RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES (UMONS)

Déterminer les solutions de l'équation suivante dans $\mathbf{C}$:

$$z + 3.\bar{z} = \left(2 + i\sqrt{3}\right).|z| \ .$$

Solution

Précisons d'abord que $\bar{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z , tandis que $|z|$ est le module de z .

D'abord, cette équation possède la solution évidente $z = 0$.

Ensuite, posons $z = a + bi$. Nous avons $\bar{z} = a - bi$ et $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$z + 3.\bar{z} = \left(2 + i\sqrt{3}\right).|z|$$

$$\Leftrightarrow \quad a + bi + 3.(a - bi) = \left(2 + i\sqrt{3}\right).\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a - 2bi = \left(2 + i\sqrt{3}\right).\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4a = 2.\sqrt{a^2 + b^2} \\ -2b = \sqrt{3}.\sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4a^2 = a^2 + b^2 \\ 4b^2 = 3a^2 + 3b^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 3a^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad b = \pm\sqrt{3}\,a \ .$$

Finalement, l'équation admet donc comme solution tout nombre complexe de la forme

$$\boxed{z = a \pm \sqrt{3}\,ai \quad (\, a \in \mathbf{R}\,)\ .}$$

Autre méthode

Si l'étudiant est tenté par la forme trigonométrique, ce sera peut-être un peu plus laborieux mais aboutira aussi.

Posons $z = \rho.cis\theta = \rho.\left(\cos\theta + i.\sin\theta\right)$ avec $\rho \neq 0$.
Notons bien que $\bar{z} = \rho.cis(-\theta) = \rho.\left(\cos(-\theta) + i.\sin(-\theta)\right) = \rho.\left(\cos\theta - i.\sin\theta\right)$ et que $|z| = \rho$.

$$z + 3.\bar{z} = \left(2 + i\sqrt{3}\right).|z|$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho.cis\theta + 3\rho.cis(-\theta) = \left(2 + i\sqrt{3}\right).\rho$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\cos\theta + i.\sin\theta\right) + 3.\left(\cos\theta - i.\sin\theta\right) = 2 + i\sqrt{3} \quad \text{(après division par } \rho \neq 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4.\cos\theta - 2.\sin\theta.i = 2 + i\sqrt{3}$$

Comparant les parties réelles et imaginaires, nous obtenons :

$$\begin{cases} 4\cos\theta = 2 \\ -2\sin\theta = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} .$$

Nous en déduisons $\theta = -\dfrac{\pi}{3} + k\,.\,2\pi$.

Finalement, l'équation admet donc comme solution tout nombre complexe de la forme

$$\boxed{z = \rho.cis\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \rho.\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \quad (\rho \in \mathbf{R}) .}$$