Un problème d'optimisation (question 2)

La solution de la première question fait l'objet d'un autre document, classé dans la partie « Algèbre ».

UNIVERSITE DE MONS

FACULTE POLYTECHNIQUE

Examen d'admission - Algèbre et Analyse

Groupe C - Mercredi 4 juillet 2018 - Mons

Question 1 (ALG16-5)

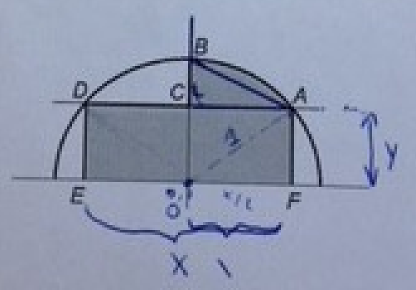
Résoudre le système suivant de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} 4\left(log_x y + \log_y x\right) & = 17 \\ xy & = 3^5 \end{cases}$$

où $x > y > 1$.

Question 2 (ANA17-2)

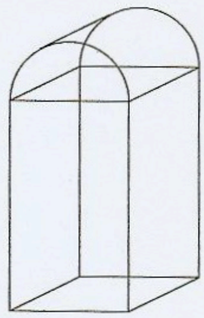
Soit Γ le demi-cercle de rayon 1 centré en l'origine, A un point de Γ et d'abscicce $a > 0$, D son symmétrique par rapport à l'axe Oy, E et F respectivement les projections de D et A sur l'axe Ox; C la projection de A sur l'axe Oy et B l'intersection de l'axe Oy avec l'arc AD de Γ. Déterminer pour quelle valeur de a l'aire $ABCDEFA$ est maximale.



Problèmes d'optimisation

ULB 2015

On veut construire une citerne ayant un volume V donné. Elle doit avoir la forme d'un parallélipipède rectangle de hauteur h et à base carrée de côté c, surmonté d'un demi-cylindre de rayon $c/2$ (voir figure). Pour quelles valeurs de c et h l'aire totale de cette citerne est-elle minimum ?



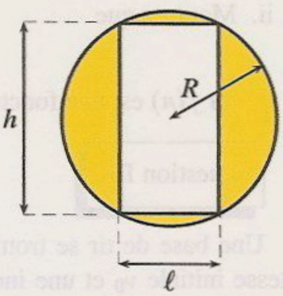
ULg 2013

Question II

La résistance en flexion r d'une poutre de section rectangulaire est proportionnelle au produit de la largeur ℓ de la poutre et du carré de sa hauteur h, *i.e.*

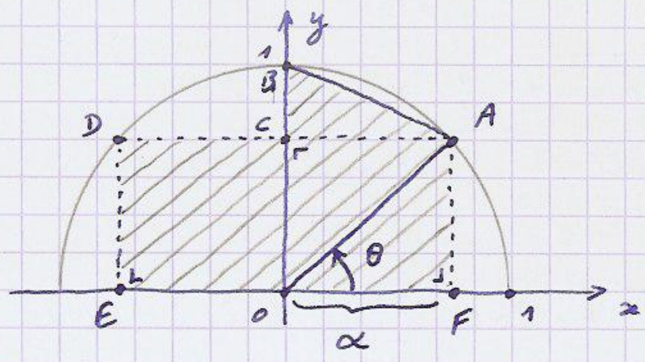
$$r = \gamma \ell h^2$$

où γ est une constante strictement positive.



Déterminez les dimensions (ℓ et h) de la section de la poutre pouvant être découpée dans un tronc d'arbre (parfaitement circulaire) de rayon R et présentant la résistance la plus grande.

ANALYSE (MONS 2018) Problème d'optimisation



A est variable sur le demi-cercle de rayon 1.

Soit $\alpha > 0$ l'abscisse de α.

Déterminez α pour que l'aire du polygone ABCDEF soit maximale.

Le mieux est d'introduire un angle comme variable.
Soit θ l'angle $\widehat{AOF}$.

Donc $|OF| = \cos\theta$ et $|AF| = \sin\theta$ et $|BC| = 1 - \sin\theta$.

Aire du polygone : $\mathcal{A}(\theta) = \text{aire}(ADEF) + \text{aire}(ABC)$

$$= 2\,|OF|.|AF| + \frac{1}{2}.|AC|.|BC|$$

$$= 2.\cos\theta.\sin\theta + \frac{1}{2}.\cos\theta.(1-\sin\theta)$$

$$= \sin 2\theta + \frac{1}{2}.\cos\theta - \frac{1}{4}.\sin 2\theta$$

$$= \frac{3}{4}.\sin 2\theta + \frac{1}{2}.\cos\theta$$

Dérivons :

$$\mathcal{A}'(\theta) = \frac{3}{4}.\cos 2\theta.2 - \frac{1}{2}.\sin\theta = \frac{3}{2}.\cos 2\theta - \frac{1}{2}.\sin\theta$$

$$= \frac{3}{2}.(1 - 2\sin^2\theta) - \frac{1}{2}\sin\theta$$

(CARNOT avec l'idée d'obtenir une expression du 2nd degré en $\sin\theta$)

$$\mathcal{A}'(\theta) = -3.\sin^2\theta - \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{3}{2}$$

Racines de $\mathcal{A}'(\theta)$? $\Delta = \frac{1}{4} - 4.(-3).\frac{3}{2} = \frac{73}{4}$

$$\rightarrow \sin\theta = \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{73}}{2}}{-6} = -\frac{1}{12} \mp \frac{\sqrt{73}}{12}$$

comme $\theta > 0$:

$$\sin\theta = \frac{-1+\sqrt{73}}{12}$$

$$\rightarrow \theta \simeq 0,6798 \text{ (rad)}$$

$$\theta \simeq 38,95°$$

θ		0		0,6798		$\pi/2$	
$\mathcal{A}'(\theta)$		+	+	0	−	−	
$\mathcal{A}(\theta)$			↗	MAX	↘		

L'aire maximale est atteinte pour

$$\boxed{\alpha = \cos(0,6798) \simeq 0,7777}$$

autre façon →

Si l'on n'est pas rebuté par les dérivées de radicaux, on peut aussi faire comme suit :

$$\mathcal{A}(\theta) = \underbrace{2\alpha . \sqrt{1-\alpha^2}}_{\text{rectangle } ADEF} + \underbrace{\frac{1}{2} . \alpha . \left(1 - \sqrt{1-\alpha^2}\right)}_{\text{triangle } ABC}$$

Dérivons :

$$\mathcal{A}'(\alpha) = 2 . \sqrt{1-\alpha^2} + 2\alpha . \frac{1}{2\sqrt{1-\alpha^2}} . (-2\alpha)$$

(dérivée du 1er terme produit !)

$$+ \frac{1}{2} . \left(1 - \sqrt{1-\alpha^2}\right) + \frac{1}{2}\alpha . \frac{-1}{2\sqrt{1-\alpha^2}} . (-2\alpha)$$

(2nd terme, encore la règle du produit).

$$\mathcal{A}'(\alpha) = 2\sqrt{1-\alpha^2} - \frac{2\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{2\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{1-\alpha^2} - \frac{3}{2}\frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3(1-\alpha^2) - 3\alpha^2 + \sqrt{1-\alpha^2}}{2\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{-6\alpha^2 + 3 + \sqrt{1-\alpha^2}}{2\sqrt{1-\alpha^2}}$$

Racine de $\mathcal{A}'(\alpha)$? $\longrightarrow$ racines du numérateur !

(*) $-6\alpha^2 + 3 = -\sqrt{1-\alpha^2}$

RMQ : $0 < \alpha < 1$ donc pas de problème d'existence

Elevons au carré :

$$36\alpha^4 - 36\alpha^2 + 9 = 1 - \alpha^2$$

$$36\alpha^4 - 35\alpha^2 + 8 = 0$$

$$\Delta = 73 \longrightarrow \alpha^2 = \frac{35 \pm \sqrt{73}}{72}$$

$\alpha^2 \simeq 0,6048$

$\alpha^2 \simeq 0,3674$

$\longrightarrow$ $\alpha \simeq 0,7777$ ou $\alpha \simeq 0,6062$

on retrouve la solution obtenue par la première méthode !

À rejeter ! Pq ?
Subtilité des équations irrationnelles. En effet, ds (*)
$\sqrt{\dots} \geqslant 0$ par définition de $\sqrt{\ }$

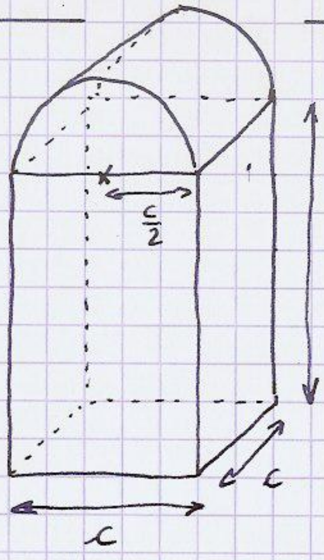
il faut donc : $-6\alpha^2 + 3 \leqslant 0 \iff \alpha^2 \geqslant \frac{1}{2}$

$\iff \cancel{\alpha \leqslant \frac{-\sqrt{2}}{2}}$ ou $\alpha \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,7071$

$\alpha \simeq 0,6062$ ne satisfait pas.

Conclusion
la méthode angulaire est préférable !

PROBLÈME D'OPTIMISATION - ULB 2015



1°/ <u>Grandeur à optimiser</u> :

l'aire totale

$$A(c,h) = c^2 + 4ch + \underbrace{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2}_{\text{les deux demi-disques}} + \underbrace{c \cdot \pi \cdot \frac{c}{2}}_{\text{le rectangle incurvé au-dessus}}$$

les deux demi-disques

le rectangle incurvé au-dessus (dont la longueur est le ½ périmètre du disque)

2°/ <u>Contrainte</u> : volume V fixé

$$V = c^2h + \frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2\cdot c = c^2h + \frac{\pi c^3}{8}$$

3°/ <u>Expression de h en fonction de c</u> :

$$h = \frac{V - \frac{\pi c^3}{8}}{c^2}$$

4°/
$$A(c) = c^2 + 4\cancel{c}\cdot\frac{V - \frac{\pi c^3}{8}}{c^{\cancel{2}}} + \frac{\pi c^2}{4} + \pi\frac{c^2}{2}$$

$$= c^2\cdot\left(1 + \frac{3\pi}{4}\right) + \frac{4V}{c} - \frac{\pi c^2}{2}$$

$$= c^2\cdot\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4V}{c}$$

5°/
$$A'(c) = 2c\cdot\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{4V}{c^2} = \frac{2c^3\left(1+\frac{\pi}{4}\right) - 4V}{c^2}$$

racine : $c = \sqrt[3]{\dfrac{2V}{1+\frac{\pi}{4}}}$

c	0		$\sqrt[3]{2V/\left(1+\frac{\pi}{4}\right)}$	
$A'(c)$	X	−	0	+
$A(c)$	X	↘	min	↗

L'aire est minimale pour

$c \simeq 1{,}0386\cdot\sqrt[3]{V}$

et $h \simeq 0{,}5193\cdot\sqrt[3]{V}$

$\left(h = \frac{1}{2}c\ !\right)$

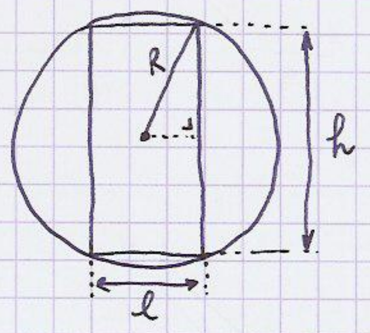
Ce problème rappelle celui de la fenêtre romane (cours de 5e, dérivées, n° 7 p. 43).

PROBLÈME D'OPTIMISATION - LIÈGE 2013.

Résistance en flexion d'une poutre :

$r = \gamma \, l \, h^2$

γ : $c^{te} > 0$



Poutre à découper dans un tronc circulaire de rayon R.

Contrainte : $R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow 4R^2 = h^2 + l^2$

$\rightarrow h^2 = 4R^2 - l^2$

Donc : $r(l) = \gamma . \, l . \, (4R^2 - l^2)$

$r'(l) = \gamma . \left[1.(4R^2 - l^2) + l.(-2l) \right]$ (produit ; $R = c^{te}$)

$r'(l) = \gamma . (4R^2 - 3l^2)$

l		0		$\frac{2R}{\sqrt{3}}$		$2R$	
$r'(l)$		$+$	$+$	0	$-$	$-$	
$r(l)$			$\nearrow$	MAX	$\searrow$		

Résistance maximale obtenue pour $l = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

et $h^2 = 4R^2 - \frac{4R^2}{3} = \frac{8R^2}{3} \longrightarrow h = \frac{2\sqrt{2}\,R}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}\, l$

ERM 2005 (série 1)

Question 1 : étudier la fonction $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{1+x}}$

1°/

x		-1		0	
x^3	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$1+x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
N/D	$+$	$\vert$	$-$	0	$+$

$\text{dom} f = \left]-\infty, -1\right[\cup \mathbb{R}^+$

2°/ Racine : $x = 0$

3°/ AV ? $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \sqrt{\dfrac{-1}{0^-}} = +\infty \rightarrow \boxed{AV \equiv x = -1}$

AH ? $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \text{"}\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}\text{"} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt{x^2} = +\infty$

AO ? $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \pm\sqrt{\dfrac{x^3}{x^2 + x^3}} = \pm 1$

pour $x \to \pm\infty$: $p = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt{\dfrac{x^3}{1+x}} \mp x \right)$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\left(\sqrt{\frac{x^3}{1+x}} \mp x\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{x^3}{1+x}} \pm x\right)}{\sqrt{\frac{x^3}{1+x}} \pm x}$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\frac{x^3}{1+x} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{1+x}} \pm x}$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\frac{x^3 - x^2 - x^3}{1+x}}{\sqrt{\frac{x^3}{1+x}} \pm x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-x^2}{\left(\sqrt{\frac{x^3}{1+x}} \pm x\right) \cdot (1+x)}$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-x^2}{-\sqrt{x^3(1+x)} \pm x \cdot (1+x)} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-x^2}{-x^2 \pm x^2}$

$= \mp \dfrac{1}{2}$

$\boxed{AO_1 \equiv y = x - \frac{1}{2}}$ (pour $x \to +\infty$).

$\boxed{AO_2 \equiv y = -x + \frac{1}{2}}$ (pour $x \to -\infty$).

4°/

$$f'_{(x)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{x^3}} \cdot \frac{3x^2(1+x) - x^3 \cdot 1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{x^3}} \cdot \frac{2x^3 + 3x^2}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{x^3}} \cdot \frac{x^2(2x+3)}{(1+x)^2}$$

x		$-3/2$		-1	0	
$f'_{(x)}$	$-$	0	$+$		$\Vert$	$+$
$f_{(x)}$	$\searrow$	$\min_1$	$\nearrow$	AV $x=-1$	$(0,0)$ $\min_2$	$\nearrow$

$\min_1\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$\simeq \left(-\frac{3}{2}, 2.5981\right)$

$\min_2\ (0,0)$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{-\frac{27}{8}}{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

5°/ Avant de calculer $f''_{(x)}$, simplifions $f'_{(x)}$.

$$f'_{(x)} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{(1+x)^{1/2}}{x^{3/2}} \cdot \frac{x^2 \cdot \cancel{2} \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{x^{1/2} \cdot \left(x+\frac{3}{2}\right)}{(1+x)^{3/2}} = \frac{x^{3/2} + \frac{3}{2}x^{1/2}}{(1+x)^{3/2}}$$

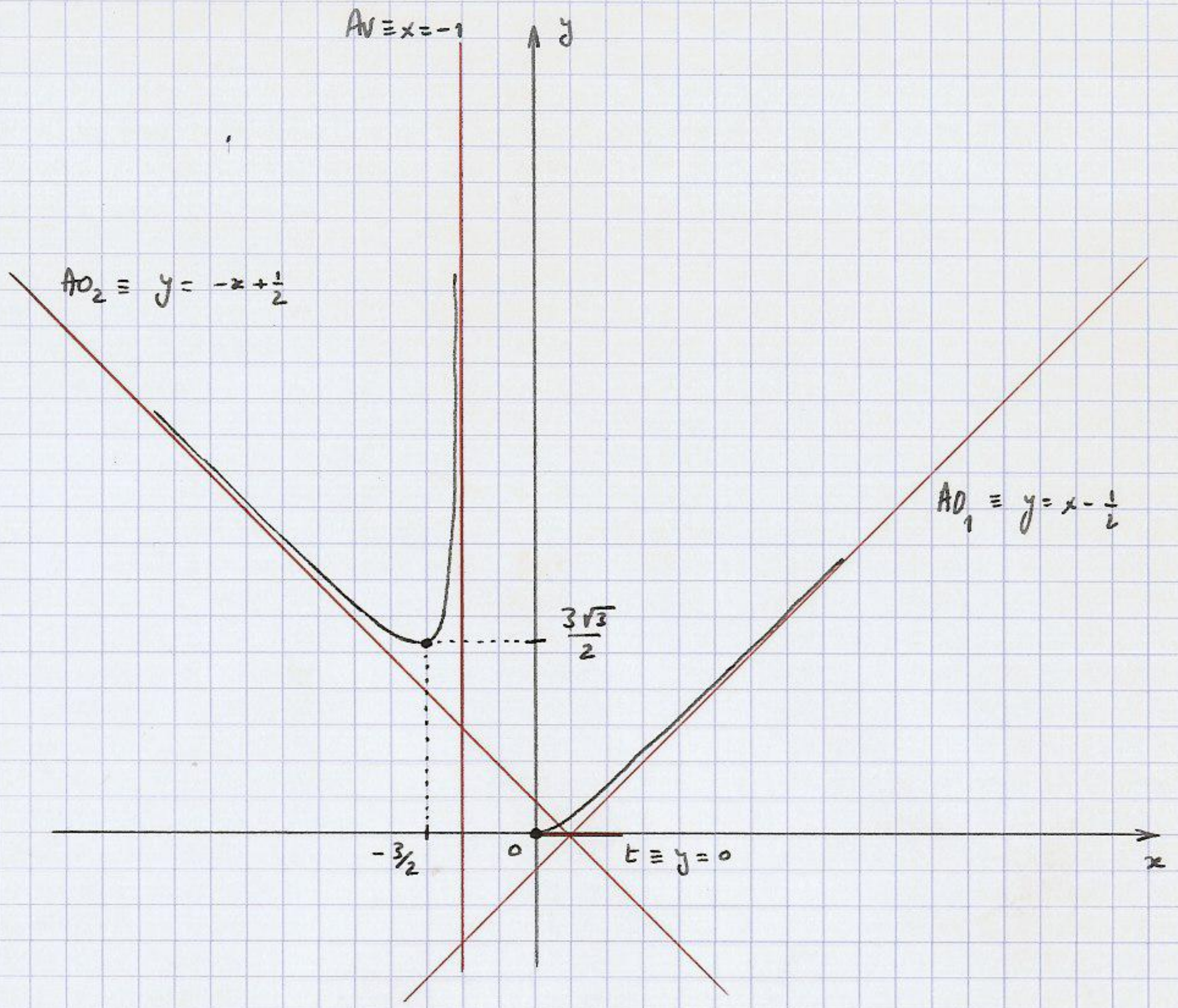
$$f''_{(x)} = \frac{\left(\frac{3}{2}x^{1/2} + \frac{3}{4}x^{-1/2}\right) \cdot (1+x)^{3/2} - \left(x^{3/2} + \frac{3}{2}x^{1/2}\right) \cdot \frac{3}{2}(1+x)^{1/2}}{(1+x)^3}$$

$$= \frac{3}{2}(1+x)^{1/2} \cdot \frac{\left(x^{1/2} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot (1+x) - \left(x^{3/2} + \frac{3}{2}x^{1/2}\right)}{(1+x)^3}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{\cancel{x^{1/2}} + \cancel{x^{3/2}} + \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}\cancel{x^{1/2}} - \cancel{x^{3/2}} - \frac{3}{2}\cancel{x^{1/2}}}{(1+x)^{5/2}}$$

$$= \frac{3}{4 \cdot x^{1/2} \cdot (1+x)^{5/2}} > 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} f \setminus \{0\}$$

Concavité de G_f vers le haut ; pas de point d'inflexion.



<u>Remarque</u> : f n'est pas dérivable en $x = 0$,

mais $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0^+$.