# Epreuve POL

Analyse - Géométrie dans l'espace - Suites et séries - Nombres complexes

5 questions - 4 heures

2020 — Série A

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme $\pi$, e, $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3$, … , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, … sous leur forme symbolique.

**Question 1** (4 points)

(a) (2 points) Déterminer $k \in \mathbb{R}$, de sorte que pour chaque nombre complexe $z = a + bi$ avec $b = -2a$ on ait :

$$|z - k + 7i| = |z - 2 + 9i|$$

(b) (2 points) $-i$ est une racine de $z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 2z + 3 = 0$. Trouver les autres racines.

**Question 2** (4 points) Un patient prend 10 mg d'un médicament le premier jour et les jours suivants 5 mg. Au cours de la journée, 40 % de la substance est décomposée dans le corps. On peut représenter les quantités de médicaments qui se trouvent dans l'organisme immédiatement après la prise du 1er, 2ème, 3ème jour, ... par une suite $u_1, u_2, u_3, \ldots$ .

(a) (1 point) Donner une formule récursive (par récurrence) pour cette suite.

(b) (1 point) Prouver par induction complète (par récurrence) que cette suite est limitée vers le haut.

(c) (1 point) Prouver que la suite est croissante.

(d) (1 point) Déterminer la limite de la suite à l'aide des règles de calcul des limites.

**Question 3** (4 points) Soit : $f(x) = x^3 + px - 1$.

(a) (2 points) Quelle condition doit remplir $p \in \mathbb{R}$ pour que la fonction n'ait pas d'extremum ?

(b) (2 points) Quelle condition doit remplir $p \in \mathbb{R}$ pour que la fonction ait un maximum et un minimum et trois zéros différents ? (Indice : quel est le signe du produit du maximum et du minimum s'il y a trois zéros différents ?)

**Question 4** (4 points)

(a) (1 point) Démontrer que pour tout nombre réel $x$, on a la relation suivante

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

(b) (1 point) En déduire une primitive de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$, telle que,

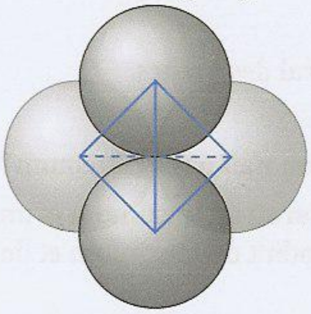
$$f(x) = \cos^3 x$$

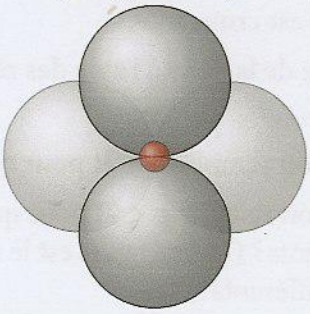
(c) (1 point) $a$ étant un nombre réel donné non nul, en déduire la valeur de l'intégrale définie en utilisant une intégration par parties

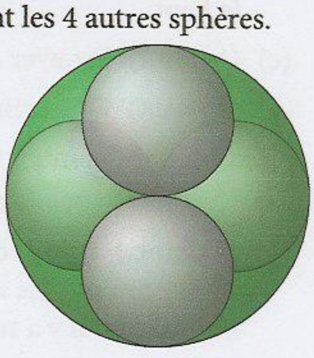
$$I(a) = \int_0^a (2x+1)\cos^2 x \sin x \, dx$$

(d) (1 point) Calculer $I\left(\frac{\pi}{3}\right)$

**Question 5** (4 points) 4 sphères de même rayon $r$ sont empilées de sorte que les points centraux coïncident avec les sommets d'un tétraèdre équilatéral avec arête $2r$. Déterminer le rapport des volumes de la plus petite sphère et de la plus grande sphère qui touchent les 4 autres sphères.







(a) (1 point) Dans le triangle formé par les centres des 3 sphères inférieures, calculer la distance entre le centre de gravité et un sommet.

(b) (1 point) Dans le tétraèdre formé par les centres des 4 sphères, calculer la distance du centre de gravité (l'isobarycentre, c.-à-d. le point qui se trouve à la même distance des 4 points) à un sommet en utilisant le résultat précédent.

(c) (1 point) Calculer le volume de la plus grande sphère (centre donné dans la question précédente).

(d) (1 point) Calculer le volume de la plus petite sphère (même centre) et calculer le rapport des deux volumes.

## Question 1

a) $z = a + bi \in \mathbb{C}$ avec $b = -2a$.

Déterminer $k \in \mathbb{R}$ pour que $|z - k + 7i| = |z - 2 + 9i|$.

Remplaçons $z$ par $a - 2ai$ dans les 2 membres et développons :

$$|a - 2ai - k + 7i| = |a - 2ai - 2 + 9i|$$

$$|(a-k) + (7-2a)i| = |(a-2) + (9-2a)i|$$

Égalons les carrés des modules :

$$(a-k)^2 + (7-2a)^2 = (a-2)^2 + (9-2a)^2$$

$$\cancel{a^2} - 2ak + k^2 + 49 - 28a + \cancel{4a^2} = \cancel{a^2} - 4a + 4 + 81 - 36a + \cancel{4a^2}$$

$$\rightarrow \quad k^2 - 2ak + 12a - 36 = 0.$$

Résolvons cette équation du second degré d'inconnue $k$ :

$$\Delta = 4a^2 - 4.1.(12a - 36) = 4a^2 - 48a + 144$$

$$= 4(a^2 - 12a + 36) = 4.(a-6)^2$$

Donc : $k = \dfrac{2a \pm 2(a-6)}{2} = a \pm (a-6)$ $\nearrow$ $k = 2a - 6$ ; $\searrow$ $k = 6$

### Exemples pour vérifier.

1°/ si $a = 5$ : $z = 5 - 10i$

* $k = 2.5 - 6 = 4$ $\qquad |5 - 10i - 4 + 7i| \overset{?}{=} |5 - 10i - 2 + 9i|$
  $|1 - 3i| \overset{?}{=} |3 - i|$
  $\sqrt{10} = \sqrt{10}$

* $k = 6$ $\qquad |5 - 10i - 6 + 7i| \overset{?}{=} |5 - 10i - 2 + 9i|$
  $|-1 + 3i| \overset{?}{=} |3 - i|$
  $\sqrt{10} = \sqrt{10}$

2°/ si $a = -3$ : $z = -3 + 6i$

* $k = 2.(-3) - 6 = -12$ $\qquad |-3 + 6i + 12 + 7i| \overset{?}{=} |-3 + 6i - 2 + 9i|$
  $|9 + 13i| \overset{?}{=} |-5 + 15i|$
  $\sqrt{250} = \sqrt{250}$

* $k = 6$ ok aussi.

b) $(-i)$ est racine de $z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 2z + 3 = 0$.

Autres racines ? Utilisons la méthode de HORNER :

| | 1 | -2 | 4 | -2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $-i$ | | $-i$ | $2i-1$ | $-3i+2$ | $-3$ |
| | 1 | $-2-i$ | $3+2i$ | $-3i$ | 0 |

L'équation est équivalente à

$$(z+i).\Big[\underbrace{z^3 - (2+i)z^2 + (3+2i)z - 3i}_{q(z)}\Big] = 0$$

En tenant compte du terme indépendant $(-3i)$, on voit facilement que $(i)$ est racine du polynôme $q(z)$ :

$$q(i) = i^3 - (2+i)i^2 + (3+2i)i - 3i$$

$$= -i + 2 + i + 3i - 2 - 3i = 0.$$

Divisons $q(z)$ par $(z-i)$ :

| | 1 | $-2-i$ | $3+2i$ | $-3i$ |
|---|---|---|---|---|
| $i$ | | $i$ | $-2i$ | $3i$ |
| | 1 | $-2$ | 3 | 0 |

L'équation est maintenant équivalente à

$$(z+i).(z-i).(\underbrace{z^2 - 2z + 3}) = 0$$

$$\Delta = 4 - 12 = -8 = 8i^2$$

$$\rightarrow \quad z = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}\,i}{2} = 1 \pm \sqrt{2}\,i$$

$$S = \{-i,\ i,\ 1+\sqrt{2}\,i,\ 1-\sqrt{2}\,i\}$$

Les autres racines du polynôme sont donc

$$\boxed{i,\ 1+\sqrt{2}\,i \text{ et } 1-\sqrt{2}\,i}\ .$$

## Question 2

Quantité de médicaments le 1er jour : $u_1 = 10$ (mg).

À la fin de la journée, il en reste 60% mais le patient reprend 5 (mg) :

$$u_2 = 0,6 \cdot 10 + 5 = 11 \text{ (mg)}$$

a) Définition par récurrence de cette suite :

$$\begin{cases} u_1 = 10 \\ u_{n+1} = 0,6 \cdot u_n + 5 \quad (n \in \mathbb{N}_0) \end{cases}$$

Quelques valeurs :

$u_1 = 10$
$u_2 = 11$
$u_3 = 11,6$
$u_4 = 11,96$
$u_5 = 12,176$

$u_6 = 12,3056$
$u_7 = 12,38336$
$u_8 = 12,430016$
$\vdots$

b) Pour prouver que cette suite est bornée supérieurement, je propose de calculer sa limite.

Soit $L$ cette limite.

$$\underbrace{\lim_{n \to \infty} u_{n+1}}_{L} = \lim_{n \to \infty} (0,6 \cdot u_n + 5)$$

$$L = 0,6 \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} u_n}_{L} + 5$$

$\rightarrow$ $L = 0,6 \cdot L + 5$

$\rightarrow$ $0,4 \cdot L = 5$ $\rightarrow$ $L = 12,5$.

Prouvons par récurrence que la suite est bornée supérieurement par 12,5.

1°/ $u_1 = 10 < 12,5$

2°/ Si $\underbrace{u_n < 12,5}_{\text{hypothèse de récurrence}}$ avons-nous $u_{n+1} < 12,5$ ?

oui, car : $u_{n+1} = 0,6 \cdot u_n + 5$

Or, si $u_n < 12,5$ alors $0,6 \cdot u_n < 7,5$ et donc $u_{n+1} < 7,5 + 5 = 12,5$.

c) Suite croissante ? $\forall n \geq 1$ : $u_{n+1} > u_n$ ?

$$0,6 \cdot u_n + 5 > u_n \iff 5 > 0,4 \cdot u_n \iff \underbrace{\frac{5}{0,4}}_{12,5} > u_n$$

Vrai, car $u_n < 12,5$ (voir (b)).

d) Voir (b).

Question 3 $\qquad f(x) = x^3 + px - 1 . \qquad (p \in \mathbb{R})$

a) Condition sur $p$ pour que $f$ n'ait pas d'extremum ?

$$f'(x) = 3x^2 + p \qquad \boxed{\text{Condition : } \quad p \geq 0}$$

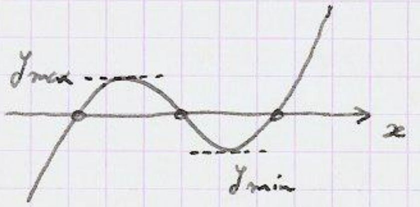
En effet, si $p \geq 0$ alors $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et $f$ n'a pas d'extremum.

b) S'il y a un maximum et un minimum c'est que $p<0$.

Racines de $f'(x)$ : $\quad x = \pm \sqrt{\frac{-p}{3}}$ .

Tableau des variations de $f$ : (compte tenu de $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$)

| $x$ | | $x_{max} = -\sqrt{\frac{-p}{3}}$ | | $x_{min} = \sqrt{\frac{-p}{3}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow$ | max | $\searrow$ | min | $\nearrow +\infty$ |




S'il y a 3 racines pour $f$ alors :

$$\underbrace{y_{max}}_{f(x_{max})} \cdot \underbrace{y_{min}}_{f(x_{min})} < 0$$

$$y_{max} \cdot y_{min} = \left(-\frac{p}{3} \cdot -\sqrt{\frac{-p}{3}} + p \cdot -\sqrt{\frac{-p}{3}} - 1\right) \cdot \left(-\frac{p}{3} \cdot \sqrt{\frac{-p}{3}} + p \cdot \sqrt{\frac{-p}{3}} - 1\right) < 0$$

$$\left(-\frac{2p}{3} \cdot \sqrt{\frac{-p}{3}} - 1\right) \cdot \left(\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} - 1\right) < 0$$

$$-\left(\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} + 1\right) \cdot \left(\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} - 1\right) < 0$$

$$-\left(\frac{4p^2}{9} \cdot \frac{-p}{3} - 1\right) < 0$$

$$+\frac{4p^3}{27} + 1 < 0$$

$$\frac{4p^3}{27} < -1 \quad \Longleftrightarrow \quad p^3 < -\frac{27}{4}$$

Il faut donc que $\boxed{p < -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}} \simeq -1,88988$

## Question 4

a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R} : \quad \cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$.

Exprimons $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ :

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos(2x+x) \\
&= \cos 2x . \cos x - \sin 2x . \sin x \\
&= (2.\cos^2 x - 1).\cos x - 2.\sin x.\cos x.\sin x \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x.\cos x \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2.(1-\cos^2 x).\cos x \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x. \quad (*)
\end{aligned}$$

Revenons à l'identité à démontrer :

$$\begin{aligned}
2^{\text{nd}}\text{ membre} &= \frac{1}{4}.(\cos 3x + 3\cos x) \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{4}.(4\cos^3 x - \cancel{3\cos x} + \cancel{3\cos x}) \\
&= \frac{1}{4}.4.\cos^3 x = \cos^3 x = 1^{\text{er}}\text{ membre}.
\end{aligned}$$

b) $$\int \cos^3 x \, dx = \frac{1}{4}\int(\cos 3x + 3\cos x)\,dx = \frac{1}{4}.\left(\frac{\sin 3x}{3} + 3\sin x\right) + C$$

$$= \boxed{\frac{\sin 3x}{12} + \frac{3\sin x}{4} + C}$$

c) $$I(a) = \int_0^a (2x+1).\cos^2 x.\sin x \, dx \longrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 2x+1 \longrightarrow u' = 2 \\ v' = \cos^2 x.\sin x \rightarrow v = -\frac{\cos^3 x}{3} \end{array}\right.$$

primitive "quasi immédiate"

$$I(a) = \left[-\frac{(2x+1).\cos^3 x}{3}\right]_0^a + \frac{2}{3}\int_0^a \cos^3 x \, dx$$

$$= -\frac{(2a+1).\cos^3 a}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left[\frac{\sin 3x}{12} + \frac{3\sin x}{4}\right]_0^a \quad \text{(voir (b))}$$

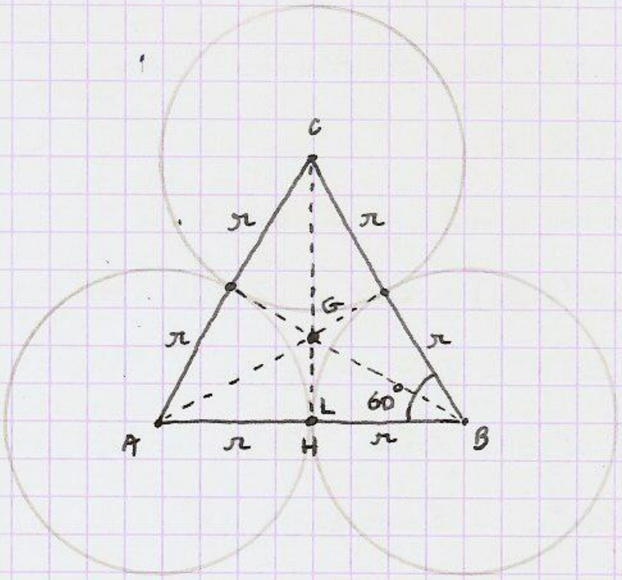
$$\boxed{I(a) = -\frac{(2a+1).\cos^3 a}{3} + \frac{1}{3} + \frac{\sin 3a}{18} + \frac{\sin a}{2}}$$

d) $$I\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\left(\frac{2\pi}{3}+1\right).\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{1}{3} + \frac{\overset{=0}{\sin \pi}}{18} + \frac{\sqrt{3}/2}{2}$$

$$= -\frac{\frac{2\pi}{3}+1}{24} + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{21 + 18\sqrt{3} - 2\pi}{72}} \simeq 0,6374.$$

## Question 5

a)




Soit ABC la "base" du tétraèdre ; ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité G.

Calculons $|GC|$.

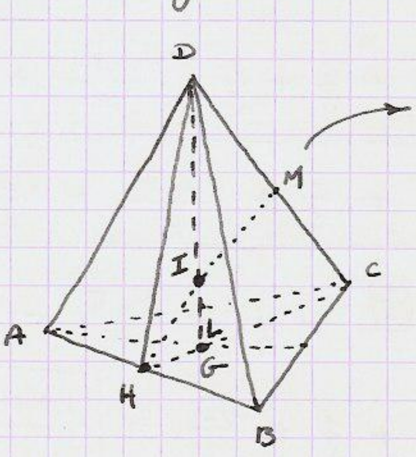
Dans le triangle rectangle BHC : $|HC| = 2r \cdot \underbrace{\sin 60°}_{\sqrt{3}/2}$

$\to |HC| = \sqrt{3}\, r$.

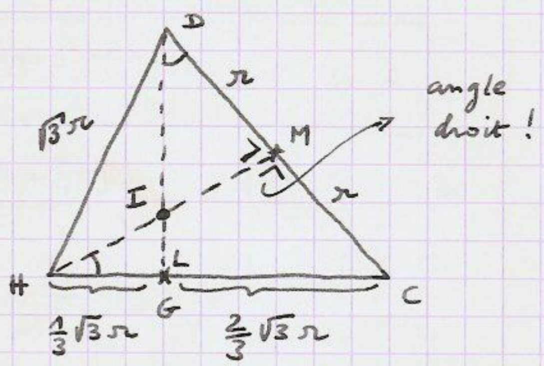
Comme les médianes d'un triangle se coupent au tiers de leur longueur, nous obtenons :

$$\boxed{|GC| = \frac{2}{3}\sqrt{3}\, r}.$$

b) Soit I l'isobarycentre du tétraèdre. Le point I appartient à la droite GD, et celle-ci est perpendiculaire au plan ABC (tout cela se démontre par la géométrie synthétique*).




<u>Vue dans le plan HDC</u>




* Voir le document "tetraedre_reg. pdf".

Calculons d'abord la hauteur $|GD|$ du tétraèdre :

$$|GD|^2 = (2r)^2 - \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\, r\right)^2 = 4r^2 - \frac{4}{3}r^2 = \frac{8}{3}r^2$$

$$\rightarrow \boxed{|GD| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\, r}.$$

Il est toujours bon de savoir que dans un tétraèdre régulier l'isobarycentre I se situe au quart de la hauteur (voir <u>plus loin</u>).

Donc $|ID| = \frac{3}{4} \cdot |GD| \longrightarrow |ID| = \frac{\cancel{3}^{\sqrt{3}}}{\cancel{4}_2} \cdot \frac{\cancel{2}^{1}\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{3}}_1}\, r = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}\, r}.$

<u>Plus loin</u> ☺

Reprenons la figure en bas à droite de la page 6.

Étant donné que $\widehat{MHC} = \widehat{CDG}$ (angles à côtés perpendiculaires), les triangles $IGH$ et $CGD$ sont semblables et donc :

$$\frac{|IG|}{|HG|} = \frac{|CG|}{|GD|} \longrightarrow |IG| = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, r \cdot \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}\, r}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\, r} = \frac{\sqrt{6}}{6}\, r.$$

Et comme $|GD| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\, r = \frac{2\sqrt{6}}{3}\, r$, on a bien $|GD| = 4 \cdot |IG|$.

c) <u>Volume de la plus grande sphère</u>

Elle est centrée en I et son rayon est donc $|ID| + r$ :

$$|ID| + r = \frac{\sqrt{6}}{2}\, r + r = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + 1\right) r$$

$$\boxed{V_G = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + 1\right)^3 r^3}$$

d) <u>Volume de la plus petite sphère</u>

Centrée en I et donc de rayon $|ID| - r = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1\right) \cdot r$.

$$\boxed{V_p = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1\right)^3 r^3}$$

<u>Rapport des volumes</u>

$$\frac{V_G}{V_p} = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + 1\right)^3}{\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1\right)^3} = \left(\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2}\right)^3 = \left[\frac{(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}\right]^3 = \left(\frac{6+4\sqrt{6}+4}{2}\right)^3 = \boxed{\left(5+2\sqrt{6}\right)^3}$$

$$\simeq 969,9987$$

La grande sphère est près de 970 fois plus volumineuse que la petite !