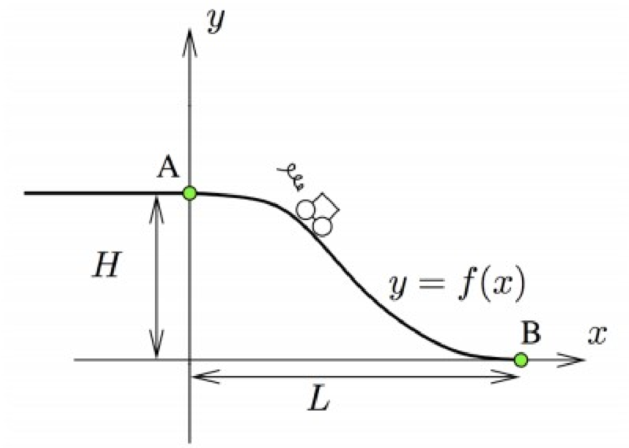
Deux problèmes venant de l'UCL

---

6. On désire concevoir une rampe qui permet à un chariot de descendre « en douceur » une marche de hauteur H sur une distance L (voir figure). Pour cela, on veut que la rampe ait une pente horizontale aux points A et B.



a) Dans l'hypothèse où $f(x)=\sum_{n=0}^{p} a_n x^n$ est un polynôme, quel est le degré minimal p de ce polynôme pour qu'il satisfasse aux différentes contraintes, i.e. qu'il passe par les points A et B et qu'il ait une pente horizontale en A et en B.

b) Calculez les coefficients a_n de ce polynôme de degré minimal en fonction de H et de L.

---

16. Un groupe de randonneurs en montagne se trouve à une altitude donnée, tout au long de leur trajet, par la fonction

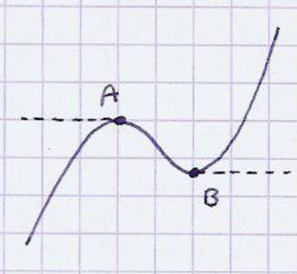
$$f(x)=80x^3-360x^2+480x+280 \text{ (en mètres)},$$

où x représente la distance horizontale parcourue, en kilomètres, avec $x\in[0,3]$.
Calculez le dénivelé positif de leur parcours. Celui-ci est défini comme la somme des gains en altitude sur l'ensemble des parties ascendantes du parcours (commençant en $x = 0$ km et finissant en $x = 3$ km).
Pour simplifier vos calculs, nous vous conseillons de travailler avec la fonction $g(x)=\dfrac{f(x)}{40}=2x^3-9x^2+12x+7$ et de convertir vos résultats à la fin.

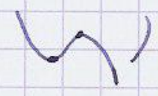
Deux problèmes venant de l'UCL

(1) $f(x) = \sum_{n=0}^{p} a_n x^n$

Connaissant l'allure générale des fonctions polynômes du 3^e degré, nous pensons à $p = 3$



Pour ne pas s'ennuyer avec des coefficients indicés (a_n), écrivons plutôt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(avec $a > 0$ sinon )

1°/ $f(0) = H \rightarrow d = H$

2°/ $f(L) = 0 \rightarrow aL^3 + bL^2 + cL + H = 0 \quad (*)$

3°/ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(0) = 0 \rightarrow c = 0$

$f'(L) = 0 \rightarrow 3aL^2 + 2bL + \cancel{c} = 0$

$\rightarrow L.(3aL + 2b) = 0$

$\rightarrow \cancel{L = 0}$ ou $3aL + 2b = 0$

$b = \frac{-3L}{2} a$

Remplaçons dans $(*)$ en tenant compte de $c = 0$:

$aL^3 - \frac{3L}{2} aL^2 + H = 0$

$aL^3 - \frac{3}{2} L^3 a + H = 0 \rightarrow -\frac{L^3}{2} a + H = 0$

$\rightarrow \boxed{a = \frac{2H}{L^3}} \rightarrow b = -\frac{3L}{2} \cdot \frac{2H}{L^3} = \frac{-3H}{L^2}$

CONCLUSION : le polynôme permettant un raccordement "en douceur" est

$$\boxed{f(x) = \frac{2H}{L^3} x^3 - \frac{3H}{L^2} x^2 + H}$$

Avec les notations de l'énoncé, cela donne :

$a_3 = \frac{2H}{L^3} \qquad a_2 = \frac{-3H}{L^2} \qquad a_1 = 0 \qquad a_0 = H$

Vérifions sur un exemple avec GeoGebra (avec $H=4$ et $L=10$).

$$f(x) = 0{,}008.x^3 - 0{,}12.x^2 + 4$$

---

② $f(x) = 80x^3 - 360x^2 + 480x + 280$ (mètres)

Etudions $g(x) = \frac{f(x)}{40} = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 7$.

$g'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)(x-2)$

x	0		1		2		3
$g'(x)$	+	+	0	−	0	+	+
$g(x)$	$(0,7)$	$\nearrow$	MAX $(1,12)$	$\searrow$	MIN $(2,11)$	$\nearrow$	$(3,16)$

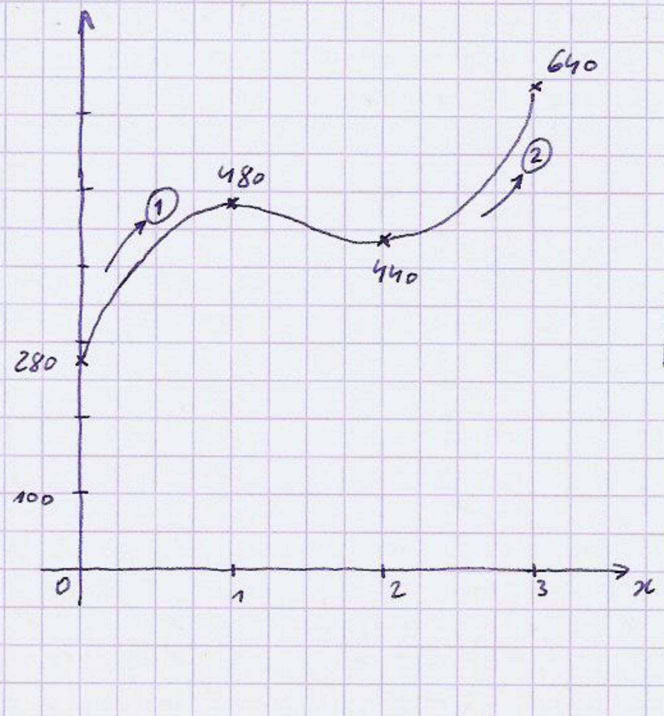
Donc, pour f on a les points

$(0,280)$

$(1,480)$ MAX

$(2,440)$ MIN

$(3,640)$



① on monte de 200(m)

② " " de 200(m)

$\downarrow$

$\boxed{\text{Dénivelé positif} = 400 \text{ (mètres)}}$