# DISTANCE ENTRE UN POINT ET UNE DROITE EN GÉOMÉTRIE PLANE

**Vecteur directeur et vecteur normal d'une droite du plan**

Dans un repère orthonormé du plan, considérons la droite $d \equiv ax + by + c = 0$ ( $a \neq 0$ et $b \neq 0$ ) .
Il s'agit donc d'une droite oblique (parallèle ni à l'axe O$x$ , ni à l'axe O$y$ ).

Afin de déterminer un vecteur directeur de $d$ , déterminons-en deux points.

Si $x = 0$ , alors $y = - c / b$ et donc $I\left(0\,,-\frac{c}{b}\right) \in d$ .

Si $y = 0$ , alors $x = - c / a$ et donc $J\left(-\frac{c}{a}\,,0\right) \in d$ .

Un vecteur directeur de $d$ est donc $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ \frac{c}{b} \end{pmatrix}$ . Pour plus de facilité, multiplions $\overrightarrow{IJ}$ par $-\frac{ab}{c}$ .

Nous obtenons ainsi l'énoncé suivant, valable même si $a = 0$ ou $b = 0$ , mais non simultanément nuls (justifier).

> La droite $d \equiv ax + by + c = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ .

Tout multiple non nul de $\vec{v}$ est évidemment aussi vecteur directeur de $d$ , en particulier $-\vec{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ .

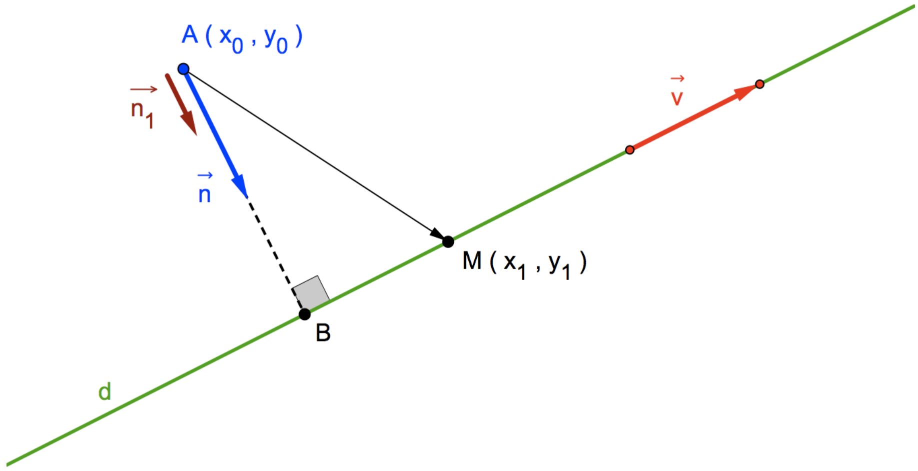
Cet énoncé a une autre conséquence : le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ , ainsi que ses multiples non nuls, sont perpendiculaires à $d$ . En effet, le produit scalaire de $\vec{n}$ par $\vec{v}$ vaut 0 : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = ab - ba = 0$ .

> La droite $d \equiv ax + by + c = 0$ a pour vecteur normal (perpendiculaire) $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .

Nous sommes maintenant prêts à calculer la distance entre un point $A\,(x_0, y_0)$ et une droite $d$ .

**Distance entre un point et une droite du plan**

Soient $A(x_0, y_0)$ un point n'appartenant pas à $d$, et $M(x_1, y_1)$ un point quelconque de $d$.
Soit encore $B$ la projection orthogonale de $A$ sur $d$.




La norme (longueur) du vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est $\sqrt{a^2+b^2}$.

Le vecteur $\vec{n_1} = \dfrac{\vec{n}}{\sqrt{a^2+b^2}}$ a donc pour longueur 1 (on dit que c'est un « vecteur normé »).

Considérons maintenant le produit scalaire $\vec{n_1} \bullet \overrightarrow{AM}$ :

$$\vec{n_1} \bullet \overrightarrow{AM} = \vec{n_1} \bullet \overrightarrow{AB} = \pm \left\| \vec{n_1} \right\| . \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \pm 1 . \left| AB \right| = \pm\, d(A,d) \; .$$

Nous obtenons, au signe près, la distance entre $A$ et $d$ ! [1]

Pour obtenir la formule qui nous intéresse, calculons ce produit scalaire en fonction des composantes des vecteurs.

$$d(A,d) = \left| \vec{n_1} \bullet \overrightarrow{AM} \right| = \left| \begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} . (x_1 - x_0) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} . (y_1 - y_0) \right|$$

$$= \left| \frac{a x_1 - a x_0 + b y_1 - b y_0}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|$$

Le point $M(x_1, y_1)$ appartenant à $d$ : $a x_1 + b y_1 + c = 0$ et donc $a x_1 + b y_1 = -c$.

$$= \left| \frac{-a x_0 - b y_0 - c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| = \frac{\left| a x_0 + b y_0 + c \right|}{\sqrt{a^2+b^2}} \; .$$

[1] Il faut envisager « ± » car, si la figure ci-dessus montre des vecteurs $\vec{n_1}$ et $\overrightarrow{AB}$ de même sens, ils pourraient aussi être de sens contraires.

**Conclusion**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé,
la distance entre le point $A(x_0, y_0)$ et la droite $d \equiv ax + by + c = 0$ est donnée par la formule :

$$d(A,d) = \frac{|\,ax_0 + by_0 + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (1)\,.$$

## Exemples

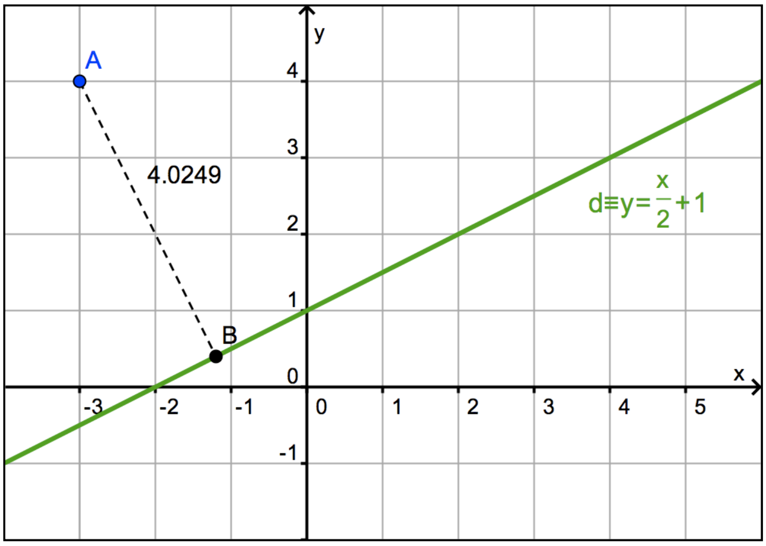
Calculer la distance entre le point $A$ (-3,4) et la droite $d \equiv y = \dfrac{x}{2} + 1$ .

Il faut d'abord écrire l'équation de $d$ sous la forme $ax + by + \text{c} = 0$ .

Nous avons $d \equiv x - 2y + 2 = 0$ , donc :

$$d(A,d) = \frac{|\,1.(-3) + (-2).4 + 2\,|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{|-9|}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5} \approx 4{,}0249\,.$$




La formule (1) reste valable si la droite $d$ est verticale ou horizontale. Voici deux exemples.

Calculer la distance entre le point $A$ (-2,-1) et la droite $d \equiv x = 1{,}5$ .
Ensuite entre $A$ et la droite $e \equiv y = 3$.

Nous avons $d \equiv x - 1{,}5 = 0$ , donc :

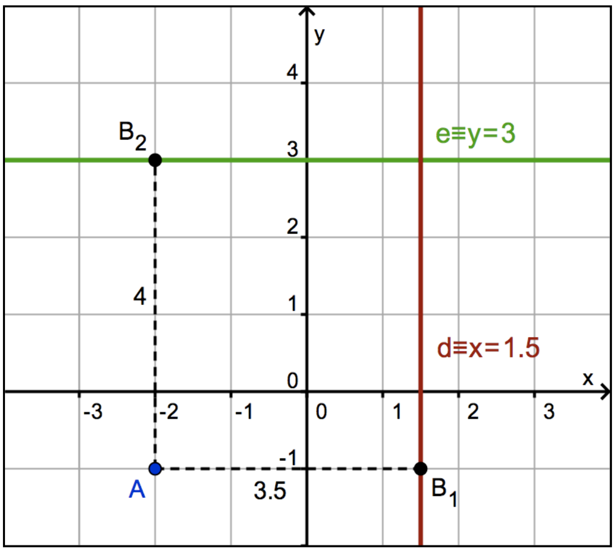
$$d(A,d) = \frac{|\,1.(-2) + 0.(-1) - 1{,}5\,|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 3{,}5\,.$$

Nous avons $e \equiv y - 3 = 0$ , donc :

$$d(A,e) = \frac{|\,0.(-2) + 1.(-1) - 3\,|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 4\,.$$

Évidemment, il suffisait de faire :

$$d(A,d) = |-2 - 1{,}5| = 3{,}5 \quad \text{et} \quad d(A,e) = |-1 - 3| = 4\,.$$




## Extension à l'espace

La distance entre un point de l'espace et un plan s'obtient par une formule analogue à (1).
Voir cours de 5[e], *Géométrie analytique dans l'espace*, page 24.