À propos de dérivabilité et de continuité

Rappels

- Une fonction f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Une fonction f est dérivable en a si et seulement si son nombre dérivé en a existe.
  C'est-à-dire si $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe.
- Propriété : une fonction dérivable en a est continue en a .

Questions posées à l'UCL

5. Étudiez la dérivabilité à l'origine de la fonction $f(x) = x \cdot |x|$.

9. Soit une fonction $f : R \to R$. Définissons la fonction $g : R \to R$ par $g(x) = x \cdot f(x)$. Démontrez que si f est continue au point 0 , alors g est dérivable en ce point et donnez $g'(0)$.

14. Soit f une fonction continue telle que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Démontrez que $f(0) = 0$.

15. Vrai ou faux ? Justifiez.
    a) Une fonction peut être continue mais non dérivable en un point.
    b) Si deux fonctions ont la même dérivée, elles sont égales.
    c) Si une fonction paire est dérivable, sa dérivée est aussi paire.

Solutions au verso

Solutions

5. Il s'agit de savoir si $f'(0)$ existe.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x.|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x.|x|}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}}|x|=0 .$$

La fonction est bien dérivable en 0 est sa dérivée y est nulle (tangente horizontale).

Remarque : les examinateurs devraient aussi accepter la réponse suivante.

Sachant que $|x|=\begin{cases}-x & si \quad x\le 0\\ x & si \quad x\ge 0\end{cases}$ la fonction peut aussi s'écrire $f(x)=\begin{cases}-x^2 & si \quad x\le 0\\ x^2 & si \quad x\ge 0\end{cases}$.

Et donc $f'(x)=\begin{cases}-2x & si \quad x\le 0\\ 2x & si \quad x\ge 0\end{cases}$ ce qui confirme $f'(0)=0$.

---

9. $$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x.f(x)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x.f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}}f(x)=f(0)$$

En effet, comme f est continue en 0 , $f(0)$ existe et donc $g(0)=0\,.f(0)=0$.

Ensuite $\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}}f(x)=f(0)$ car f est continue en 0 .

Conclusion : g est dérivable en 0 et $g'(0)=f(0)$.

---

14. Si f est continue en 0 : $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$ avec $f(0)\in\mathbf{R}$.

Si $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, alors que $\lim_{x\to 0}x=0$, cela signifie que $\lim_{x\to 0}f(x)=0$ aussi

(sinon, nous aurions $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$). Et donc, par hypothèse, $f(0)=0$.

---

15. a) Vrai. L'exemple classique est celui de $f(x)=|x|$.
Elle est continue en 0 mais elle n'y est pas dérivable car son nombre dérivé à gauche vaut - 1 tandis que son nombre dérivé à droite vaut 1 .

b) Faux. Les fonctions $f(x)=x^2$ et $g(x)=x^2+1$ sont différentes, mais elles ont la même fonction dérivée $f'(x)=g'(x)=2x$.

c) Faux.
La fonction $f(x)=x^2$ est paire, mais sa fonction dérivée $f'(x)=2x$ est impaire.