambda) \cdot y = 0 & (1) \\ \lambda \cdot x + y - \lambda = 0 & (2) \end{cases}$$

D'après (2) , nous avons : $\lambda = \dfrac{y}{1-x}$ (à condition que $x \neq 1$).
Reportant cette expression dans (1) , nous obtenons successivement :

$$\frac{y}{1-x} \cdot x - \left(1 - \frac{y}{1-x}\right) \cdot y = 0 \;\Rightarrow\; yx - (1-x-y) \cdot y = 0 \;\Rightarrow\; yx - y + xy + y^2 = 0 \;\Rightarrow$$

$$y^2 + 2xy - y = 0 \Rightarrow y \cdot (y + 2x - 1) = 0 \;.$$

Le lieu serait donc inclus dans la réunion des droites $y = 0$ et $y = 1 - 2x$.

Nous allons préciser ce résultat.

D'abord, que se passe-t-il si $x = 1$?

L'équation (2) s'écrit $0 \cdot \lambda + y = 0$. La condition pour qu'il existe un réel λ qui satisfasse à cette équation est $y = 0$. Dans ce cas, λ peut prendre n'importe quelle valeur.
Tenant compte que $x = 1$ et $y = 0$, l'équation (1) s'écrit : $\lambda = 0$.
À condition que $x = 1$ et $y = 0$, le réel λ satisfait aux équations (1) et (2). Le point $(1,0)$ est donc un point particulier du lieu.

Partie singulière du lieu

Lorsque $\lambda = 0$, le système d'équations des génératrices devient $\begin{cases} y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Les deux génératrices sont confondues avec l'axe des abscisses ; tout point de celui-ci fait partie du lieu. La droite y = 0 est la *partie singulière* du lieu.

Partie parasite du lieu

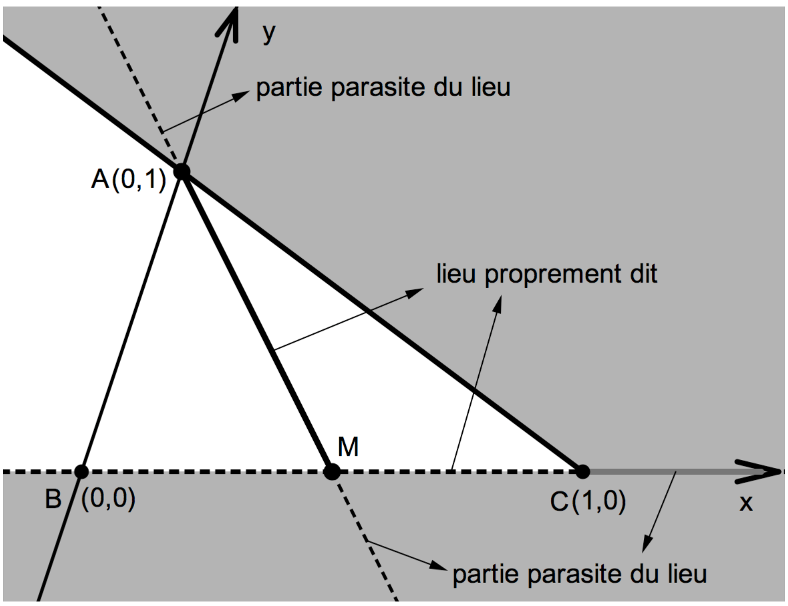
Considérons simultanément :
- la condition sur le paramètre ($0 \le \lambda \le 1$) ;
- une des génératrices, par exemple $\lambda \cdot x + y - \lambda = 0$.

Cette équation peut encore s'écrire $y = \lambda \cdot (1 - x)$.

Multipliant la double inégalité de la condition par le facteur positif $(1 - x)$, nous obtenons :

$$0 \le \lambda \cdot (1 - x) \le 1 - x \text{ , c'est-à-dire } 0 \le y \le 1 - x \text{ .}$$

Cette double inégalité détermine la zone du plan contenant le lieu : il s'agit du demi-plan fermé bordé par la droite AC et l'axe des abscisses. Toute partie de lieu se trouvant hors de cette zone est parasite.

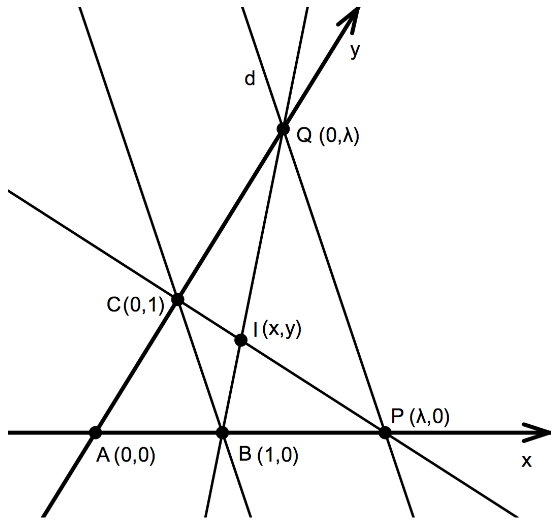


Conclusion : le lieu géométrique cherché est la réunion du segment $[AM]$ (partie non singulière avec $M(1/2,0)$) et de la demi-droite $[CB$ (partie singulière).

Exemple 2

Nous allons reprendre l'exemple 2 de la page 6. Nous l'avions traité d'une façon peu habituelle et nous allons lui appliquer la méthode des génératrices.

Solution



La figure ci-contre résume la situation. Rappelons que les points A , B et C sont fixes, que la droite d se déplace parallèlement à BC , et qu'il faut trouver le lieu du point I , intersection des droites (non des segments) CP et BQ .

Le système formé par les équations implicites des génératrices est (vérifier) :

$$\begin{cases} \lambda \cdot x + y - \lambda = 0 & (1) \\ x + \lambda \cdot y - \lambda = 0 & (2) \end{cases}$$

D'après (1) , nous avons : $\lambda = \dfrac{y}{1-x}$
(à condition que $x \neq 1$).

Reportant cette expression dans (2) , nous obtenons (vérifier) : $x - x^2 + y^2 - y = 0$.
Cette expression se laisse factoriser par groupements :

$$y^2 - x^2 + x - y = 0 \;\Rightarrow\; (y-x)\cdot(y+x) + x - y = 0 \;\Rightarrow\; (y-x)\cdot(y+x-1) = 0 \;.$$

Le lieu serait donc inclus dans la réunion des droites $y = x$ et $y = 1 - x$.

Nous allons préciser ce résultat.

D'abord, que se passe-t-il si $x = 1$?

L'équation (1) s'écrit $0 \cdot \lambda + y = 0$. Pour les mêmes raisons que dans l'exemple 1, on aboutit à la conclusion que le point (1,0) est un point particulier du lieu.

Partie singulière du lieu

Lorsque $\lambda = 1$, le système d'équations des génératrices devient $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$.

Les deux génératrices sont confondues avec la droite BC . Tout point de celle-ci fait partie du lieu. La droite BC est la *partie singulière* du lieu.

Partie parasite du lieu

Si nous imposons $y = x$ dans l'équation (1) par exemple, nous trouvons (vérifier) :

$$x = y = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \;.$$

Quelle que soit la valeur de λ , x et y ne peuvent être égaux à 1 . Le point (1,1) est parasite.

Conclusion : voir page 8.

Résumé pour les méthodes analytiques

- Choisir un repère (trois points fixes non alignés)

  - affine, si le problème ne comporte que des notions de points, de droites, d'appartenance, de parallélisme de droites ;
  - orthonormé, si le problème comporte des notions de distance, de mesure d'angle, de perpendicularité de droites.

- <u>Pour la méthode de traduction :</u>

  - on traduit dans le repère fixé, la propriété d'appartenance des points au lieu ; on obtient ainsi une équation cartésienne, ou un système d'équations paramétriques du lieu (dans ce dernier cas, l'élimination du paramètre permet de trouver l'équation cartésienne) ;
  - on analyse l'équation trouvée pour déterminer la nature du lieu (droite, cercle, parabole, …) ;
  - on écarte les éventuels points parasites (ceux qui vérifient l'équation du lieu mais sont incompatibles avec l'énoncé) afin d'obtenir le lieu proprement dit.

- <u>Pour la méthode des génératrices :</u>

  - déterminer les coordonnées des points variables en fonction d'un ou de plusieurs pramètres ;
  - déterminer les équations cartésiennes des génératrices en fonction du (ou des) paramètre(s) ;
  - éliminer le (ou les) paramètres entre les équations des génératrices afin d'obtenir une équation cartésienne du lieu ;
  - déterminer la partie singulière du lieu, c'est-à-dire l'ensemble des points qui proviennent de la coïncidence en tout ou en partie, des deux génératrices pour une même valeur du paramètre ;
  - on écarte les éventuels points parasites (ceux qui vérifient l'équation du lieu mais sont incompatibles avec l'énoncé) afin d'obtenir le lieu proprement dit ; pour cela, il faut considérer simultanément les conditions sur le paramètre et une des génératrices.

- Dans tous les cas, il est conseillé de procéder à une estimation du lieu en déterminant quelques points particuliers de celui-ci.

- Si le problème résiste trop longtemps, on peut s'aider d'un logiciel comme GEOGEBRA pour formuler une conjecture.

- Le recours au logiciel peut aussi constituer une vérification, une fois que tout le travail algébrique et géométrique « sur papier » est achevé.

- Ne pas considérer trop vite le problème comme résolu : s'attarder sur les « cas limites », certaines valeurs particulières des paramètres, ou des coordonnées. Vérifier, contrôler, s'assurer que la solution est complète est cohérente.

Problèmes à résoudre par la méthode synthétique

Les premiers problèmes proposés, dont certains sont assez simples, sont à résoudre par la méthode synthétique dans le but de rappeler d'importantes notions de géométrie plane.

1. Un triangle ABC a une base fixe $[BC]$ mesurant 5 (cm).

   a) Déterminer le lieu du sommet A si la médiane issue de A mesure 3 (cm).
   b) Déterminer le lieu du sommet A si la hauteur issue de A mesure 2 (cm).

---

2. Quel est le lieu des centres des circonférences qui passent par deux points donnés ?

---

3. Quel est le lieu des centres des circonférences de rayon R qui passent par un point donné ?

---

4. On donne un angle $A\hat{O}B$. Déterminer le lieu des points intérieurs à cet angle dont la somme des distances aux deux côtés de l'angle a une valeur constante S.

---

5. On donne un disque de centre O et un point A intérieur au disque. Déterminer le lieu des milieux des cordes découpées par la circonférence du disque sur les droites qui pivotent autour de A. Envisager le cas où A se trouve sur la circonférence.

---

6. Trouver le lieu des milieux des segments dont une extrémité est un point fixe, et dont l'autre extrémité glisse sur une droite fixe.

---

7. Même problème que le n°6, mais le point glisse sur une circonférence fixe.

---

8. On joint un point fixe A à un point quelconque B d'une droite fixe d. On prolonge le segment $[AB]$ d'une longueur $|BM|$ égale à $|AB|$. Trouver le lieu de M.

---

9. On donne une droite fixe a. Trouver le lieu des extrémités des segments de longueur constante menés d'un point quelconque de a parallèlement à une droite fixe b.

---

10. Déterminer le lieu des symétriques d'un point A par rapport à une droite mobile qui tourne autour d'un point fixe P.

---

11. Trouver le lieu des milieux des segments limités à deux droites parallèles.

---

12. Trouver le lieu des centres des cercles de rayon r tangents extérieurement (intérieurement) à un cercle donné.

---

13. On donne un triangle ABC dont les sommets B et C sont fixes. Le point A est mobile, mais l'angle $B\hat{A}C$ est constant. Déterminer le lieu géométrique :

    a) de l'orthocentre du triangle ;
    b) du centre de gravité du triangle.

14. Déterminer le lieu des milieux des côtés d'un triangle dont la base est fixe, et l'angle au sommet opposé à la base est constant.

---

15. Déterminer le lieu des points d'où l'on voit un cercle sous un angle donné.

Les transformations du plan entrent en jeu ...

16. Déterminer le lieu des milieux des cordes d'un cercle qui ont une longueur donnée l.

---

17. Déterminer le lieu du troisième sommet X d'un triangle équilatéral ABX, de sommet A fixe, si le sommet B parcourt une droite d donnée.

---

18. Un cercle de centre O et de rayon r tourne autour d'un de ses points A. Déterminer le lieu des points de contact des tangentes menées à ce cercle, parallèlement à une droite d donnée.

---

19. Déterminer le lieu du quatrième sommet D d'un parallélogramme $ABCD$, si A et C sont deux points fixes, et si le sommet B parcourt une droite d donnée.

---

20. Déterminer le lieu du quatrième sommet D d'un cerf-volant $ABCD$, de diagonale principale AC (axe de symétrie) fixée, si le sommet B parcourt un cercle $\mathcal{C}$ donné.

---

21. Déterminer le lieu du sommet X d'un triangle ABX, dont le côté $[AB]$ est fixé, si le centre de gravité du triangle décrit un cercle $\mathcal{C}$ donné.

---

22. Déterminer le lieu du troisième sommet X d'un carré $ABXD$, de sommet A fixe, si le sommet B parcourt une droite d donnée.

---

23. Déterminer le lieu du sommet A d'un triangle ABC, dont la base $[BC]$ est fixe, et tel que la longueur de la médiane issue de B est un réel r donné.

Encore quelques problèmes variés ...

24. Soit un cercle de centre O. Un point A est fixe sur le cercle et un point P est mobile sur le cercle. Déterminer le lieu des points communs à PO et à la perpendiculaire à PO comprenant A.

---

25. Soit $ABCD$ un carré dont la longueur du côté vaut 2. Soit P un point variable sur la droite AB. Déterminer le lieu des points communs au segment $[PC]$ et à la droite perpendiculaire à PC passant par B.

---

26. Soit un disque de centre A, et soit P un point mobile sur la circonférence du disque. Si B est un point intérieur au disque, déterminer le lieu des points communs à la droite PA et à la médiatrice du segment $[PB]$.

Problèmes à résoudre par une méthode analytique

Certains de ces problèmes peuvent néanmoins être résolus par la méthode synthétique.

1. On donne deux points fixes A et B. Déterminer le lieu géométrique des points qui sont deux fois plus loin de B que de A.

---

2. On donne la parabole $P \equiv y = (x+1)^2$. Déterminer le lieu des milieux des cordes découpées par la parabole sur les droites comprenant l'origine des axes.

---

3. Voici l'équation d'une famille de paraboles : $y = x^2 + 2mx + 3$, où m est un paramètre réel. Déterminer le lieu des sommets de ces paraboles lorsque m varie dans $\boldsymbol{R}$.

---

4. Une perche rigide de longueur L est posée sur un mur vertical. Quel est le lieu du milieu de la perche lorsqu'elle glisse dans un plan vertical, sur le sol et sur le mur ?
   Suggestion : imaginer un disposif expérimental simple pour estimer le lieu.

---

5. On donne un carré de côté 2. Déterminer le lieu des points dont la somme des distances aux quatre côtés du carré est égale à 6. Que devient le lieu si la somme des distances vaut 4 ? Et si la somme vaut 3 ? Discuter et rédiger une conclusion générale.

---

6. Soit un parallélogramme $ABCD$. Une droite parallèle à AB et CD coupe AD et BC respectivement en Z appartenant à $]AD[$ et en Y appartenant à $]BC[$. Déterminer le lieu des points d'intersection des droites AY et BZ.

---

7. Déterminer le lieu des points K du plan tels que $\overline{KA}^2 + \overline{KB}^2 = \overline{AB}^2$, lorsque :

   a) $A(2,0)$ et $B(6,0)$;
   b) $A(-3,0)$ et $B(0,2)$;
   c) $A(2,5)$ et $B(4,7)$.

---

8. Deux droites a et b sont perpendiculaires en O. Soient A et B les projections orthogonales d'un point M respectivement sur a et sur b. Déterminer le lieu des points M du plan tels que $|OA| + |OB| = 1$.

---

9. Même question qu'à l'exercice précédent, mais pour $|OA| - |OB| = 2$.

---

10. Dans un système d'axes perpendiculaires, on donne $O(0,0)$, $A(2,0)$ et $B(1,3)$.

    a) Déterminer le lieu géométrique des points $X(x,y)$ du plan si $\overline{OX}^2 + \overline{AX}^2 + \overline{BX}^2 = 14$.
    b) Construire ce lieu.

(Géomètre Expert Immobilier, Jury central, 1991)

11. Dans un système d'axes rectangulaires, on donne $A(2,0)$ et $B(-2,0)$.

a) Calculer les coordonnées de C si le triangle ABC est équilatéral et la deuxième coordonnée de C est positive.
b) Déterminer l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC .
c) Déterminer et construire le lieu géométrique des points $X(x,y)$ du plan si $\overline{AX}^2 + \overline{BX}^2 + \overline{CX}^2 = 43$.

(Géomètre Expert Immobilier, Jury central, 1992)

---

12. Déterminer le lieu géométrique des centres des cercles passant par un point fixe et tangents à une droite fixe.

---

13. Déterminer le lieu géométrique des points d'intersection des diagonales d'un rectangle inscrit dans un triangle donné, un des côtés du rectangle étant inclus dans un des côtés du triangle.

---

14. Soit un triangle fixe ABC , rectangle en A . Soit P un point mobile sur l'hypoténuse $[BC]$. Par P , on trace la perpendiculaire à BC qui coupe AB en Q et AC en R . On choisit un point I sur PR de telle façon que $\overrightarrow{PI}^2 = \overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{PR}$. Déterminer le lieu du point I .

---

15. Dans un repère orthonormé du plan, construire le lieu des points dont les coordonnées sont solutions de l'équation $5 \cdot |x| + 3 \cdot |y| = 15$.

---

16. D'un point mobile M sur un cercle donné de centre C , on trace MP perpendiculaire à un diamètre fixé. Sur CM , on choisit un point Q tel que $|CQ| = |PM|$. Déterminer et analyser le lieu du point Q .

---

17. En tout point M d'une parabole $\mathcal{P}$, on trace la normale à $\mathcal{P}$. Cette normale coupe l'axe de symétrie de la parabole en un point N . Sur le segment $[MN]$, on considère le point P tel que $|PM| = 2 \cdot |PN|$. Rechercher et analyser le lieu des points P .

---

18. Dans un repère orthonormé du plan, on donne le point $A(1,0)$. Une droite pivote autour de A et coupe l'axe des ordonnées en un point variable B . La perpendiculaire à AB comprenant B coupe l'axe des abscisses au point P . Déterminer le lieu des points Q , symétriques de P par rapport à B .

---

19. On donne les points fixes A et B , ainsi que le point C variable sur une droite fixe d , perpendiculaire à AB , ne comprenant ni A ni B . Rechercher et analyser le lieu des points M , intersections des droites a et b , respectivement orthogonales à AC en A , et à BC en B .

---

20. Un triangle isocèle fixe BAC est rectangle en A . Soit d une droite variable, perpendiculaire à l'hypoténuse du triangle. Cette droite coupe AB en D et AC en E . Déterminer le lieu des points d'intersection de CD et BE .

21. D'un point A d'une parabole, on abaisse la perpendiculaire à son axe s qui le coupe au point Q. Par le point A, on mène la parallèle d à l'axe de la parabole. Le sommet de celle-ci étant le point S, on mène par Q la parallèle e à SA. Rechercher et analyser le lieu des points I, intersections des droites d et e.

---

22. Soit une ellipse de foyers F_1 et F_2. Soit t la tangente en un point quelconque de l'ellipse, et soit s la perpendiculaire à t issue de F_1. Rechercher et analyser le lieu des points J, intersections des droites s et t.

---

23. On donne une droite fixe d et un point fixe F, extérieur à la droite. Un point P est variable sur la droite d. Déterminer le lieu des points d'intersection de la médiatrice du segment $\left[FP\right]$ et de la perpendiculaire à d passant par P.

---

24. On donne un cercle fixe de centre O, et un point fixe F, extérieur au cercle. Un point P est mobile sur le cercle. Déterminer le lieu des points d'intersection de la médiatrice du segment $\left[FP\right]$ et de la droite OP.

---

25. On donne deux cercles fixes C_1 et C_2, de centre O, et de rayons respectifs 3 et 4. Une demi-droite variable d'origine O rencontre C_1 en P et C_2 en Q. Déterminer le lieu géométrique des points I, intersections de la parallèle à l'axe des abscisses passant par P, et de la parallèle à l'axe des ordonnées passant par Q.

Lieux géométriques et coniques : quelques problèmes issus des examens d'admission aux facultés de sciences appliquées.

1. Dans le plan rapporté au système d'axes orthonormés Ox et Oy, on donne le point $P(1,0)$ et un point variable $M(x,y)$. On demande :

   a) de déterminer et de représenter graphiquement le lieu de M, si la différence des distances M à P et M à Oy est constante et égale à 1 ;
   b) de déterminer et de représenter graphiquement le lieu de M, si la somme des distances M à P et M à Oy est constante et égale à 5. (ULB)

---

2. Soient Ox et Oy les axes d'un repère orthonormé du plan d'origine O. On appelle a et b les droites d'équations respectives $x = 1$ et $y = 1$. La droite mobile m qui passe par l'origine O coupe a en A et b en B. On reporte sur m, à partir de B, vers O, un segment de longueur égale à celle de OA. On obtient ainsi le point P.

   a) Déterminer l'équation du lieu géométrique du point P.
   b) Ce lieu est-il une conique ? Si oui, quelle est sa nature ?
   c) Représenter le lieu de P en prenant comme unité le centimètre. (ULB)

---

3. Dans un repère orthonormé Oxy, les points A et B ont pour coordonnées respectives $(-2,0)$ et $(2,0)$. La droite mobile a, issue de A, fait un angle variable α avec l'axe Ox, tandis que la droite mobile b, issue de B, fait un angle variable $\beta = \alpha + 45°$ avec ce même axe. Déterminer le lieu géométrique du point P, intersection de a et de b.
   De quelle courbe s'agit-il ? (ULB)

---

4. Soit $\boldsymbol{C}$ un cercle de centre O et E un point du cercle. Quel est le lieu des points X tels que $\overrightarrow{AX} = \left\|\overrightarrow{AE}\right\|^2 .\overrightarrow{OE}$, lorsque A parcourt $\boldsymbol{C}$? (ULg)

---

5. Soit la circonférence $\boldsymbol{C}_1$ de centre $A(2,2)$ et de rayon variable R_1. Soit la circonférence $\boldsymbol{C}_2$ de centre $B(-6,2)$ et de rayon variable R_2. On impose la condition $R_1 + R_2 = 10$.

   a) Déterminer le lieu des points d'intersection de ces deux circonférences .
   b) Etablir l'équation de la tangente en un point M de ce lieu, d'abscisse $x = 1$ et d'ordonnée positive.
   c) Montrer par le calcul que cette tangente forme un angle égal avec les segments $[MA]$ et $[BM]$; quelle est la valeur numérique de cet angle ? (FPMs)

---

6. On donne une conique d'équation $(x-2)(y-3) = 12$. On demande :

   a) d'en préciser la nature ;
   b) d'en donner la coordonnée du centre ;
   c) de donner l'équation de son ou de ses axe(s) de symétrie ;
   d) on coupe cette conique par la droite d d'équation $3y = 2x + 11$; on demande :
      i) de calculer les coordonnées des points d'intersection (A et B) de d avec la conique.
      ii) d'écrire l'équation du lieu des points d'où l'on voit le segment $[AB]$ sous un angle droit. (FPMs)

7. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé Oxy , on trace les deux droites d'équations $y = ax$ et $y = -ax$.

   a) Déterminer le lieu des points M du plan tels que leurs projections orthogonales P et Q sur ces deux droites ont des abscisses à produit constant : $x_P.x_Q = K$.
   b) Déterminer la nature du lieu d'après les valeurs de a et de K .
   c) Dessiner le lieu pour $a = 1$ et $K = 1$ (cm²). (UCL)

---

8. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé Oxy , on considère un segment de droite $[AB]$ de longueur $2a$, aligné sur Oy et centré à l''origine. Sur l'axe Ox se déplacent deux points mobiles C et D , tels que $x_C = k.x_D$ (k constant).

   a) Déterminer analytiquement l'équation cartésienne du lieu des points M d'intersection des droites AD et BC .
   b) Dessiner les différents éléments et le lieu, avec $a = 6$ (cm) et $k = 0{,}5$. (UCL)

---

9. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé Oxy , on considère une circonférence de rayon R qui coupe au moins un des axes de coordonnées. Soient A et B les intersections d'un des axes de coordonnées avec cette circonférence.

   a) Déterminer le lieu des centres des circonférences telles que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = R^2$.
   b) Analyser ce lieu.
   c) Dessiner les différents éléments et le lieu, avec $R = 4$ (cm). (UCL)

---

10. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé Oxy , on donne le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 4$. On appelle respectivement A et B les points d'intersection du cercle avec les parties positives des axes Ox et Oy . Soit H l'orthocentre (point d'intersection des hauteurs) du triangle ABP où P est un point qui parcourt le cercle donné.

   a) Etablir une équation cartésienne du lieu parcouru par le point H .
   b) Quelle est la nature de ce lieu ? (ULB)

---

11. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé Oxy , on donne ¼ d'ellipse E et une droite d passant par O et coupant E en P (demi-axes OA et OB , $OA = a$, $OB = b$).

$$E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (x\,, y > 0) \quad \text{et} \quad d \equiv y = x.\tan\theta$$

   a) Représenter par un croquis rapide E et d .
   b) Rechercher les coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$ du point P en fonction de θ , a et b .
   c) Calculer l'aire du secteur d'ellipse OPA en fonction de θ , a et b .
   d) Déterminer l'angle θ pour que le quart d'ellipse soit partagé en deux parties égales et représenter cette droite sur le croquis. (ULB)