Problème de géométrie et d'optimisation posé à un examen d'admission (Liège - 2011)

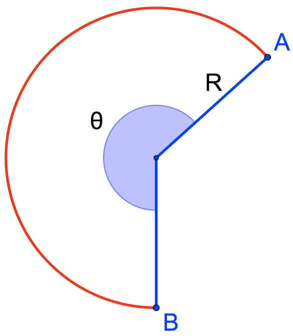
On découpe dans une feuille de papier un secteur circulaire de rayon R et d'ouverture θ comme représenté ci-dessous.
En appliquant l'un sur l'autre les points A et B, on forme ensuite un cône de sommet O.

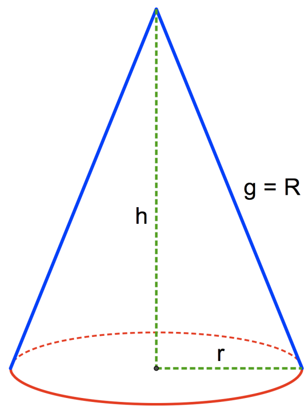
a) Montrer que le volume du cône est donné par une expression du type

$$V = \alpha \,.\, R^3\theta^2 .\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

où α est une constante positive à déterminer et où θ est exprimé en radians.

b) Le rayon R étant fixé, déterminer le volume maximum du cône pouvant être construit de la sorte. Justifier.





Le volume d'un cône de révolution droit est égal au tiers de l'aire de sa base circulaire multipliée par sa hauteur. On a donc la formule $V = \dfrac{\pi\, r^2\, h}{3}$.

Nous devons exprimer r et h en fonction de R et θ .

Expression de r en fonction de R et θ

L'arc de cercle AB du secteur de disque (en rouge) est la circonférence de la base du cône.

Longueur de l'arc AB : $\theta \,.\, R$ où θ est exprimé en radians [(1)].

Circonférence de la base du cône : $2\pi r$. Donc $2\pi r = \theta R \;\;\rightarrow\;\; r = \dfrac{\theta R}{2\pi}$ (1) .

Expression de h en fonction de R et θ

Dans le cône, nous avons $h = \sqrt{g^2 - r^2}$.

Ensuite, il faut se rendre compte que le rayon R du secteur de disque est la génératrice g du cône.
En tenant compte de (1) , nous avons ainsi :

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{\theta^2 R^2}{4\pi^2}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^2 - \theta^2 R^2}{4\pi^2}} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \;.$$

[(1)] Pour cette formule, voir cours de trigonométrie de 5e , page 3 .

Revenons maintenant au volume du cône :

$$V = \frac{1}{3}\pi\, r^2\, h = \frac{1}{3}\pi \,.\, \frac{\theta^2 R^2}{4\pi^2} \,.\, \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\theta^2} = \frac{\theta^2 R^3}{24\pi^2} \,.\, \sqrt{4\pi^2-\theta^2}\ .$$

Finalement : $V(\theta) = \dfrac{1}{24\pi^2} \,.\, R^3\theta^2 \,.\, \sqrt{4\pi^2-\theta^2}$ (2) et nous avons la constante $\boxed{\alpha = \dfrac{1}{24\pi^2}}$.

<u>Comment obtenir le volume maximal ?</u>

Dérivons la fonction $V(\theta)$.

$$V'(\theta) = \frac{R^3}{24\pi^2} \,.\, \left[\theta^2 \,.\, \sqrt{4\pi^2-\theta^2}\right]' = \frac{R^3}{24\pi^2} \,.\, \left[2\theta \,.\, \sqrt{4\pi^2-\theta^2} + \theta^2 \,.\, \frac{1}{2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}} \,.\, (-2\theta)\right]$$

$$V'(\theta) = \frac{R^3\,\theta}{12\pi^2} \,.\, \left[\sqrt{4\pi^2-\theta^2} - \theta^2 \,.\, \frac{1}{2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}\right] = \frac{R^3\,\theta}{12\pi^2} \,.\, \left[\frac{8\pi^2-2\theta^2-\theta^2}{2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}\right]$$

$$V'(\theta) = \frac{R^3\,\theta}{12\pi^2} \,.\, \left[\frac{8\pi^2-3\theta^2}{2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}\right]$$

Le signe de $V'(\theta)$ est celui de $8\pi^2-3\theta^2$ (tous les autres facteurs sont positifs).

La dérivée admet comme racines $\theta = 0$ et $\theta = \sqrt{\dfrac{8\pi^2}{3}} = \sqrt{\dfrac{8}{3}}\,\pi$.

θ	0		$\sqrt{\frac{8}{3}}\,\pi$		2π
$V'(\theta)$	0	+	0	-	X
$V(\theta)$	0	↗	Max	↘	0

Le volume maximal sera obtenu pour un angle $\theta = \sqrt{\dfrac{8}{3}}\,\pi \approx 5{,}1302$ (radians) soit $\theta \approx 293{,}94°$.

En remplaçant la valeur en radians de θ dans la formule (2) , nous trouvons : $V_{\max} \approx 0{,}4031 \,.\, R^3$.
