2020 | Série B

Epreuve POL

Analyse - Géométrie dans l'espace - Suites et séries - Nombres complexes

5 questions - 4 heures

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3, \ldots, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ sous leur forme symbolique.

Question 1 (4 points)

(a) (2 points) Démontrer à l'aide de l'intégration par parties (2 fois) que

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(n\theta)\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{n - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2 - 1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

(b) (1 point) Calculer I_1 directement en utilisant une substitution (un changement de variable).

(c) (1 point) Démontrer que la formule de (a) pour $n = 1$ donne la même valeur numérique que le résultat de (b) en calculant la limite suivante

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)}{x^2 - 1}$$

Question 2 (4 points)

(a) (2 points) Si le polynôme $p(x)$ a un double zéro $x = x_1 = x_2$ (multiplicité 2), alors x_1 est aussi un zéro de $p'\left(= \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \mathrm{D}p\right)$. Utiliser $p(x) = (x - x_1)^2\, q(x)$ pour démontrer ce théorème.

(b) (1 point) Appliquer le théorème à l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ pour prouver qu'une condition nécessaire pour un double zéro est $b^2 = 4ac$.

(c) (1 point) Utiliser le théorème pour trouver tous les zéros de $x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = 0$, si l'un d'eux est un double zéro.

Question 3 (4 points) Une forêt a la forme d'un triangle ABC telle que $|AB| = 2|AC|$ et dont l'angle de sommet $\widehat{BAC}$ mesure 120°. Un chemin rectiligne AM traverse la forêt selon la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Ce chemin a une longueur égale à 1 kilomètre.

(a) (1 point) Démontrer en utilisant la loi des sinus que $|BM| = 2|CM|$.

(b) (1 point) En utilisant la loi des cosinus, exprimer $|BM|$ et $|CM|$ en fonction de $|BC|$.

(c) (1 point) Calculer $|BC|$.

(d) (1 point) A l'aide des résultats précédents, trouver $|AC|$.

Question 4 (4 points) Pour tout entier naturel n, on note A_n le point dans le plan complexe qui correspond au nombre complexe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

(a) (1 point) Donner la forme trigonométrique du nombre $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.

(b) (1 point) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$ en déduisant l'expression de r_n en fonction de n

(c) (1 point) Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} r_n$.

(d) (1 point) Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

Question 5 (4 points) Arnaud et Tibo ont chacun deux dés à quatre faces non biaisés, les quatre faces étant numérotées 1, 2, 3, 4. Sans regarder, Tibo essaie de deviner la somme x des nombres figurant sur les faces inférieures des deux dés d'Arnaud après qu'ils aient été jetés sur une table. Si son pari est correct, Tibo reçoit x^2 EUR, mais sinon il perd x EUR.

Déterminer le gain attendu de Tibo par lancer de dés d'Arnaud lorsqu'il adopte chacune des stratégies suivantes :

(a) (1 point) Il sélectionne x au hasard dans l'intervalle $2 \leq x \leq 8$.

(b) (1 point) Il parie que x est la somme qu'il obtient en lançant ses deux propres dés.

(c) (2 points) Il suit votre conseil et choisit toujours la même valeur pour x. Quel chiffre conseilleriez-vous ?

ERM 2020 - Epreuve PoL (Série B).

Question 1

a) $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(n\theta) . \cos(\theta)\, d\theta$ $\quad u = \cos\theta \rightarrow u' = -\sin\theta$

$v' = \sin(n\theta) \rightarrow v = \frac{-\cos(n\theta)}{n}$

$$I_n = \underbrace{\left[\frac{-\cos(\theta).\cos(n\theta)}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}.\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(n\theta).\sin\theta\, d\theta}_{J_n}$$

Calcul de J_n : $\quad u = \sin\theta \rightarrow u' = \cos\theta$

$v' = \cos(n\theta) \rightarrow v = \frac{\sin(n\theta)}{n}$

$$J_n = \left[\frac{\sin\theta.\sin(n\theta)}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}.\underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin(n\theta).\cos\theta\, d\theta}$$

$$= \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n} - \frac{1}{n}.I_n$$

Donc : $I_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}.\left[\frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n} - \frac{1}{n}.I_n\right]$

$\rightarrow I_n.\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}.\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$I_n.\frac{n^2-1}{\cancel{n^2}} = \frac{n - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\cancel{n^2}}$

$$\rightarrow \boxed{I_n = \frac{n - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

b) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta.\cos\theta\, d\theta$ $\quad$ posons $u = \sin\theta$, $du = \cos\theta.d\theta$

$= \int_0^1 u.\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$ $\quad \left(\begin{array}{l}\theta = 0 \rightarrow u = 0\\ \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 1\end{array}\right.$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x - \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)}{x^2-1} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

$\overset{R.H.}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{1 - \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right).\frac{\pi}{2}}{2x} = \frac{1 - \overbrace{\cos\frac{\pi}{2}}^{0}.\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{1}{2}$

Question 2

a) Si $p(x)$ a un double zéro x_1 alors

$$p(x) = (x-x_1)^2 \cdot q(x).$$

Dérivons : $p'(x) = 2(x-x_1) \cdot q(x) + (x-x_1)^2 \cdot q'(x)$

$$p'(x) = (x-x_1) \cdot \left[2q(x) + (x-x_1) \cdot q'(x)\right]$$

Cette factorisation montre que x_1 est aussi un zéro de $p'(x)$.

b) Il faut prouver que

Si ax^2+bx+c a un double zéro

alors $b^2 = 4ac$

En effet, dans l'implication $p \Rightarrow q$,
q est une CONDITION NÉCESSAIRE pour p.
Par exemple : $n \in \mathbb{N}$ est multiple de 4 $\Rightarrow$ n est pair.

Pour un naturel, être pair est une condition nécessaire pour être multiple de 4 (mais non suffisante), tandis qu'être multiple de 4 est une condition suffisante pour être pair (mais non nécessaire).

Hypothèse : ax^2+bx+c a un double zéro x_1

Thèse : $b^2 = 4ac$

Démonstration $p(x) = ax^2+bx+c$

$$\rightarrow p'(x) = 2ax+b$$

D'après le résultat (a), x_1 est aussi ~~un~~ zéro de $p'(x)$:

$$2ax_1 + b = 0 \quad \text{et donc} \quad x_1 = -\frac{b}{2a}.$$

Comme $p(x_1) = 0$, nous avons :

$$a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \frac{-b}{2a} + c = 0$$

$$\rightarrow \cancel{a} \cdot \frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

$$\rightarrow b^2 - 2b^2 + 4ac = 0 \longrightarrow \boxed{b^2 = 4ac}.$$

c) Si x_1 est un double zéro de $p(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$

alors x_1 est aussi un zéro de $p'(x) = \underbrace{3x^2 + 8x - 3}$.

$\Delta = 100$ et $x = \frac{-8 \pm 10}{6}$

$\longrightarrow$ $x = \frac{1}{3}$ ou $x = -3$

On a $p(-3) = -27 + 36 + 9 - 18 = 0$

Divisons $p(x)$ par $(x+3)$:

	1	4	-3	-18
-3		-3	-3	18
	1	1	-6	0

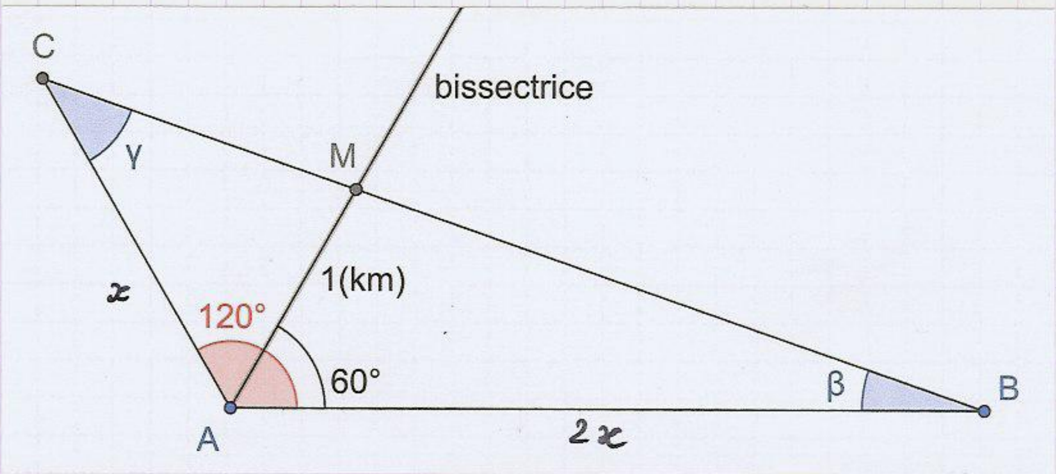
$p(x) = (x+3).\underbrace{(x^2 + x - 6)} = \boxed{(x+3)^2.(x-2)}$

$\Delta = 25$

$x = -3$ ou $x = 2$

$\boxed{\text{les zéros de } p(x) \text{ sont } -3 \text{ (double) et } 2}$

Question 3



a) $|BM| \overset{?}{=} 2.|CM|$

Dans le Δ ABM : $\frac{|BM|}{\sin 60°} = \frac{1}{\sin\beta} \longrightarrow |BM| = \frac{\sin 60°}{\sin\beta}$.

Dans le Δ ACM : $\frac{|CM|}{\sin 60°} = \frac{1}{\sin\gamma} \longrightarrow |CM| = \frac{\sin 60°}{\sin\gamma}$.

Prouver que $|BM| = 2.|CM|$ revient donc à prouver que

$\frac{\cancel{\sin 60°}}{\sin\beta} = 2.\frac{\cancel{\sin 60}}{\sin\gamma}$ ou encore que $\sin\gamma = 2.\sin\beta$.

Dans le Δ ABC : $\frac{|AB|}{\sin\gamma} = \frac{|AC|}{\sin\beta} \xrightarrow{\text{hypothèse}} \frac{2\cancel{|AC|}}{\sin\gamma} = \frac{\cancel{|AC|}}{\sin\beta}$

et on a bien $2\sin\beta = \sin\gamma$.

b) Utilisons la loi des cosinus dans ...

le Δ ABM : $|BM|^2 = |AB|^2 + 1 - 2.|AB|.1.\underbrace{\cos 60^\circ}_{1/2} = |AB^2| - |AB| + 1$ (1)

le Δ ACM : $|CM|^2 = |AC|^2 + 1 - 2.|AC|.\cos 60^\circ = |AC|^2 - |AC| + 1$ (2)

le Δ ABC : $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2.|AB|.|AC|.\underbrace{\cos 120^\circ}_{-1/2}$

$= |AB|^2 + |AC|^2 + |AB|.|AC|$

$\overset{|AB| = 2|AC|}{=} 4|AC|^2 + |AC|^2 + 2|AC|^2 = 7|AC|^2$ (3)

donc $|AC|^2 = \frac{|BC|^2}{7}$ et $|AB|^2 = 4.\frac{|BC|^2}{7}$

Remplaçons dans (1) : $|BM|^2 = 4.\frac{|BC|^2}{7} - 2.\frac{|BC|}{\sqrt{7}} + 1$

$$\boxed{|BM| = \sqrt{\frac{4}{7}|BC|^2 - \frac{2\sqrt{7}}{7}|BC| + 1}} \quad (4)$$

Remplaçons dans (2) : $|CM|^2 = \frac{|BC|^2}{7} - \frac{|BC|}{\sqrt{7}} + 1$

$$\boxed{|CM| = \sqrt{\frac{1}{7}|BC|^2 - \frac{\sqrt{7}}{7}|BC| + 1}} \quad (5)$$

c) $|BC| = ?$ Nous savons que $|BM| = 2|CM|$
et donc que $|BM|^2 = 4.|CM^2|$.

Utilisant (4) et (5), nous obtenons ainsi :

$$\cancel{\frac{4}{7}|BC|^2} - \frac{2\sqrt{7}}{7}|BC| + 1 = \cancel{\frac{4}{7}|BC|^2} - \frac{4\sqrt{7}}{7}|BC| + 4$$

$\rightarrow \frac{2\sqrt{7}}{7}|BC| = 3 \quad \rightarrow \quad |BC| = \frac{21}{2\sqrt{7}} = \frac{\overset{3}{\cancel{21}}\sqrt{7}}{2.\cancel{7}_1}$

$\boxed{|BC| = \frac{3\sqrt{7}}{2}} \simeq 3,9686$ (km).

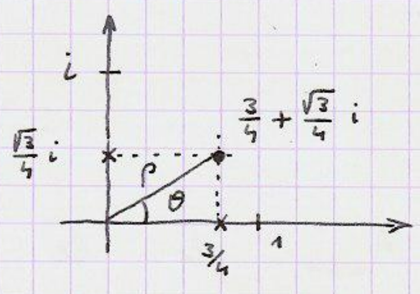
d) D'après le résultat trouvé en (b) : $|AC| = \frac{|BC|}{\sqrt{7}}$

$\rightarrow \boxed{|AC| = \frac{3}{2}}$

Question 4 Dans $\mathbb{C}$: $\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right) . z_n \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

On définit la suite $(r_n)_{n \geq 0}$ par $r_n = |z_n|$ (module de z_n).

a) Forme trigonométrique de $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i$?



$$\rho = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ici : $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i = \frac{\sqrt{3}}{2} . \left(\cos\frac{\pi}{6} + i . \sin\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} . \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

b) Pour démontrer qu'une suite est géométrique, il suffit de prouver que le rapport de deux termes consécutifs est constant.

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \left|\frac{\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right) . \cancel{z_n}}{\cancel{z_n}}\right| = \left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right|$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{(voir (a))}$$

Mais il nous était demandé d'y arriver en déduisant l'expression de r_n en fonction de n. Reprenons...

$r_0 = |z_0| = 1$

$r_1 = |z_1| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} . i\right) . z_0\right| = \left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right| . |z_0| = \frac{\sqrt{3}}{2} . r_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$r_2 = |z_2| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right) . z_1\right| = \ldots = \frac{\sqrt{3}}{2} . r_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

⋮

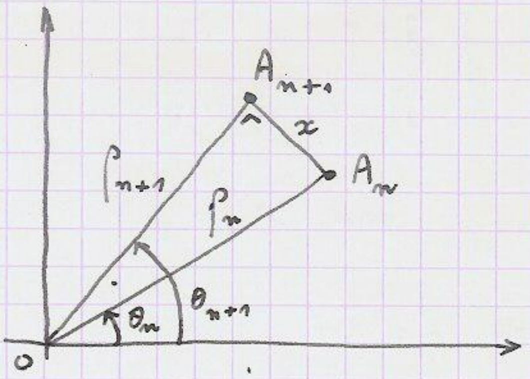
$\boxed{r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}$ La suite $(r_n)_{n \geq 0}$ est bien géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) La suite ayant une raison q telle que $|q| < 1$, la somme illimitée de ses termes converge :

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n = r_1 . \frac{1}{1-q} = 1 . \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2-\sqrt{3}} . \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 4 + 2\sqrt{3}$$

$\simeq 7{,}4641$

d)



$$\widehat{A_n O A_{n+1}} = \theta_{n+1} - \theta_n$$

Or, $\rho_n = |z_n| = r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

$\rho_{n+1} = |z_{n+1}| = r_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$

Si le triangle est rectangle en A_{n+1}, alors le rapport $\underbrace{\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \cos \widehat{A_n O A_{n+1}}$ ("côté adjacent sur hypoténuse")

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \widehat{A_n O A_{n+1}} \rightarrow \widehat{A_n O A_{n+1}} = 60^\circ \ ?$$

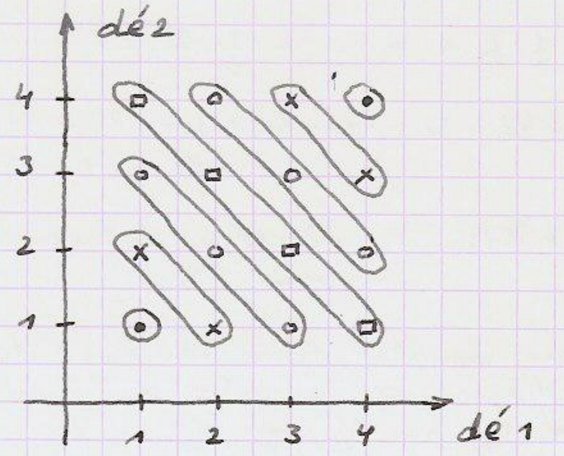
Cet angle mesure bien 60° car :

$$z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right) \cdot z_n \overset{(a)}{=} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \rho_n \cdot \text{cis}\,\theta_n$$

$$\rho_{n+1} \cdot \text{cis}\,\theta_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \rho_n \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \theta_n\right)$$

Donc $\theta_{n+1} = \frac{\pi}{6} + \theta_n$ et on a bien $\widehat{A_n O A_{n+1}} = \frac{\pi}{6}$.

Question 5 Étudions d'abord le problème du lancer de deux dés tétraédriques réguliers.

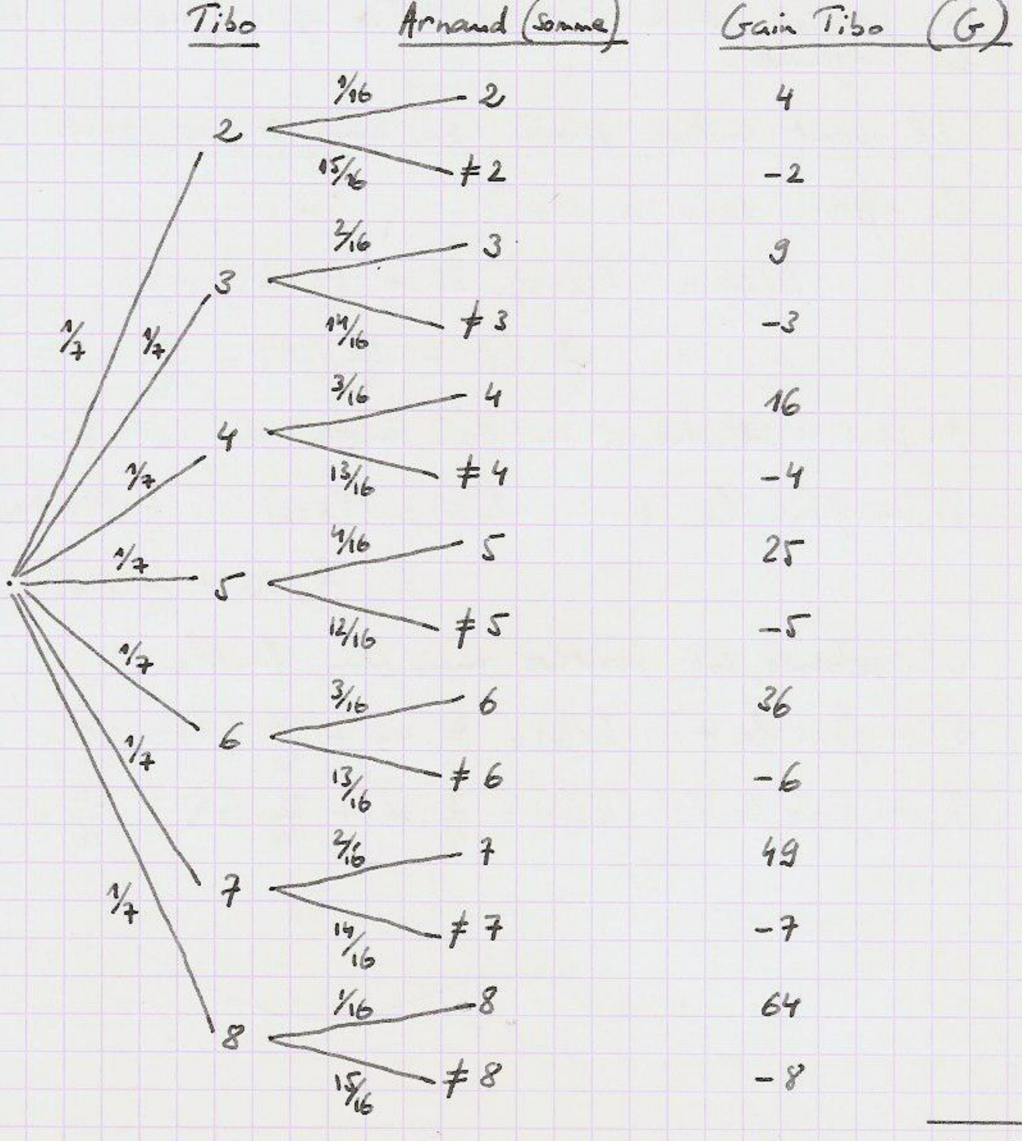


Soit X la variable aléatoire "Somme des points des faces inférieures" : $X = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

x	$P(X=x)$
2	$1/16$
3	$2/16$
4	$3/16$
5	$4/16$
6	$3/16$
7	$2/16$
8	$1/16$

a) Stratégie 1 : Tibo choisit au hasard un naturel x tel que $2 \leq x \leq 8$.

Le verbe "choisir" n'est peut-être pas indiqué. Disons qu'il tire au hasard une carte parmi 7 cartes numérotées de 2 à 8.
Ensuite, Arnaud lance les 2 dés.
Représentons tous les déroulements possibles avec un diagramme en arbre.



Le "gain attendu" est l'espérance mathématique de la variable aléatoire G. Il se calcule en multipliant chacune des 14 valeurs possibles de G par sa probabilité et en additionnant le tout :

$$E(G) = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{16}\cdot 4 + \frac{1}{7}\cdot\frac{15}{16}\cdot(-2) + \frac{1}{7}\cdot\frac{2}{16}\cdot 9 + \dots + \frac{1}{7}\cdot\frac{15}{16}\cdot(-8)$$

$$= \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{16}\cdot\left[4-30+18-42+48-52+100-60+108-78+98-98+64-120\right]$$

$$= \frac{-40}{112} = -\frac{5}{14} \simeq -0{,}3571$$

Stratégie défavorable pour Tibo.

b) Stratégie 2 : Tibo se fie au résultat donné par ses 2 dés.
Reprenons le diagramme en arbre en remplaçant, à la première étape les probabilités $\frac{1}{7}$ par $\frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}, \dots, \frac{1}{16}$.

$$E(G) = \frac{1}{16}\cdot\left[\frac{1}{16}\cdot 4+\frac{15}{16}\cdot(-2)\right] + \frac{2}{16}\cdot\left[\frac{2}{16}\cdot 9+\frac{14}{16}\cdot(-3)\right] + \frac{3}{16}\cdot\left[\frac{3}{16}\cdot 16+\frac{13}{16}\cdot(-4)\right]$$
$$+ \frac{4}{16}\cdot\left[\frac{4}{16}\cdot 25+\frac{12}{16}\cdot(-5)\right] + \frac{3}{16}\cdot\left[\frac{3}{16}\cdot 36+\frac{13}{16}\cdot(-6)\right] + \frac{2}{16}\left[\frac{2}{16}\cdot 49+\frac{14}{16}\cdot(-7)\right] + \frac{1}{16}\left[\frac{1}{16}64+\frac{15}{16}(-8)\right]$$

$$= \frac{1}{256}\cdot\left(-26-48-12+160+90+0-56\right) = \frac{108}{256} = \frac{27}{64} \simeq 0{,}4219$$

Cette stratégie est cette fois favorable à Tibo car l'espérance est positive et on s'attend à ce qu'il gagne 0,4219 par partie en moyenne.

c) Il vaut mieux parier sur une somme égale à 5.

En effet, dans ce cas :

$$E(G) = P(X=5)\cdot 25 + P(X\neq 5)\cdot(-5)$$
$$= \frac{4}{16}\cdot 25 + \frac{12}{16}\cdot(-5) = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$$

On peut s'attendre à un gain moyen de 2,5 par partie.

Si on joue le 6 : $E(G) = P(X=6)\cdot 36 + P(X\neq 6)\cdot(-6)$

$$= \frac{3}{16}\cdot 36 + \frac{13}{16}\cdot(-6) = \frac{30}{16} = \frac{15}{8} = 1{,}875.$$

L'espérance est positive mais plus faible.

Si on joue le 7 : $E(G) = \frac{2}{16}\cdot 49 + \frac{14}{16}\cdot(-7) = 0$.

Si on joue le 4 : $E(G) = \frac{3}{16}\cdot 16 + \frac{13}{16}\cdot(-4) = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}$ (on perd !).