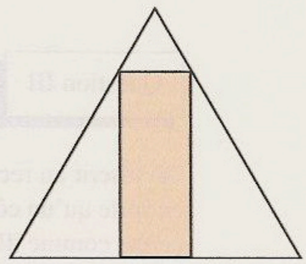
Problèmes d'optimisation-Liège

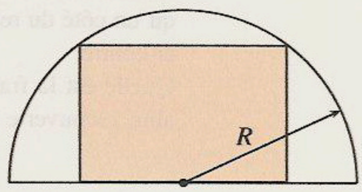
Question III

On inscrit un rectangle dans un triangle équilatéral en faisant en sorte qu'un côté du rectangle s'appuie sur un côté du triangle comme illustré ci-contre.
Quelle est la fraction maximale de la surface du triangle qui peut être ainsi recouverte ?



Question III

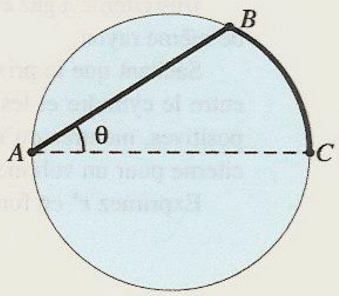
On inscrit un rectangle dans un demi-cercle de rayon R en faisant en sorte qu'un côté du rectangle s'appuie sur le diamètre du demi-cercle comme illustré ci-contre.
Quelle est la fraction maximale de la surface du demi-cercle qui peut être ainsi recouverte ?



Question III

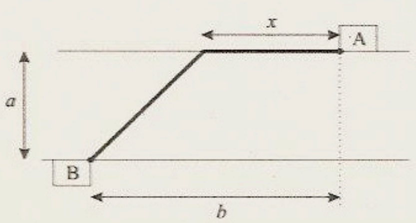
Un canard se trouvant en A au bord d'un lac circulaire de rayon R souhaite atteindre le point C diamétralement opposé du lac. Pour ce faire, il peut nager en ligne droite de A à C, marcher le long de la berge de A à C ou nager en ligne droite depuis son point de départ jusqu'à un point intermédiaire B situé sur la berge puis marcher le long du bord de B à C (voir figure).

Sachant que ce canard marche deux fois plus vite qu'il ne nage, déterminez la trajectoire la plus rapide pour atteindre le point C. Justifiez.



Question III

Une entreprise installée sur les deux rives d'un fleuve supposé rectiligne (voir dessin) souhaite relier par fibre optique ses deux bâtiments A et B. Le tracé prévu est composé de deux segments rectilignes. Une partie du câble traverse le fleuve et l'autre est posée sur la berge. La pose du câble sur la berge coûte α € par mètre. Le coût par mètre est double, soit 2α € par mètre, lorsque le câble est posé dans le fleuve. Les paramètres a et b sont des données du problème et représentent la largeur de la rivière ainsi que la distance entre les deux implantations, projetée le long de la berge.



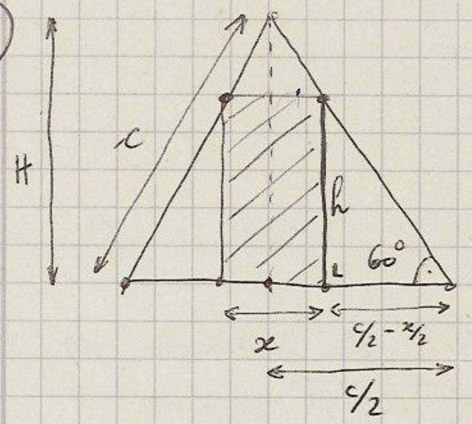
On souhaite minimiser le coût de l'installation.

i. Déterminez la longueur x du câble à poser sur la berge pour minimiser le coût dans le cas où $a = 30$ m et $b = 240$ m.

ii. Montrez que le câble doit relier les deux implantations A et B en ligne droite lorsque $a \geq \sqrt{3}b$.

PROBLÈMES D'OPTIMISATION - LIÈGE

(1)



Soit c le côté du Δ équilatéral.

Choisissons comme variable x la base du rectangle (par exemple).

Aire du rectangle : $x . h$

avec $h = \left(\frac{c}{2} - \frac{x}{2}\right) . \tan 60°$

Donc : $A(x) = x . \frac{c-x}{2} . \sqrt{3}$

$A(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} c x$

$A'(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} . (2x - c)$

x	0		$c/2$		c
$A'(x)$	+	+	0	-	-
$A(x)$	0	↗	MAX	↘	0

L'aire du rectangle est maximale pour $x = \frac{c}{2}$

et donc $h = \left(\frac{c}{2} - \frac{c}{4}\right) . \tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{4} c$.

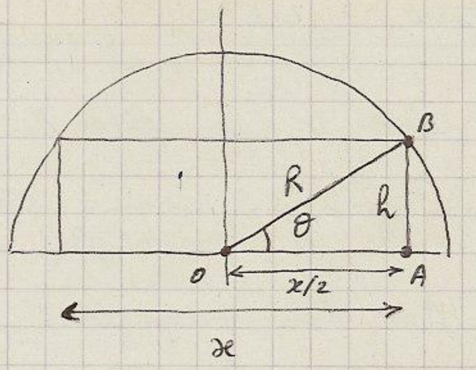
$A_{max} = \frac{c}{2} . \frac{\sqrt{3}}{4} c = \frac{\sqrt{3}}{8} c^2$

L'aire du triangle est $A_{tri} = \frac{1}{2} . c . H = \frac{1}{2} . c . c . \sin 60°$

$A_{tri} = \frac{\sqrt{3}}{4} c^2$

La fraction maximale de la surface du Δ qui peut être ainsi recouverte est $\frac{A_{max}}{A_{tri}} = \frac{1}{2}$.

2



$1^{\text{ère}}$ façon : Soit x la base du rectangle et h sa hauteur : $h = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$

Donc : $A(x) = x \cdot \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}}{2}$

$$A'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \cdot \sqrt{4R^2 - x^2} + x \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{4R^2 - x^2}} \cdot (-\cancel{2}x) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4R^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{2R^2 - x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$$

$2R^2 - x^2 = 0$

$x^2 = 2R^2$

$x = \sqrt{2} R$

ou ~~$x = -\sqrt{2} R$~~

x	0		$\sqrt{2}R$		$2R$
$A'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$A(x)$	0	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	0

Aire maximale atteinte pour $x = \sqrt{2} R$

$2^{\text{ème}}$ façon Soit θ l'angle $\widehat{AOB}$

Aire du rectangle $= 2 \cdot |OA| \cdot |AB| = 2 \cdot R \cdot \cos\theta \cdot R \cdot \sin\theta$

$= R^2 \cdot \sin 2\theta = A(\theta)$

$\rightarrow$ $A'(\theta) = R^2 \cdot \cos 2\theta \cdot 2$ $\qquad \cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

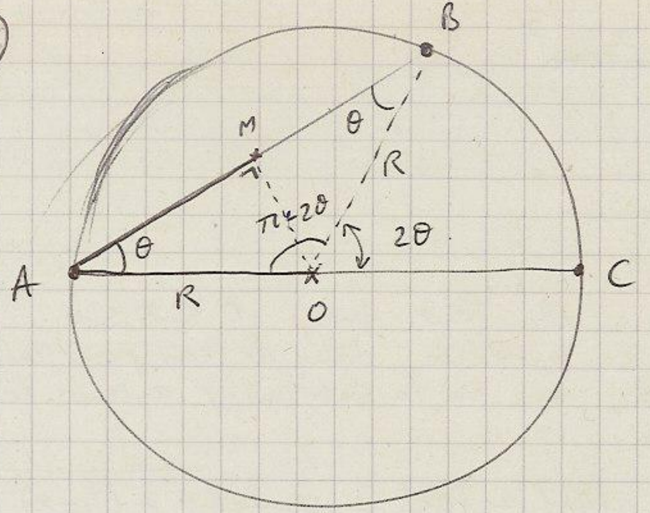
θ	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$A'(\theta)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$A(\theta)$	0	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	0

A_{max} pour $\theta = \frac{\pi}{4}$

$\rightarrow$ $A_{max} = R^2 \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} = R^2$ (logique !)

Fraction maximale $= \frac{A_{max}}{A_{demi\text{-}disque}} = \frac{R^2}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{2}{\pi} \simeq 63{,}7\ \%$

③



<u>Longueur du segment [AB]</u>

On peut utiliser AL-KASHI dans le Δ AOB mais le plus simple est :

$$|AM| = \frac{|AB|}{2} = R \cdot \cos\theta$$

dans le Δ rectangle AOM

$$\longrightarrow \quad |AB| = 2R\cos\theta$$

<u>Longueur de l'arc $\widehat{BC}$</u> : $R \cdot 2\theta$

<u>Longueur totale du trajet</u> : $|AB| + |\widehat{BC}| = \underbrace{2R\cos\theta}_{\text{à la vitesse } v} + \underbrace{2R\theta}_{\text{à la vitesse } 2v}$

<u>Temps total</u> : $t_{(\theta)} = \dfrac{2R\cos\theta}{v} + \dfrac{\cancel{2}R\theta}{\cancel{2}v}$ $(*)$

$$\longrightarrow \quad t'_{(\theta)} = \frac{2R}{v}(-\sin\theta) + \frac{R}{v} \cdot 1$$

$$t'_{(\theta)} = \frac{R}{v}(-2\sin\theta + 1)$$

θ	0		$\pi/6$		$\pi/2$
$t'_{(\theta)}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$t_{(\theta)}$	↗		MAX	↘	min

racines

$\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6} + k2\pi$

ou ~~$\theta = \frac{5\pi}{6} + k\pi$~~

Dans le contexte du problème, les seules valeurs pertinentes de θ sont telles que $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Tenant compte de la symétrie on peut se contenter de faire le tableau dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Le temps minimal est obtenu pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ qui correspond à la direction tangente au cercle en A, ce qui veut dire que le canard ne va pas nager, il va parcourir tout le $\frac{1}{2}$-cercle $\widehat{AC}$.

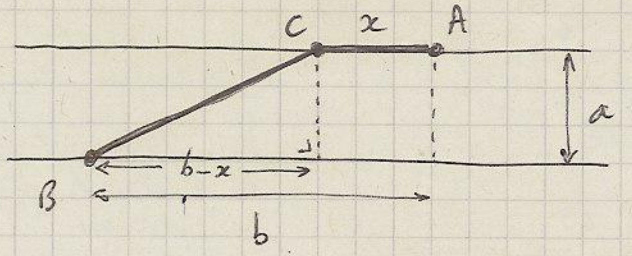
Dans $(*)$: <u>Vérifions</u>

$$t\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cancel{\frac{2R \cdot 0}{v}} + \frac{R}{v} \cdot \frac{\pi}{2} \simeq \boxed{1{,}57 \cdot \frac{R}{v}}$$

$$t(0) = \frac{2R \cdot 1}{v} + 0 = 2 \cdot \frac{R}{v} > t(\pi/2)$$

$$t\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{v} + \frac{\pi}{6} \cdot \frac{R}{v} = \left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{R}{v} \simeq 2{,}26 \cdot \frac{R}{v} > t(\pi/2)$$

④



Dans le contexte, il faut que $0 \leq x \leq b$.
On pourrait résoudre le problème dans le cas particulier où $a = 30$ et $b = 240$, mais vu la question (ii) autant le résoudre en général.

Longueur du câble : $|AC| + |BC| = x + \sqrt{a^2 + (b-x)^2}$

Coût : $C(x) = \alpha . x + 2\alpha . \sqrt{a^2 + (b-x)^2}$

$$C'(x) = \alpha + 2\alpha . \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{a^2+(b-x)^2}} . \cancel{2} . (b-x) . (-1)$$

$$= \alpha . \left(1 - \frac{2(b-x)}{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}\right)$$

$$C'(x) = 0 \iff 2(b-x) = \sqrt{a^2 + (b-x)^2}$$

élevons au carré : $4(b-x)^2 = a^2 + (b-x)^2 \rightarrow 3(b-x)^2 = a^2$

$\rightarrow \quad b - x = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad (b - x \text{ positif}) \rightarrow \quad x = b - \frac{a}{\sqrt{3}}$

x	0		$b - a/\sqrt{3}$		b
$C'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$C(x)$		↘	MIN	↗	

Le coût sera minimal si $x = b - \frac{a}{\sqrt{3}} = 240 - \frac{30}{\sqrt{3}} \simeq \boxed{222{,}68 (m)}$

Ce que nous venons de faire suppose que l'on pose une longueur $x > 0$ le long de la berge et donc

que $b - \frac{a}{\sqrt{3}} > 0 \longrightarrow b > \frac{a}{\sqrt{3}} \longrightarrow a < \sqrt{3}\, b$.

$\boxed{\text{Si} \quad a \geq \sqrt{3}\, b}$ (le fleuve est "trop large" par rapport à la distance b)
on trouve $x = b - \frac{a}{\sqrt{3}} \leq 0$ et il n'y a plus aucun sens

à poser du câble le long de la berge
$\longrightarrow$ on traverse le fleuve en ligne droite de A à B.