UN PROBLÈME D'ALGÈBRE - ULB 2019

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ - SOMME ET PRODUIT DES SOLUTIONS

Déterminer toutes les valeurs de p , q appartenant à $\mathbf{R}$ pour que le polynôme $x^2 + px + q$ admette deux racines distinctes telles que chacune de ces racines augmentée de 1 soit solution de l'équation $x^2 - p^2x + pq = 0$.

Rappel

La résolution de ce problème fait appel à deux formules que l'on voit habituellement en 4e année lors de l'étude des équations du second degré.

Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet les solutions x_1 et x_2 , alors la somme $S = x_1 + x_2$ et le produit $P = x_1 \,.\, x_2$ de ces solutions sont donnés par les formules

$$S = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = \frac{c}{a} \ .$$

<u>Exemples</u>

- L'équation $5x^2 + 2x - 30 = 0$ admet deux solutions réelles dont la somme vaut $-\frac{2}{5}$ et le produit -6 .
- L'équation $2x^2 - 8x + 10 = 0$ n'admet pas de solution réelle car $\Delta = -16$ mais la somme et le produit de ses deux solutions complexes valent respectivement 4 et 5 .

Solution

Supposons que le polynôme $x^2 + px + q$ admette deux racines distinctes x_1 et x_2 .
En d'autres termes, que l'équation $x^2 + px + q = 0$ admette les solutions distinctes x_1 et x_2 .

D'abord, cela signifie que son discriminant est strictement positif :

$$\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 - 4q > 0 \quad \Leftrightarrow \quad q < \frac{p^2}{4} \ . \qquad (*)$$

Retenons cette condition pour la fin !

Ensuite, considérant la somme et le produit des solutions, les formules ci-dessus nous donnent :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p & (1) \\ x_1 \,.\, x_2 = q & (2) \end{cases} .$$

La condition suivante est que l'équation $x^2 - p^2x + pq = 0$ admette les solutions $x_1 + 1$ et $x_2 + 1$.

Écrivons de nouveau la somme et le produit des solutions :

$$\begin{cases} x_1 + 1 + x_2 + 1 = p^2 \\ (x_1 + 1).(x_2 + 1) = pq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2 = p^2 & (3) \\ x_1 . x_2 + x_1 + x_2 + 1 = pq & (4) \end{cases} .$$

Comparant les équations (1) et (3) , et les équations (2) et (4) , nous obtenons un nouveau système d'équations d'inconnues p et q :

$$\begin{cases} -p+2=p^2 \\ q-p+1=pq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2+p-2=0 \\ q-p+1=pq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2+p-2=0 & (5) \\ q(1-p)=p-1 & (6) \end{cases} .$$

L'équation (5) a pour discriminant $\Delta = 9$ et a comme solutions $p = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$.

On a donc $p = 1$ ou $p = -2$.

- Si $p = 1$, l'équation (6) s'écrit $0 \,.\, q = 0$.
  Cette équation est indéterminée et elle admet a priori tout réel q comme solution.
  Mais il faut tenir compte de la condition (*) : il faut donc $q < \dfrac{p^2}{4}$, c'est-à-dire $\boxed{q < \dfrac{1}{4}}$.

- Si $p = -2$, alors l'équation (6) admet la seule solution $q = -1$.

Conclusions

Si $p = 1$, tout polynôme $x^2 + x + q$ avec $q < ¼$ admet deux racines distinctes et chacune de ces racines augmentée de 1 est solution de l'équation $x^2 - x + q = 0$.

<u>Exemple</u>

Si $p = 1$ et $q = -6$, le polynôme $x^2 + x - 6$ admet les racines 2 et - 3 (vérifiez).
L'équation $x^2 - x - 6 = 0$ devrait donc admettre les solutions 2 + 1 = 3 et - 3 + 1 = - 2 .
C'est bien le cas !

Si $p = -2$ et $q = -1$, le polynôme $x^2 - 2x - 1$ a pour discriminant $\Delta = 8$ et pour racines

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = 1-\sqrt{2} .$$

L'équation $x^2 - 4x + 2 = 0$ devrait donc admettre les solutions $2+\sqrt{2}$ et $2-\sqrt{2}$.
C'est bien le cas. Vérifiez !