2016 **Epreuve complémentaire POL** Série 2

10 questions

Remarque: laisser dans les réponses des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, $\ldots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... sous leur forme symbolique.

Question 1 (4 points) On donne la fonction $f(x) = x \cdot e^{-x} + x$ et son graphique.

(1) Montrer que la droite d d'équation $y = x$ est une asymptote pour $x \to +\infty$.

(2) Etudier la position du graphique par rapport à la droite d.

Question 2 (4 points) Calculer

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + 5x + 5) \cdot \cos(2x)\, dx.$$

Question 3 (4 points)

(1) Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \tan^{n+1} x$.

(2) Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx, n \in \mathbb{N}_0$..

(3) En déduire que

$$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}.$$

Question 4 (4 points) $z^3 + 2(1-i)z^2 + (1 + m^2 - 4i)z - 2i(1 + m^2) = 0$, $m \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$.

(1) Montrer que l'équation admet une racine imaginaire pure z_1 et calculer cette racine z_1.

(2) Calculer en fonction du paramètre réel m les deux autres racines.

Question 5 (4 points) Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0.$$

Question 6 (4 points) On donne l'équation $X^2 - 4X - 12I_2 = 0$ avec $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) Démontrer que $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ est une racine de cette équation.

(2) Calculer une deuxième racine.

Question 7 (4 points) D'une suite géométrique avec un facteur (raison, ratio) positif r on sait que le cinquième terme est égal à neuf fois le troisième terme et que le sixième terme est égal à 486. Calculer le facteur r et calculer le premier terme.

Question 8 (4 points) Dans une urne se trouvent dix boules blanches et cinq boules rouges. On tire simultanément trois boules de l'urne.
Calculer la probabilité qu'on tire au moins une boule rouge.

Question 9 (4 points) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$2\sin^3 x + \cos^2 x - 5\sin x - 3 = 0.$$

Question 10 (4 points) On donne les points $A(1, -2, -3)$, $B(0, 1, -2)$ et $C(-2, -5, 1)$.

(1) Donner l'équation cartésienne du plan α défini par les points A, B et C.

(2) Un point P se trouve sur la droite OA et la distance entre le point P et le plan α est égal à 5. Calculer les coordonnées du point P.

ERM 2016 - Épreuve complémentaire POL.

Question 1 , $f(x) = x.e^{-x} + x$

1) Asymptote oblique pour $x \to +\infty$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} (e^{-x} + 1) = 1$$

$$\left(\text{car } \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0\right).$$

$$p = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} [(xe^{-x} + x) - x]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}$$

$$\overset{R.H.}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = \text{"}\frac{1}{+\infty}\text{"} = 0.$$

Donc, $\boxed{AO \equiv y = x}$

Remarques 1°/ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \text{"}\underbrace{-\infty . e^{+\infty}}_{-\infty} - \infty\text{"} = -\infty$

pas d'asymptote horizontale.

2°/ $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} (e^{-x} + 1) = \text{"}e^{+\infty} + 1\text{"}$
$= +\infty$

pas d'asymptote oblique non plus quand $x \to -\infty$.

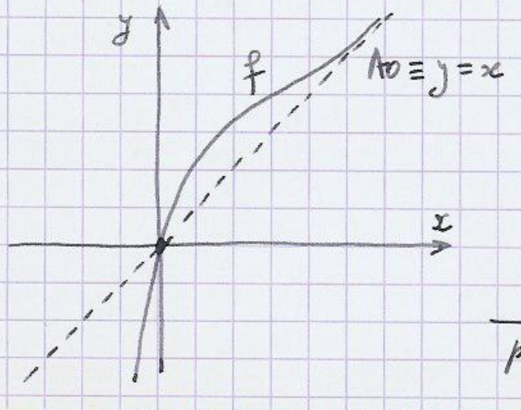
2) Il faut déterminer si G_f est au-dessus de l'A.O. ($f(x) > x$) ou au-dessous ($f(x) < x$) quand $x \to +\infty$.

Étudions donc le signe de $f(x) - x = x.e^{-x}$

Si $x \to +\infty$, chacun des deux facteurs de cette expression est positif (e^{-x} l'est de toute façon) et donc $f(x) - x > 0$.

Donc G_f est au-dessus de $AO \equiv y = x$ quand $x \to +\infty$.

Allure générale de G_f

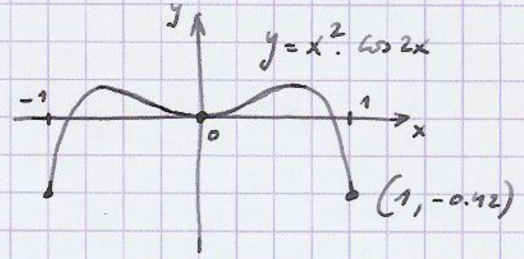


Question 2 Calculer $\int_{-1}^{1} (x^2+5x+5) . \cos 2x \, dx$

1°/ $I_1 = \int_{-1}^{1} x^2 . \cos 2x \, dx$

La fonction $f(x) = x^2 . \cos 2x$ est paire. Elle prend donc les mêmes valeurs dans l'intervalle $[-1, 0]$ que dans $[0,1]$.

Donc $\int_{-1}^{0} f(x)\, dx = \int_{0}^{1} f(x)\, dx$



et $I_1 = 2 \int_{0}^{1} x^2 \cos 2x \, dx$.

Intégrons par parties : $u = x^2 \rightarrow u' = 2x$

$v' = \cos 2x \rightarrow v = \frac{\sin 2x}{2}$

$$I_1 = \cancel{2} . \left[\frac{x^2 . \sin 2x}{\cancel{2}} \right]_0^1 - 2 . \underbrace{\int_0^1 \cancel{2}x . \frac{\sin 2x}{\cancel{2}} \, dx}_{J}$$

$$= \sin 2 - 2 . J$$

Calculons J par parties aussi : $u = x \rightarrow u' = 1$

$v' = \sin 2x \rightarrow v = -\frac{\cos 2x}{2}$

$$J = \left[\frac{-x . \cos 2x}{2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos 2x}{2} \, dx$$

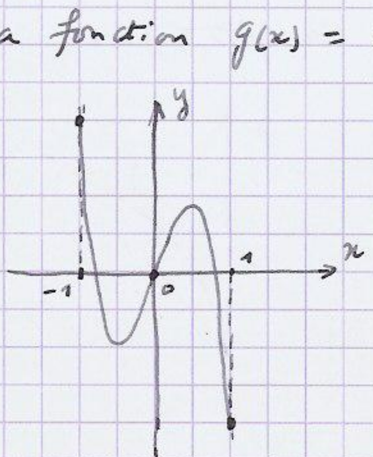
$$= -\frac{\cos 2}{2} + \left[\frac{\sin 2x}{4} \right]_0^1 = -\frac{\cos 2}{2} + \frac{\sin 2}{4}$$

$$\rightarrow I_1 = \sin 2 - 2 . \left(-\frac{\cos 2}{2} + \frac{\sin 2}{4} \right) = \boxed{\frac{\sin 2}{2} + \cos 2}$$

$\simeq 0,0385$

2°/ $I_2 = \int_{-1}^{1} 5x . \cos 2x \, dx$

La fonction $g(x) = 5x . \cos 2x$ est impaire.



Donc $\int_{-1}^{0} g(x)\, dx = -\int_{0}^{1} g(x)\, dx$

et donc $\underbrace{\int_{-1}^{0} g(x)\, dx + \int_{0}^{1} g(x)\, dx}_{\int_{-1}^{1} g(x)\, dx} = 0$

$\int_{-1}^{1} g(x)\, dx = \boxed{I_2 = 0}$

3°/ $I_3 = \int_{-1}^{1} 5.\cos 2x\, dx = 5.\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_{-1}^{1} = \dots$

Mieux : la fonction $h(x) = 5.\cos 2x$ étant paire :

$$I_3 = 2\int_0^1 5.\cos 2x\, dx = 10.\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^1 = \boxed{5.\sin 2}$$

$\simeq 4,54649$

Finalement :

$$\int_{-1}^{1} (x^2+5x+5).\cos 2x\, dx = I_1 + I_2 + I_3$$

$$= \frac{\sin 2}{2} + \cos 2 + 0 + 5.\sin 2$$

$$= \boxed{\frac{11}{2}\sin 2 + \cos 2} \simeq 4,58499$$

<u>Question 3</u>

1) Dériver $f(x) = \tan^{n+1} x$.

$$f'(x) = (n+1).\tan^n x.(\tan x)'$$

Rappelons que

$$\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x}$$

Dans le contexte du problème, la forme $1+\tan^2 x$ est plus adaptée.

$$f'(x) = (n+1).\tan^n x.(1+\tan^2 x) \qquad (*)$$

2) D'après $(*)$: $f'(x) = (n+1).\tan^n x + (n+1).\tan^{n+2} x$

$\rightarrow$ $\tan^n x = \frac{f'(x)}{n+1} - \tan^{n+2} x$

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx = \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\, dx - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x\, dx}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[f(x)\right]_0^{\pi/4} - I_{n+2}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\tan^{n+1} x\right]_0^{\pi/4} - I_{n+2}$$

$\begin{cases} \tan\frac{\pi}{4} = 1 \\ \tan 0 = 0 \end{cases}$ $\qquad = \boxed{\frac{1}{n+1} - I_{n+2}}$

3) Evidemment, il suit : $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

Remarques

La question 2) peut être déroutante pour un étudiant car il s'attend à devoir trouver une formule donnant I_n en fonction de n. Ce n'est pas à la portée d'un élève de 6^e.

Voyons quelques exemples ...

$$I_0 = \int_0^{\pi/4} \tan^0 x \, dx = \int_0^{\pi/4} 1 \, dx = [x]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \left[-\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4}$$

$$= -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \underbrace{\ln 1}_{0} = \ln\sqrt{2}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/4} \tan^2 x \, dx = \int_0^{\pi/4} \left[(1+\tan^2 x) - 1\right] dx$$

$$= \left[\tan x - x\right]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \, dx \qquad u = \tan x \rightarrow u' = 1 + \tan^2 x$$

$$v' = \tan^2 x \rightarrow v = \tan x - x$$

(voir I_2)

$$\rightarrow I_3 = \left[\tan x . (\tan x - x)\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (1+\tan^2 x)(\tan x - x) \, dx$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4} - \underbrace{\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx}_{\ln\sqrt{2}} + \underbrace{\int_0^{\pi/4} x \, dx}_{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{32}} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \, dx}_{I_3}$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{4}} x . \tan^2 x \, dx$$

$$\rightarrow 2 I_3 = 1 - \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} + \frac{\pi^2}{32} + \underbrace{\int_0^{\pi/4} x . \tan^2 x \, dx}_{J}$$

Calcul de J $\qquad u = x \rightarrow u' = 1$

$$v' = \tan^2 x \rightarrow v = \tan x - x$$

$$J = \left[x . (\tan x - x)\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (\tan x - x) \, dx$$

$$J = \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right) - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx}_{\ln\sqrt{2}} + \underbrace{\int_0^{\pi/4} x \, dx}_{\pi^2/32}$$

Finalement :

$$2 I_3 = 1 - \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} + \cancel{\frac{\pi^2}{32}} + \left(\frac{\pi}{4} - \cancel{\frac{\pi^2}{16}} - \ln\sqrt{2} + \cancel{\frac{\pi^2}{32}}\right)$$

$$= 1 - \cancel{\frac{\pi}{4}} - \ln\sqrt{2} + \cancel{\frac{\pi}{4}} - \ln\sqrt{2} = 1 - 2\ln\sqrt{2}$$

$$\boxed{I_3 = \frac{1}{2} - \ln\sqrt{2}}$$

etc.

Si l'on consulte une table d'intégrales (par exemple dans la série SCHAUM), on n'y trouve pas de formule donnant

$\int \tan^n x \, dx$ en fonction de n ...

Mais bien en fonction d'une autre intégrale !

$$\int \tan^n x \, dx = \frac{\tan^{n+1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \, dx .$$

Cela semble confirmer qu'il faut se contenter du résultat obtenu au point 2).

Question 4

$$z^3 + 2(1-i)z^2 + (1+m^2-4i)z - 2i(1+m^2) = 0 \qquad \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{C} \end{cases}$$

1) Pour trouver une racine d'un tel polynôme, on peut observer les diviseurs du terme indépendant $-2i(1+m^2)$. On observe que pour "éliminer" le terme $-2im^2$ qui s'y trouve, on peut remplacer z par $2i$ car le terme $(1+m^2-4i).z$ fournira $m^2.2i$.

Vérifions si $z = 2i$ est bien une racine :

$$8i^3 + 2(1-i).\underbrace{4i^2}_{-4} + (1+m^2-4i).2i - 2i(1+m^2) \stackrel{?}{=} 0$$

$$-\cancel{8i} - 8 + \cancel{8i} + \cancel{2i} + \cancel{m^2.2i} - 8i^2 - \cancel{2i} - \cancel{2im^2} \stackrel{?}{=} 0$$

$$-8 \qquad\qquad + 8 \quad = 0 \ !$$

$$\boxed{z_1 = 2i}$$

2) Le polynôme est donc divisible par $(z-2i)$.
Utilisons la méthode de HORNER.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2(1-i) & 1+m^2-4i & & -2i(1+m^2) \\ 2i & & 2i & 4i & & 2i(1+m^2) \\ \hline & 1 & 2 & 1+m^2 & & 0 \end{array}$$

L'équation peut donc s'écrire :

$$(z-2i).\left(\underbrace{z^2+2z+1+m^2}\right)=0$$

$$\Delta = 4-4.(1+m^2) = -4m^2 = 4m^2i^2$$

$$z = \frac{-2 \pm 2mi}{2} = -1 \pm mi$$

Les deux autres racines sont $\boxed{\begin{array}{l} z_2 = -1+mi \\ z_3 = -1-mi \end{array}}$

$$S = \{2i, -1+mi, -1-mi\}$$

Question 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ $3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0$

Posons $y = 3^x$: $y^2 - 3y + 2 = 0$
(car $3^{x+1} = 3^x . 3$)

$$\Delta = 9 - 4.1.2 = 1 \rightarrow y = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Donc $3^x = 2 \rightarrow x = \log_3 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 3} \simeq 0{,}6309$

$3^x = 1 \rightarrow x = 0$

$$\boxed{S = \{\log_3 2, 0\}}$$

Question 6 On donne l'équation matricielle

$$X^2 - 4X - 12\, I_2 = 0 \quad \text{avec} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ racine de cette équation ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - 12 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 20 & 24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 20 & 12 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}} - \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Correct.

2) La somme des racines d'une équation du second degré est donnée par la formule $S = -b/a$.

Dans le cas-ci, comme nous travaillons avec des matrices :

$$S = 4 . I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soit $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ la seconde racine.

Nous avons ainsi $A + B = S$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & +1 \end{pmatrix}}$$

Vérification

$$B^2 - 4B - 12\, I_2 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & +1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & +1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & +1 \end{pmatrix} - 12 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 24 & -12 \\ -20 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -20 & +4 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}} - \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ok.

Question 7 Suite géométrique de raison r positive avec $u_5 = 9\,u_3$ et $u_6 = 486$.

Calculer r et u_1.

On a $u_5 = r^2 . u_3$ et donc $r^2 = 9$.

Comme r est positive : $r = 3$

[Ensuite : $u_6 = r . u_5 \rightarrow 486 = 3\,u_5 \rightarrow u_5 = 162$] inutile

$u_1 = \dfrac{u_6}{r^5} = \dfrac{486}{243} = 2$

La suite est : 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, ...

u_1 u_6

Question 8 10 boules blanches
5 " rouges

On tire simultanément 3 boules de l'urne.

Proba. d'avoir au moins une boule rouge ?

Soit A l'événement "obtenir au moins une boule rouge"
Son complémentaire est $\bar{A}$ = " n'obtenir aucune boule rouge"
= " obtenir 3 boules blanches".

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$= 1 - \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}$$

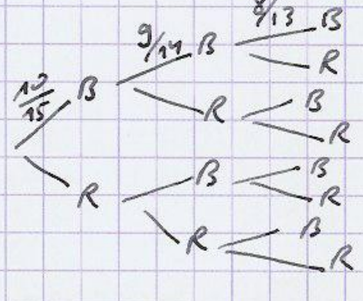
C_{10}^3 : nombre de façons de choisir 3 boules parmi les 10 blanches

C_{15}^3 : nombre de façons de choisir 3 boules parmi 15.

$$= 1 - \frac{\frac{10 \times 9 \times 8}{\cancel{3!}}}{\frac{15 \times 14 \times 13}{\cancel{3!}}} = 1 - \frac{\cancel{10}^{2} \times \cancel{9}^{3} \times 8}{\cancel{15}_{3} \times \cancel{14}_{7} \times 13} = 1 - \frac{24}{91}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{67}{91}} \simeq 0,7363$$

Remarque : pour trouver la probabilité de $\bar{A}$ on peut utiliser un diagramme en arbre



$$P(\bar{A}) = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} \times \frac{8}{13}$$

Question 9 Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$2\sin^3 x + \cos^2 x - 5\sin x - 3 = 0$$

Remplaçons $\cos^2 x$ par $1-\sin^2 x$ afin d'obtenir une équation polynômiale en $\sin x$:

$$2\sin^3 x + 1 - \sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$$

$$2\sin^3 x - \sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$$

Posons $y = \sin x$: $2y^3 - y^2 - 5y - 2 = 0$

L'ensemble des diviseurs du terme indépendant est $\text{Div}(-2) = \{-2, -1, 1, 2\}$. Nous voyons que (-1) annule le polynôme et celui-ci est donc divisible par $(y+1)$:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -1 & -5 & -2 \\ -1 & & -2 & 3 & 2 \\ \hline & 2 & -3 & -2 & 0 \end{array}$$

L'équation s'écrit donc : $(y+1)\cdot(\underbrace{2y^2 - 3y - 2}) = 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25$

$y = -1$ ou $y = \dfrac{3 \pm 5}{4}$ $\begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\sin x = -1$ ou $\sin x = 2$ ou $\sin x = -\frac{1}{2}$

$\boxed{x = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi}$ à rejeter $\boxed{x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + k.2\pi}$

Question 10

1) Équation cartésienne du plan α déterminé par $\begin{cases} A(1,-2,-3) \\ B(0,1,-2) \\ C(-2,-5,1) \end{cases}$.

$$\alpha \equiv \begin{vmatrix} x & -1 & -3 \\ y-1 & 3 & -3 \\ z+2 & 1 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} x & -1 \\ y-1 & 3 \\ z+2 & 1 \end{matrix} = 0 \iff 12x + 3z + 6 - 3y + 3 + 9z + 18 + 3x + 4y - 4 = 0 \rightarrow$$

$\vec{BP}$ $\vec{AB}$ $\vec{AC}$

avec $P(x,y,z)$

$$\boxed{\alpha \equiv 15x + y + 12z + 23 = 0}$$

2) $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc les équations paramétriques de OA sont : $OA \equiv \begin{cases} x = k \\ y = -2k \\ z = -3k \end{cases}$.

Si $P \in OA$, les coordonnées de P sont de la forme $(k, -2k, -3k)$.

Rappel → La formule qui donne la distance entre un point $P(x_0, y_0, z_0)$ et un plan $\alpha \equiv ax + by + cz + d = 0$ est :

$$d(P, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Il faut donc : $d(P, \alpha) = 5 \iff \dfrac{|15k - 2k - 36k + 23|}{\sqrt{15^2 + 1^2 + 12^2}} = 5$

$\iff |-23k + 23| = 5.\sqrt{370} \iff |-k+1| = \dfrac{5.\sqrt{370}}{23}$

1°/ si $k \geq 1$: $k - 1 = \dfrac{5\sqrt{370}}{23} \rightarrow k = \dfrac{5\sqrt{370}}{23} + 1$

Le premier point qui répond à la question est :

$$\boxed{P_1\left(\frac{5\sqrt{370}}{23} + 1, \frac{-10\sqrt{370}}{23} - 2, \frac{-15\sqrt{370}}{23} - 3\right)}$$

$\simeq P_1(5.18, -10.36, -15.54)$

2°/ si $k < 1$: $-k + 1 = \dfrac{5\sqrt{370}}{23} \rightarrow k = 1 - \dfrac{5\sqrt{370}}{23}$

Le second point qui répond à la question est :

$$\boxed{P_2\left(1 - \frac{5\sqrt{370}}{23}, -2 + \frac{10\sqrt{370}}{23}, -3 + \frac{15\sqrt{370}}{23}\right)}$$

$\simeq P_2(-3.18, 6.36, 9.54)$