Commentaires sur l'étude de la fonction $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x + a}$.

Domaine de définition

Si on demande d'étudier cette fonction et que l'on ne nous donne aucune information sur a , la condition est $x^2 - 2x + a \geq 0$. Nous avons $\Delta = 4 - 4a = 4(1-a)$.

1° Si $a < 1$, alors $\Delta > 0$ et le trinôme a deux racines distinctes $x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{1-a}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$.

x		$1-\sqrt{1-a}$		$1+\sqrt{1-a}$	
x^2-2x+a	+	0	-	0	+

Donc dom $f = \left]-\infty\,, 1-\sqrt{a}\,\right] \cup \left[\,1+\sqrt{a}\,, +\infty\right[$.

2° Si $a = 1$, alors $\Delta = 0$ et le trinôme a une racine double $x = 1$.
Le trinôme est toujours positif et donc dom $f = \mathbf{R}$.

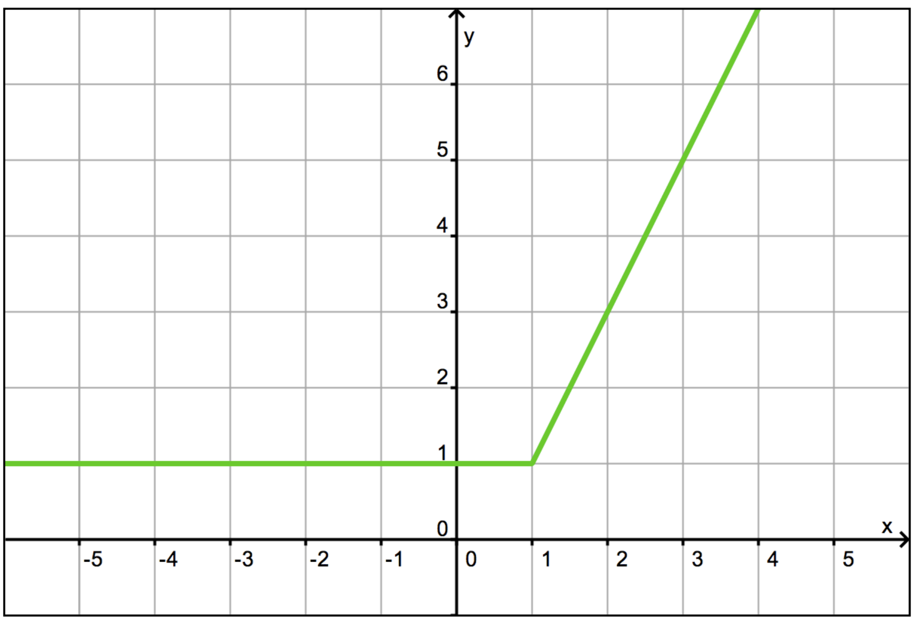
3° Si $a > 1$, alors $\Delta < 0$ et le trinôme n'a aucune racine.
Le trinôme est toujours positif et donc dom $f = \mathbf{R}$.

Comme l'énoncé du problème précise que $a \geq 1$, nous avons dom $f = \mathbf{R}$.

Réglons tout de suite le cas particulier où $a = 1$.

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x + 1} = x + \sqrt{(x-1)^2} = x + |x-1|$$

$$f(x) = \begin{cases} x - (x-1) & si \quad x \leq 1 \\ x + (x-1) & si \quad x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq 1 \\ 2x-1 & si \quad x \geq 1 \end{cases} .$$



Voyons maintenant le cas où $a > 1$.

Asymptotes

$$AH \equiv y = 1 \text{ (pour } x \to -\infty \text{)} \qquad \text{et} \qquad AO \equiv y = 2x - 1 \text{ (pour } x \to +\infty \text{)}$$

Variations

$$f'(x) = 1 + \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+a}} = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+a}} = \frac{\sqrt{x^2-2x+a}+x-1}{\sqrt{x^2-2x+a}} .$$

Racine du numérateur

$$\sqrt{x^2-2x+a}+x-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+a}=1-x$$

Si $1 - x < 0$ cette équation est impossible car le radical doit être positif.

Si $1 - x \geq 0$, nous élevons au carré et obtenons : $x^2-2x+a=1-2x+x^2 \to a=1$.
Ce résultat contredit la condition $a > 1$.

La dérivée première n'a donc aucune racine. Quel est son signe ?

Si $x - 1 \geq 0$, il est clair que $f'(x) > 0$.

Si $x - 1 < 0$, remplaçons simplement x par 0 : $f'(0) = \dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} > 0$ (en effet, $a > 1$ donc $\sqrt{a} > 1$).

Comme la fonction dérivée est continue sur **R** et qu'elle n'a pas de racine, elle est positive.

Conclusion : la fonction f est strictement croissante dans **R** .

Graphique de f pour $a = 4$