DEUX LIMITES DE FONCTIONS AVEC LA RÈGLE DE L'HOSPITAL

Problème 1 : calculer $\lim\limits_{x\to 0}(x.\ln x)$.

Solution

Le domaine de définition de la fonction $f(x) = x\,.\,\ln x$ est R_0^+ .
Lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives, $\ln x$ tend vers $-\infty$.

La limite présente donc un cas d'indétermination : $\lim\limits_{x\to 0}(x.\ln x) = 0^+.(-\infty)$.

Une forme indéterminée $0\,.\,\infty$ doit toujours être ramenée à une des formes $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Première tentative

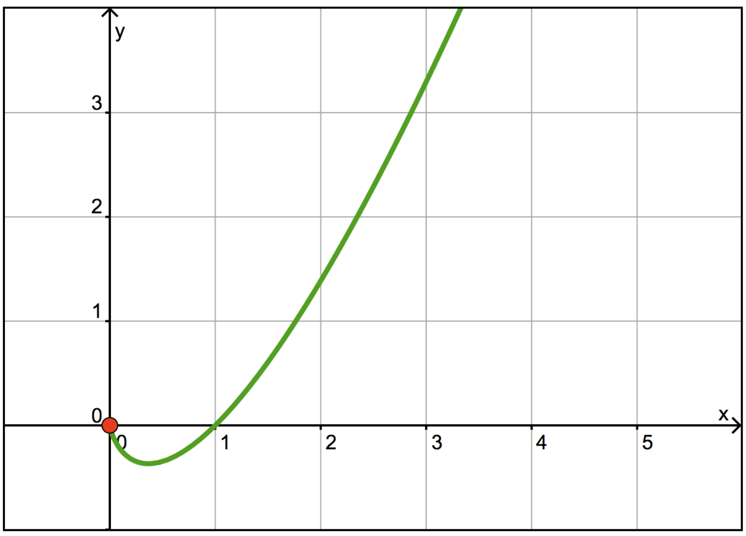
$$\lim_{x\to 0}(x.\ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \frac{0^+}{\frac{1}{-\infty}} = \frac{0^+}{0^-} \overset{RH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{-(\ln x)'}{(\ln x)^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)^2}{\frac{-1}{x}} = -\lim_{x\to 0}\left[x.(\ln x)^2\right] = -0^+.(+\infty) \;.$$

Nous ne sommes pas avancés. Bon d'accord, c'était fait exprès, mais montrer une impasse peut être aussi instructif que donner la solution !

Seconde tentative

$$\lim_{x\to 0}(x.\ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\frac{1}{0^+}} = \frac{-\infty}{+\infty} \overset{RH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0^- \;.$$

La limite vaut 0 . Plus précisément, lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives, la fonction tend vers 0 par valeurs strictement négatives. Il y a un « point rouge » en $(0,0)$.



Problème 2 : calculer $\lim\limits_{x\to 1}(1-x).\tan\left(\dfrac{\pi\, x}{2}\right)$.

Solution

Le premier facteur tend vers 0 , tandis que le second tend vers $\pm\infty$ car $\lim\limits_{x\to\pi/2}\tan x=\pm\infty$.

Nous retrouvons donc la forme indéterminée du problème 1 : $\lim\limits_{x\to 1}(1-x).\tan\left(\dfrac{\pi\, x}{2}\right)=0.\infty$

(pour alléger le calcul, nous ne nous occupons pas des signes).

<u>Première tentative (je vous préviens, elle va échouer ☺)</u>

$$\lim_{x\to 1}(1-x).\tan\left(\frac{\pi\, x}{2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\tan\left(\frac{\pi\, x}{2}\right)}{\frac{1}{1-x}}=\frac{\infty}{\infty}\overset{RH}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi\, x}{2}\right)}.\frac{\pi}{2}}{\frac{-1}{(1-x)^2}}=\frac{\infty}{\infty}=\ldots\ \text{(on tourne en rond).}$$

En effet $\lim\limits_{x\to 1}\cos^2\left(\dfrac{\pi\, x}{2}\right)=\cos^2\dfrac{\pi}{2}=0$ et donc $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi\, x}{2}\right)}=\dfrac{1}{0}=\infty$.

Au dénominateur : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{(1-x)^2}=\dfrac{-1}{0}=\infty$.

<u>Seconde tentative</u>

$$\lim_{x\to 1}(1-x).\tan\left(\frac{\pi\, x}{2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi\, x}{2}\right)}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cot\left(\frac{\pi\, x}{2}\right)}=\frac{0}{0}\overset{RH}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\frac{-1}{\sin^2\left(\frac{\pi\, x}{2}\right)}.\frac{\pi}{2}}=\frac{-1}{\frac{-1}{1}.\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\ .$$

En effet $\lim\limits_{x\to 1}\sin^2\left(\dfrac{\pi\, x}{2}\right)=\sin^2\dfrac{\pi}{2}=1$. Voici $f(x)=(1-x).\tan\left(\dfrac{\pi\, x}{2}\right)$ et le « point rouge » $\left(1,\dfrac{2}{\pi}\right)$.